

РЕГУЛИРОВАНИЕ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ¹

А до л ь ф Б ю з е м а н

(Хэмптон, США)

В этом докладе, открывающем заседания гидродинамической секции Симпозиума по приложению аналитических функций к задачам механики сплошных сред, мне хотелось бы вернуться к очень давнему и очень знаменитому приложению, из области классической гидродинамики, сделанному Кутта и Жуковским при изучении подъемной силы, возникающей в плоских течениях идеальной жидкости. Двухсвязная область, которую представляет собой внешность профиля в бесконечной плоскости, допускает циркуляционные движения, интенсивность которых не может быть определена при помощи непосредственно задаваемых граничных условий. Тем не менее, оба названных выше автора выбрали одно и то же условие гладкости потока на острой задней кромке плоской пластинки (Кутта) или специального класса профилей Жуковского с острой задней кромкой (Жуковский) в качестве регулирующего подъемную силу элемента течения идеальной жидкости, известного теперь под названием условия «Кутта — Жуковского». Условие гладкости течения, каким бы правдоподобным оно ни казалось, в рамках теории течений идеальной жидкости представляет собой гипотезу, и ее строгое доказательство, вытекающее из рассмотрения течений жидкости с исчезающей вязкостью, появилось вскоре в виде теории пограничного слоя Прандтля.

Аналогичная проблема обнаруживается и в современной магнитной гидродинамике плоского потока жидкости, которая может считаться идеальной в двух отношениях, т. е. жидкости, обладающей исчезающей вязкостью и исчезающим электрическим сопротивлением [1-4]. Внешнее магнитное поле при этом распространяется на все поле потока. При рассмотрении распределений двух полей — векторов скорости и магнитного поля — может показаться, что здесь появятся и две неопределенные циркуляции вокруг профиля. Однако нетрудно убедиться, что, к счастью, эти две циркуляции связаны одна с другой, так что ответственной за любую боковую или подъемную силу остается единственная, оставшаяся неопределенной комбинированная циркуляция. К сожалению, в настоящей работе предпринято упрощенное рассмотрение, представляющее собой линеаризованный подход ко всем элементам формы обтекаемого тела, определяющим подъемную силу. Поэтому легкость нахождения большого многообразия иллюстративных примеров должна опираться на предположение, что методы линеаризации могут прояснить проблему настолько, что окажется возможным выявить магнитогидродинамическое обобщение гипотезы Кутта—Жуковского, как столь же правдоподобную гипотезу.

Ниже излагается краткий вывод дифференциальных уравнений и их специализация применительно к случаю плоских течений. Непосредственно после этого дается общее решение в той же форме, что и в моей лекции, посвященной 80-летию юбилею Кармана, прочитанной в 1961 г. [5]. Именно эта часть работы внушила мне надежду, что ее обсуждение на настоящем симпозиуме может быть вполне подходящим. Далее, после демонстрации пары примеров и обсуждения их существенных свойств, добавляются некоторые заключения о регулирующих подъемную силу элементах.

¹ Расширенное изложение доклада, представленного на Международном Симпозиуме по приложениям теории функций в механике сплошных сред. Тбилиси, 17—23 сентября 1963 г.

§ 1. Дифференциальные уравнения. Имея в виду единственную цель выявить изменение в постановке проблемы подъемной силы Кутта—Жуковского, обусловливаемое электромагнитным взаимодействием, можно понимать название «магнитная гидродинамика» буквально и рассматривать несжимаемую жидкость с постоянным значением электропроводности, которая предполагается скалярной величиной. Существенными и, в конце концов, единственными остающимися переменными, характеризующими поле потока, будут два вектора: вектор магнитной индукции \mathbf{B} и вектор скорости жидкости \mathbf{V} . Эти векторные поля не вполне произвольны, так как их дивергенции обращаются в нуль

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

Первое из этих уравнений отражает естественное свойство, выбирающее магнитную индукцию как показатель интенсивности магнитного поля, а второе уравнение выражает собой удобное упрощение, вытекающее из предположения о несжимаемости жидкости.

Квадраты обоих векторов $1/2 B^2 / \mu$ и $1/2 \rho V^2$, будучи умноженными на соответствующие константы, представляют собой, соответственно, магнитное и гидродинамическое давления в магнитно-проницаемой несжимаемой жидкости. Это свойство делает их соизмеримыми путем сопоставления альфвеновской скорости $B \sqrt{\rho \mu}$ со скоростью V . Для упрощения записи уравнений примем плотность ρ и магнитную проницаемость μ равными единице. Таким образом, кинематическая вязкость будет соответствующей диссипативной константой в этой системе, тогда как для получения кинематического «удельного сопротивления» электрических токов k следует разделить обратную проводимость на магнитную проницаемость μ

$$k = \frac{1}{\sigma \mu} \quad (1.3)$$

Влияние движения поперек магнитного поля на гидродинамику создается так называемыми электродинамическими лоренцевыми силами. Величина этой силы \mathbf{f} , приходящаяся на единицу объема, зависит от плотности электрического тока \mathbf{j} следующим образом:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.4)$$

Однако любой ток проявляет себя, завихряя вокруг себя магнитное поле согласно уравнению

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (1.5)$$

Комбинируя эти два выражения, получим

$$\mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - 1/2 \nabla^2 \mathbf{B}^2 \quad (1.6)$$

Это равенство устанавливает связь лоренцевых сил с тензором напряжений магнитного поля $B_i B_k - 1/2 \delta_{ik} B^2$.

Эти силы входят в гидродинамическое уравнение следующим образом

$$\mathbf{f} - \operatorname{grad} p_h = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.7)$$

Магнитное давление p_m , градиент которого представляется последним членом правой части (1.6), допускает суммирование со статическим дав-

лением p_h , так что полное давление p удовлетворяет соотношению

$$p = p_h + p_m = p_h + \frac{1}{2} B^2 \quad (1.8)$$

градиент полного давления равен просто

$$-\text{grad } p = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \nu \nabla^2 \right) \mathbf{V} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1.9)$$

При отсутствии внешних электрических полей все токи \mathbf{j} получаются за счет индукции в жидкости при ее движении поперек магнитного поля и наоборот. Замкнутые токи будут заведомо обеспечены, если, во-первых, используется вихрь индуцированного электрического¹ поля \mathbf{E}

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.10)$$

и, во-вторых, электрическое удельное сопротивление жидкости $\kappa = \text{const}$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \kappa \text{rot } \mathbf{j} = \text{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

Снова, исключая токи и электрическое поле, получим, комбинируя (1.11) и (1.5), связь между магнитным полем и полем скорости

$$\kappa \text{rot rot } \mathbf{B} = \text{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.12)$$

Преобразовывая здесь опять все двойные векторные произведения и используя уравнения (1.1) и (1.2), приведем это соотношение к виду

$$-\kappa \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.13)$$

Все дифференциальные операции в этом соотношении, кроме одной, выполняются над вектором магнитной индукции. Это становится более ясным, если переписать (1.13) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \kappa \nabla^2 \right) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0 \quad (1.14)$$

где в круглых скобках стоят операторы. Эта окончательная форма электромагнитного уравнения обладает удивительным сходством с окончательной формой гидродинамического уравнения (1.9). Третьи члены в операторах-суммах отличаются в этих уравнениях только коэффициентом диффузии, который равен вязкости ν для гидродинамического уравнения и удельному сопротивлению для электромагнитного уравнения. Если это отличие, которое, конечно, исчезает для идеальных жидкостей, будет приносить слишком много затруднений, всегда будет можно исследовать упрощенный случай жидкости, для которой $\nu = \kappa$ — случай «равно-диссипирующей» жидкости.

§ 2. Линеаризация. В уравнениях (1.9) и (1.14) дифференциальные операторы, выделенные скобками, содержат члены, которые в виде коэффициента имеют один из векторов неизвестного поля; это указывает на нелинейность обоих уравнений. Именно в этих членах заключена истинная трудность в решении полной задачи путем отыскания частных решений. Однако подобный подход можно использовать после линеаризации диффе-

¹ Индуцированное электрическое поле зависит от метода его наблюдения. Здесь символ \mathbf{E} используется для инвариантного поля, получающегося внутри движущейся и деформирующейся жидкости. Если \mathbf{E}_c — индуцированное поле в декартовых координатах, в которых наблюдается движение жидкости со скоростью \mathbf{V} , то имеет место соотношение: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{V} + \mathbf{B}$.

ренциальных уравнений для течений с малыми возмущениями. Все члены в выражениях операторов представляют собой частные производные по пространственным переменным или времени: поэтому после применения этих операторов невозмущенное поле потока, состоящее из параллельного потока и параллельного магнитного поля (которые могут иметь и разные направления), обращается в тождественный нуль, каково бы ни было неизвестное поле, определяющее коэффициенты самих операторов. При этих обстоятельствах линеаризация сведется к тому, что неизвестные поля возмущений будут всегда входить под знаком операторов, тогда как поля, определяющие коэффициенты операторов, можно считать невозмущенными.

Если сохранить предыдущие обозначения V и B за невозмущенными полями и для возмущений — малых добавок к параллельным полям — использовать, соответственно, обозначения v и b , то операторы, входящие в уравнения (1.9) и (1.14), будут близки к дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами, в выражениях которых векторы поля V и B следует заменить значениями V_∞ и B_∞ . К этим значениям величины V и B стремятся при достаточном удалении от возмущающего тела. Для упрощения обозначений индекс ∞ будем в дальнейшем опускать. После такой линеаризации операторы можно рассматривать как коммутирующие множители, коль скоро они действуют на одно и то же поле v или b ; уравнения (1.9) и (1.14) после линеаризации имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla - v \nabla^2\right) v - (B \cdot \nabla) b = - \text{grad} p \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla - \kappa \nabla^2\right) b - (B \cdot \nabla) v = 0 \quad (2.2)$$

Рассмотренные ранее уравнения (1.1) и (1.2) применительно к новым обозначениям возмущенных полей принимают вид

$$\text{div} b = 0, \quad \text{div} v = 0 \quad (2.3)$$

Очевидно, что эти четыре уравнения, два из которых — скалярные уравнения, а два других — векторные, причем поле давлений p соответствует возмущениям, содержат достаточную информацию для того, чтобы определение неизвестных полей стало возможным.

§ 3. Приведение системы уравнений для плоского случая. Обозримые решения легче всего получить для плоского течения, поэтому дальнейший анализ этих уравнений проводится в комплексной плоскости, как и в работах Жуковского и Кутта. Первое удобство, полученное при переходе к плоскому случаю, связано с существованием скалярной функции потока ϕ для магнитного поля b и скалярной функции тока для поля скорости как интегралов уравнений (2.3). В комплексной плоскости оператор набла, как известно, представляется в виде производной

$$\nabla = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (z = x + iy, \bar{z} = x - iy)$$

от произвольной функции двух переменных, представленной в виде функции переменных z и \bar{z} . Градиент некоторого поля можно немедленно записать через набла, и в то же время связь между функциями тока и векторным полем, параллельным линиям уровня этих функций, требует еще

дополнительного умножения на $\pm i$, чтобы осуществить вращение на $\pm 90^\circ$. Векторные поля, таким образом, связаны со своими интегралами потока следующими простыми соотношениями

$$\mathbf{b} = -i2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi, \quad \mathbf{v} = -i2 \frac{\partial}{\partial z} \psi \quad (3.1)$$

Уравнение (2.2) можно непосредственно переписать через функции тока:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \kappa \nabla^2 \right) \varphi - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \psi = 0 \quad (3.2)$$

В то же время правая часть уравнения (2.1) не является вполне подходящей для такого перехода. Однако, вследствие обращения в нуль дивергенций от векторов \mathbf{v} и \mathbf{b} , входящих в левую часть (2.1), p будет гармонической функцией во всей области вне тела

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0 \quad (3.3)$$

Вследствие этого давление должно быть действительной частью комплексной «функции давления» π

$$p \pm iq = \pi(z, \bar{z}, t) \quad (3.4)$$

Так как функция p и гармонически сопряженная ей функция q содержат в себе одинаковую информацию, легко заключить, что $\operatorname{grad} p$ можно заменить на $i \operatorname{grad} q$ вследствие конформности отображения. Переход в уравнении (2.1) на уровень функций тока выполняется после замены p на q , и это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \nu \nabla^2 \right) \psi - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \varphi = q \quad (3.5)$$

причем учитываем, что q — гармоническая функция

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} q = \nabla^2 q = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} q = 0 \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5) и (3.2) представляют собой два скалярных уравнения для двух скалярных функций ψ и φ , причем q может уже считаться произвольной гармонической функцией, полученной в ходе интегрирования.

§ 4. Общее решение. Уравнение (3.2) можно проинтегрировать введением некоторого «потенциала» Q в силу того, что все входящие в него дифференциальные операторы обладают коммутационным свойством

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \kappa \nabla^2 \right) Q = \psi, \quad (\mathbf{B} \cdot \nabla) Q = \varphi \quad (4.1)$$

Уравнение для функции Q получается из уравнения (3.5) в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \nu \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \kappa \nabla^2 \right) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \right] Q = q \quad (4.2)$$

Второй член суммы, стоящей в квадратной скобке, является во всех случаях квадратом оператора; в то же время первый член этой суммы также будет квадратом некоторого оператора в случае идеальной жидкости без всякой диссипации. Если, однако, диссипативные члены существенны, то только для жидкости с одинаковыми диссипативными коэффициентами $\kappa = \nu$, «равно-диссипирующей» жидкости, можно положить

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \nu \nabla^2 \right)^2 - (\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \right] Q = & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2 \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} + \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2 \right) \right] Q = q \end{aligned} \quad (4.3)$$

В соответствии со свойствами «гармонически сопряженной давлению» функции q , удовлетворяющей уравнению (3.6), левую часть для новой функции Q можно записать в виде произведения четырех независимых операторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} + \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2\right) \left(2 \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) Q = 0 \quad (4.4)$$

Интеграл этого уравнения можно записать в виде суммы четырех слагаемых

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \quad (4.5)$$

каждое из которых отвечает определенному оператору в левой части (4.4)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2\right) Q_1 &= 0, & 2 \frac{\partial}{\partial z} Q_3 &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} + \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2\right) Q_2 &= 0, & 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} Q_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теперь необходим обратный переход к исходным неизвестным для того, чтобы удовлетворить граничным условиям. Уравнения (4.1) определяют первый шаг такого перехода — возврат от потенциала Q к функциям тока, а уравнения (3.1) определяют второй шаг — переход к самим векторным полям магнитной индукции и скорости. Применение уравнений (4.1) к отдельным слагаемым потенциала Q раскрывает их физический смысл. Так, имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2\right] Q_1 = \psi_1 - \varphi_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} + \mathbf{B}) \cdot \nabla - \nu \nabla^2\right] Q_2 = \psi_2 + \varphi_2 = 0 \quad (4.8)$$

В поле, у которого дивергенции равны нулю, единственными возмущениями могут быть вихри; поэтому решение Q_1 представляет собой вихри скорости и магнитного поля, имеющие одинаковое направление вращения и перемещающиеся, если не учитывать диссипации, со скоростью $\mathbf{V} - \mathbf{B}$. Таким же образом решение Q_2 определяет вихри, имеющие противоположные направления вращения, перемещающиеся со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{B}$. Если в потоке достигается установившееся состояние, то вихри вдоль любой линии $\mathbf{V} - \mathbf{B}$ или $\mathbf{V} + \mathbf{B}$ постоянны, если не учитывать диссипации, так что картина потока очень сильно напоминает сверхзвуковое плоское течение (фиг. 1). Члены уравнений (4.7) и (4.8), зависящие от времени, очень полезны для выяснения направления распространения двух семейств волн, начинающихся на контуре тела.

Использование этой части решения применимо только для задач, относящихся к тонким телам без угла атаки при отсутствии источников и стоков магнитного потока внутри тела. При этом не возникает давления и подъемная сила всегда равна нулю. Однако давления получаются из решений Q_3 и Q_4 , представляющих собой аналитические функции соответственно переменных \bar{z} и z .

При переходе от потенциалов Q_3 и Q_4 к функциям тока в соответствии с уравнениями (4.1) всегда можно опустить последний член в операторе, входящем в первое уравнение (4.1), так как аналитические функции не

дают диссипации

$$\varphi_3 = \mathbf{V} \cdot \nabla Q_3, \quad \psi_3 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) Q_3 \quad (4.9)$$

$$\varphi_4 = \mathbf{V} \cdot \nabla Q_4, \quad \psi_4 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) Q_4 \quad (4.10)$$

Для конечного стационарного состояния соотношения для возмущений функций тока еще ближе одно к другому ввиду отсутствия первых членов в выражениях для функций тока

$$\psi_3 = \mathbf{V} \cdot \nabla Q_3 = \left(V \frac{\partial}{\partial z} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) Q_3(\bar{z}) = \bar{V} Q_3' \quad (4.11)$$

$$\varphi_3 = \mathbf{V} \cdot \nabla Q_3 = \left(B \frac{\partial}{\partial z} + \bar{B} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) Q_3(\bar{z}) = \bar{B} Q_3' \quad (4.12)$$

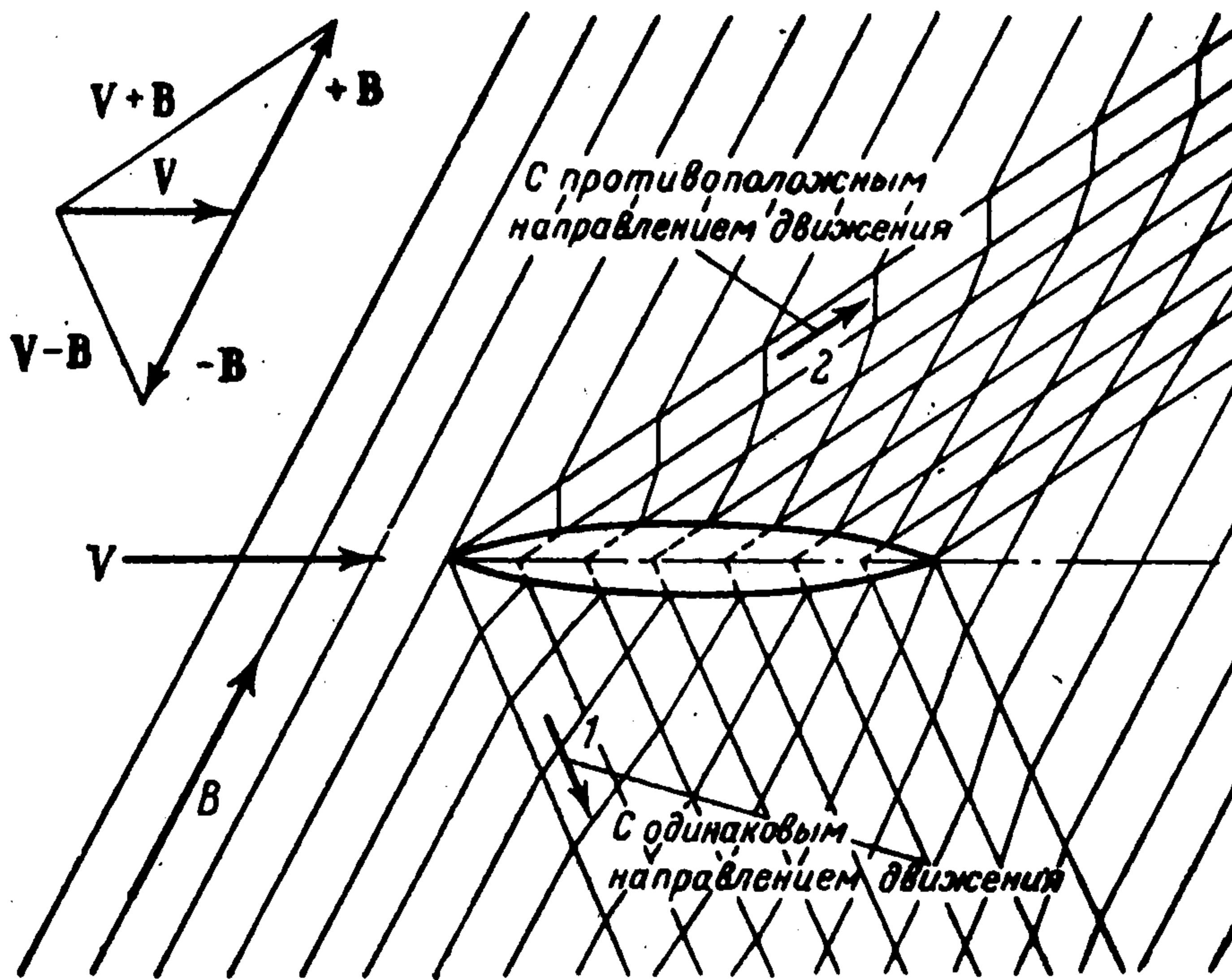
В стационарном состоянии комплексные потенциалы просто пропорциональны

$$\varphi_3 = \frac{\bar{B}}{\bar{V}} \psi_3 \quad (4.13)$$

Скорости, определяемые этими потенциалами, имеют то же отношение

$$b_{34} = \frac{\bar{B}}{\bar{V}} v_{34} \quad (4.14)$$

Особенности, возникающие от этих возмущений, обыкновенно представляют собой вихри, запрятанные внутри тела и представляющие вне тела циркуляционные движение или магнитное поле, обуславливающее подъемную силу. Ни магнитное поле, ни поле скоростей не могут иметь источников или стоков, однако комплексный множитель при одном из потенциалов как в уравнении (4.13) перемешивает циркуляции и источники. Результат, представленный на фиг. 2, заключается в том, что хорошо известная циркуляция поля скоростей дает для магнитного поля комбинацию типа циркуляция плюс сток. Если отбросить решения Q_3 и Q_4 за вычетом параллельных полей вследствие неопределенности интенсивности стока, то намеченный ранее упрощенный подход к изучению подъемной силы будет вполне исчерпывающим. Реальный подход должен заключаться в том, чтобы комбинировать избыток потока в одном из решений Q_1 и Q_2 , создаваемый за счет конечности угла атаки, со стоком в решениях Q_2 и Q_3 и получить подъемную силу, или по крайней мере циркуляцию, регулируемую углом атаки. Фиг. 3 и 4 предназначены для облегчения отыскания избытка потока $\Delta\varphi_2$, соответствующего данному углу атаки. При помощи конфигурации внутри тела, изображенной на фиг. 1 пунктиром, начинающейся на передней кромке тела, расчет магнитного потока для



Фиг. 1

ляционное движение или магнитное поле, обуславливающее подъемную силу. Ни магнитное поле, ни поле скоростей не могут иметь источников или стоков, однако комплексный множитель при одном из потенциалов как в уравнении (4.13) перемешивает циркуляции и источники. Результат, представленный на фиг. 2, заключается в том, что хорошо известная циркуляция поля скоростей дает для магнитного поля комбинацию типа циркуляция плюс сток. Если отбросить решения Q_3 и Q_4 за вычетом параллельных полей вследствие неопределенности интенсивности стока, то намеченный ранее упрощенный подход к изучению подъемной силы будет вполне исчерпывающим. Реальный подход должен заключаться в том, чтобы комбинировать избыток потока в одном из решений Q_1 и Q_2 , создаваемый за счет конечности угла атаки, со стоком в решениях Q_2 и Q_3 и получить подъемную силу, или по крайней мере циркуляцию, регулируемую углом атаки. Фиг. 3 и 4 предназначены для облегчения отыскания избытка потока $\Delta\varphi_2$, соответствующего данному углу атаки. При помощи конфигурации внутри тела, изображенной на фиг. 1 пунктиром, начинающейся на передней кромке тела, расчет магнитного потока для

произвольной формы тела становится достаточно простым. При нулевом угле атаки избыток равен нулю, отношения горизонтального размера к вертикальному берутся с векторной диаграммы v, B , и получается, что $2V$ по горизонтали соответствует B_y по вертикали (фиг. 4). Поток через любую горизонтальную единицу длины также равен B_y . Результат для случая хорды c и угла атаки β вниз от направления потока составляет

$$\Delta\varphi_{12} = cB_y\beta \frac{2V}{B_y} 2Vc\beta \quad (4.15)$$

В тех же координатах, когда ось x параллельна V , отношение \bar{B} / \bar{V} превращает циркуляцию скорости Γ в магнитную циркуляцию J и интенсивность магнитного источника S

$$J + iS = \quad (4.16)$$

$$= \frac{\bar{B}}{\bar{V}} \Gamma = \frac{B_x - iB_y}{V} \Gamma$$

Интенсивность источника, компенсирующего избыток потока, определяемый уравнением (4.15), дает циркуляцию

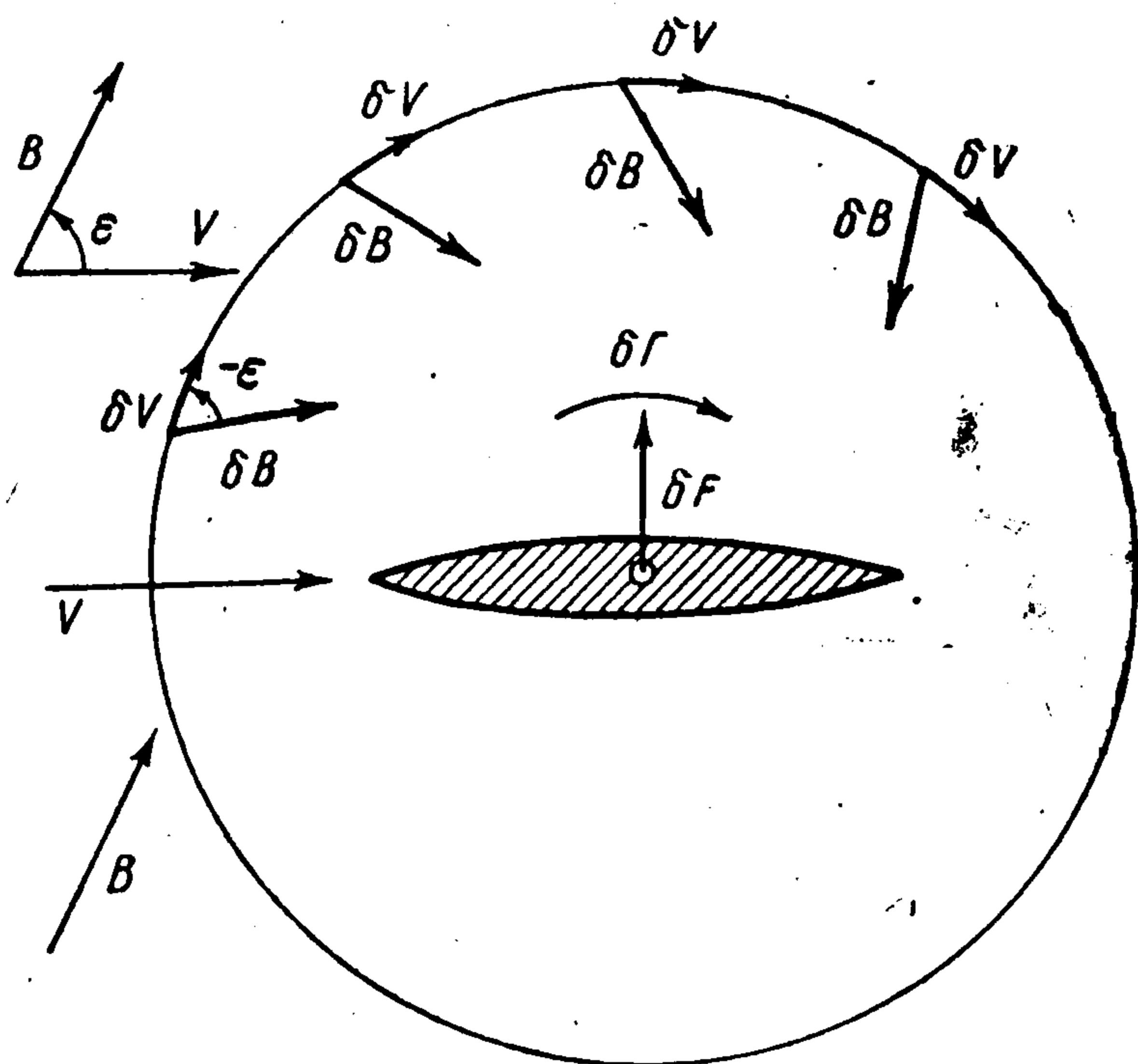
$$\Gamma = \frac{2V^2c}{B_y} \beta \quad (4.17)$$

Сила, создаваемая циркуляцией в комбинированном магнитогидродинамическом поле, состоит из подъемной силы $iV\Gamma$ и лоренцовой силы $-iBJ$.

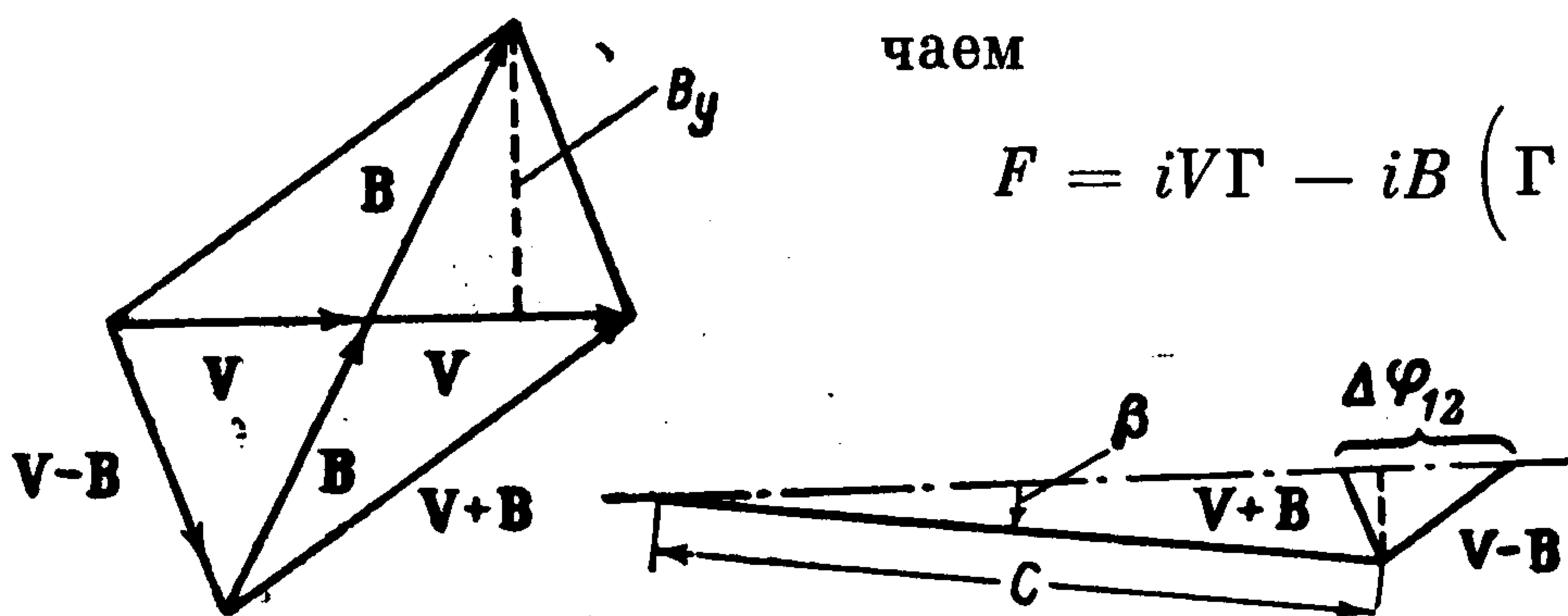
Однако вместо ожидаемого простого тока J , создающего магнитную циркуляцию вокруг тела, умножение на комплексный множитель согласно (4.15) дает $J = \Gamma \bar{B} / \bar{V}$. В результате получаем

$$F = iV\Gamma - iB \left(\Gamma \frac{\bar{B}}{\bar{V}} \right) = iV\Gamma \left(1 - \frac{B\bar{B}}{V\bar{V}} \right) \quad (4.18)$$

Таким образом, результирующая сила F и на самом деле представляет собой боковую силу, такую же, как и гидродинамическая подъемная сила, однако ее величина уменьшена в $(1 - (B/V)^2)$ раз. Это показывает, что подъемная сила при движении с альфеновской скоростью обращается в нуль и изменяет свое направление при доальфеновских скоростях движения, т. е. для достаточно сильных магнитных полей.



Фиг. 2

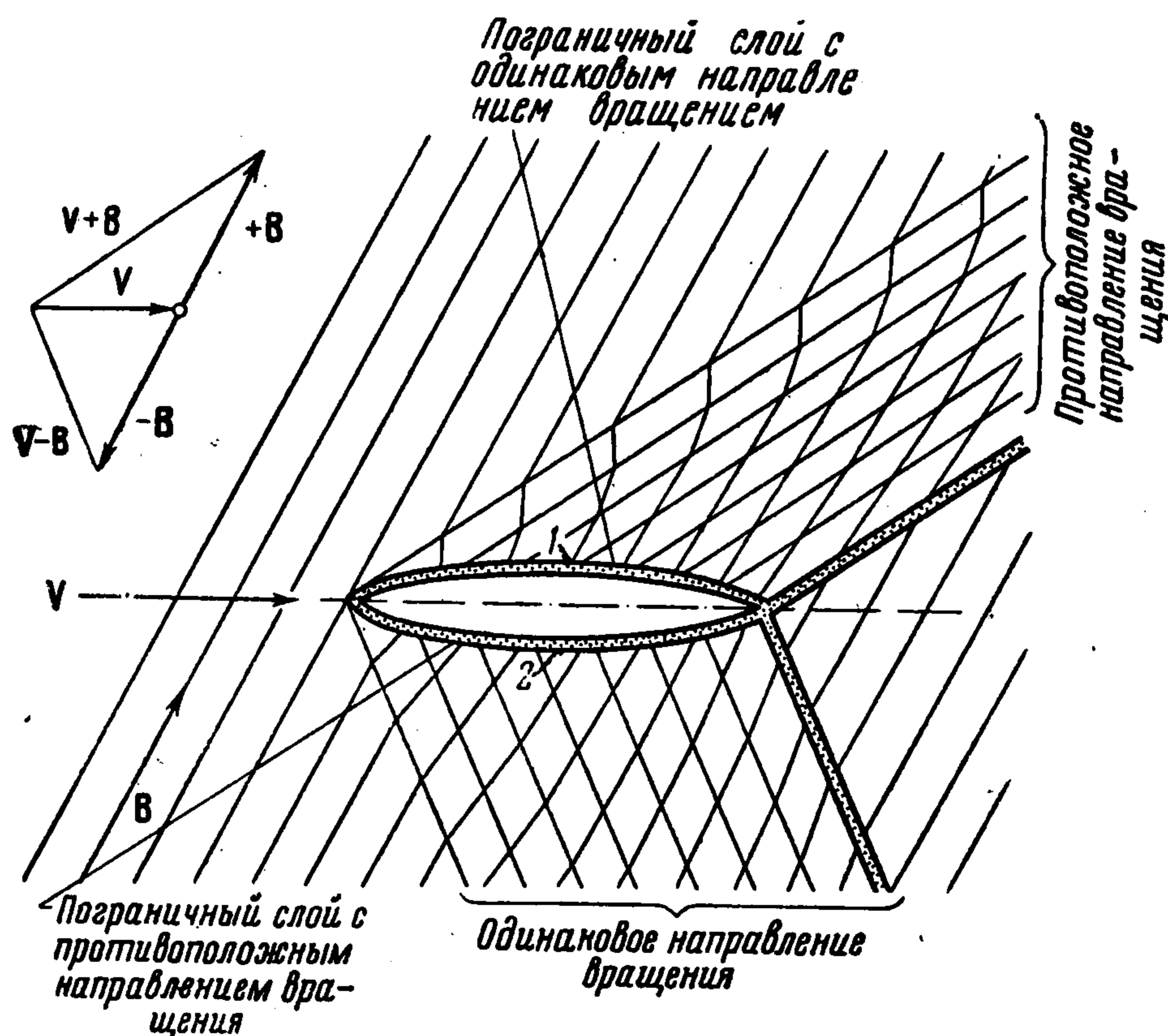


Фиг. 3

мическая подъемная сила, однако ее величина уменьшена в $(1 - (B/V)^2)$ раз. Это показывает, что подъемная сила при движении с альфеновской скоростью обращается в нуль и изменяет свое направление при доальфеновских скоростях движения, т. е. для достаточно сильных магнитных полей.

Что же касается обобщенного условия Кутта — Жуковского, случай неколлинеарных полей V и B , по-видимому, вполне аналогичен случаю сверхзвукового потока, где ведущая и задняя кромки могут помочь при точном регулировании подъемной силы, будучи достаточно заостренными, тогда как угол атаки полностью регулирует циркуляцию.

§ 5. Движение, параллельное магнитному полю. Проблема Кутта — Жуковского, как таковая исчезает в случае, когда магнитное поле составляет конечный угол с направлением потока. Однако, случай, когда скорость движения имеет направление, совпадающее с направлением магнитного поля или ему противоположное, представляет исключение,



Фиг. 4

для которого две вихревые полосы, начинающиеся на поверхности тела (фиг. 1), вырождаются в одну единственную линию тока за телом или впереди тела. Возмущение потенциального потока, соответствующее комбинации решений Q_3 и Q_4 , совмещает магнитные линии с линиями тока стационарного течения. Таким образом, задача в целом становится в

точности совпадающей с известной гидродинамической задачей и после решения этой последней соответствующие ей линии тока можно рассматривать и как магнитные силовые линии. Различия возникают только в спутной струе и обуславливаются отклонениями жидкости от идеальной за счет вязкости и электрического сопротивления.

Математически коллинеарность невозмущенной скорости V и магнитного поля B с осью x не приводит непосредственно к существенным упрощениям. Общее решение уравнения (4.3) содержит все еще много различных членов

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} - \nu \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \right) - B^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] Q = q \quad (5.1)$$

Если, однако, рассматривается установившееся течение *полуидеальной* жидкости, в которой либо удельное электрическое сопротивление, либо вязкость равны нулю, то один множитель $\partial/\partial x$ выделяется

$$\left[\left(\frac{V^2 - B^2}{V} \frac{\partial}{\partial x} - \nu \nabla^2 \right) \left(V \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] Q = q \quad \text{для } \kappa = 0 \quad (5.2)$$

$$\left[\left(\frac{V^2 - B^2}{V} \frac{\partial}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \right) \left(V \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] Q = q \quad \text{для } \nu = 0 \quad (5.3)$$

Расщепление первых частных решений Q_1 и Q_2 между этими факторизованными операторами таким же образом, как и для равно-диссипирующей жидкости, делает второе решение Q_2 неинтересным, тогда как первое решение имеет конвективную скорость не $V - B$, а другую величину — $(V^2 - B^2) / V$, изменяющую диссипацию вихря.

Эта новая конвективная скорость обращается в нуль там же, где $V - B$, но сравнительно с $V - B$ она имеет дополнительный множитель, который удваивает ее для течений со скоростью, примерно равной альфевской, и неограниченно увеличивает с увеличением B . Не будучи непосредственно связанной с нестационарным процессом установления, эта новая скорость напоминает «фазовую скорость» сравнительно с «групповой скоростью» $V - B$ равно-диссипирующей жидкости.

Различие обоих предельных случаев полуйдеальной жидкости возникает при нахождении функций тока при помощи уравнений (4.1). Для жидкости с исчезающим электрическим сопротивлением (сверхпроводящей жидкости) получается следующий результат:

$$\varphi_1 = B \frac{\partial}{\partial x} Q_1, \quad \psi_1 = V \frac{\partial}{\partial x} Q_1 \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \frac{B}{V} \psi_1 \quad \text{при } \kappa = 0 \quad (5.4)$$

тогда как для невязкой жидкости получается

$$\left(\frac{(V^2 - B^2)}{V} \frac{\partial}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \right) Q_1 = \psi_1 - \frac{B}{V} \varphi_1 = 0 \quad (5.5)$$

или

$$\varphi_1 = \frac{V}{B} \psi_1 \quad \text{при } \nu = 0$$

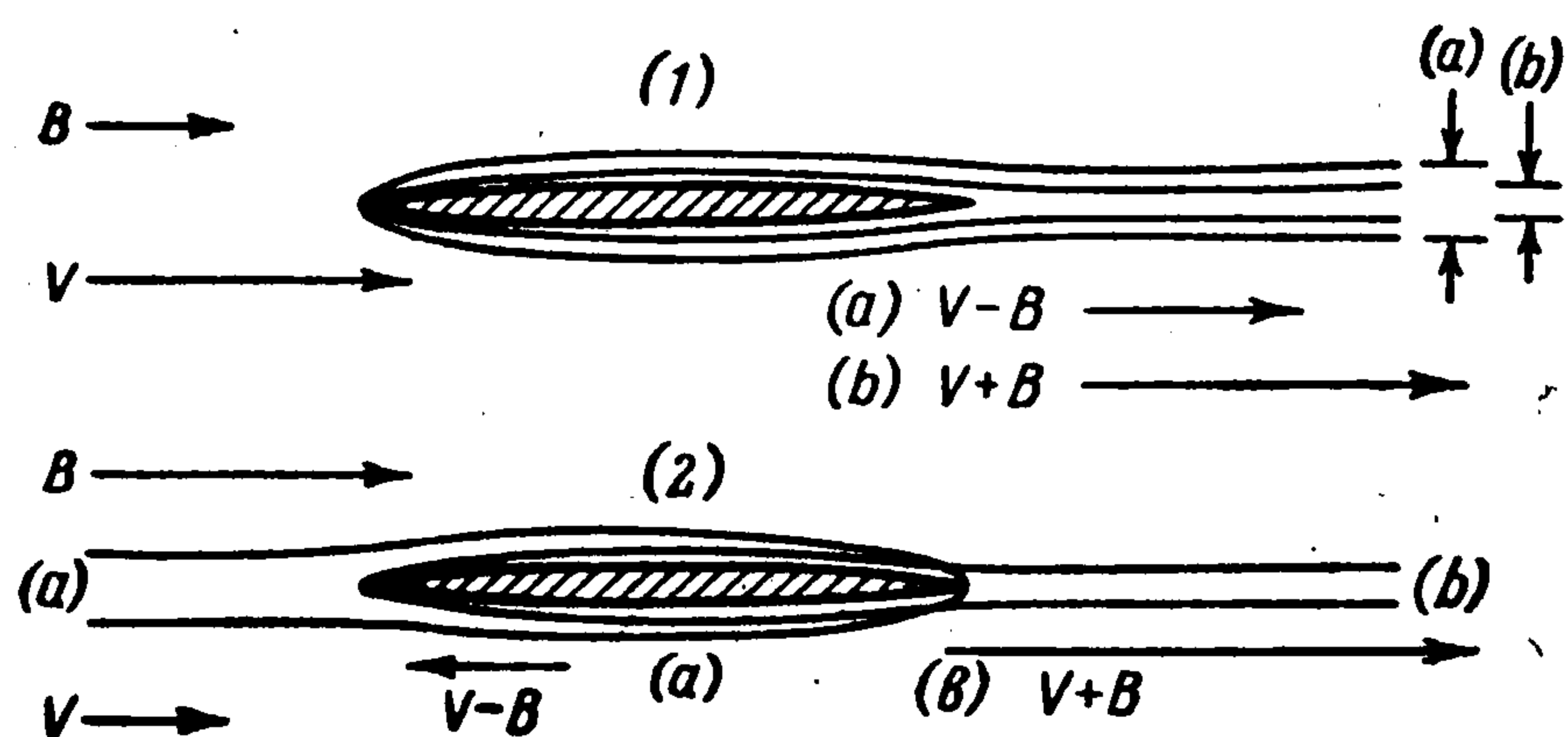
Таким образом, результат состоит в том, что сверхпроводящая жидкость сохраняет плоское подобие $\varphi : \psi = B : V$ в пограничном слое, тогда как в невязкой жидкости это отношение становится обратным внутри пограничного слоя движущихся вихрей.

Исторически обращение направления при $B = V$ было открыто впервые именно для сверхпроводящей жидкости, обладающей одним единственным решением типа пограничного слоя Q_1 с почти регулярным поведением. Именно этот результат показал, что для сильных магнитных полей $B > V$ классическое условие Кутта—Жуковского выглядит совершенно непригодным благодаря наличию идущего вперед следа.

§ 6. Граничные условия. Хотя линеаризация не гарантирует обнаружения элементов, регулирующих подъемную силу, однако надлежащее использование граничных условий при исчезающих отклонениях жидкости от идеальности в большом числе примеров по-прежнему может служить основой для дальнейших исследований в этом направлении. Движение идеальной жидкости само по себе определяет циркуляцию через угол атаки между острыми ведущей и задней кромками, только если V и B имеют различные направления. При полной коллинеарности этих полей циркуляция остается существенно неопределенной.

Для дальнейшего анализа линеаризованных решений задач магнитной гидродинамики обсудим сперва граничные условия для случая неколлинеарных полей скорости и магнитной индукции в равно-диссипирующей жидкости. Фиг. 1 показывает, что верхняя и нижняя поверх-

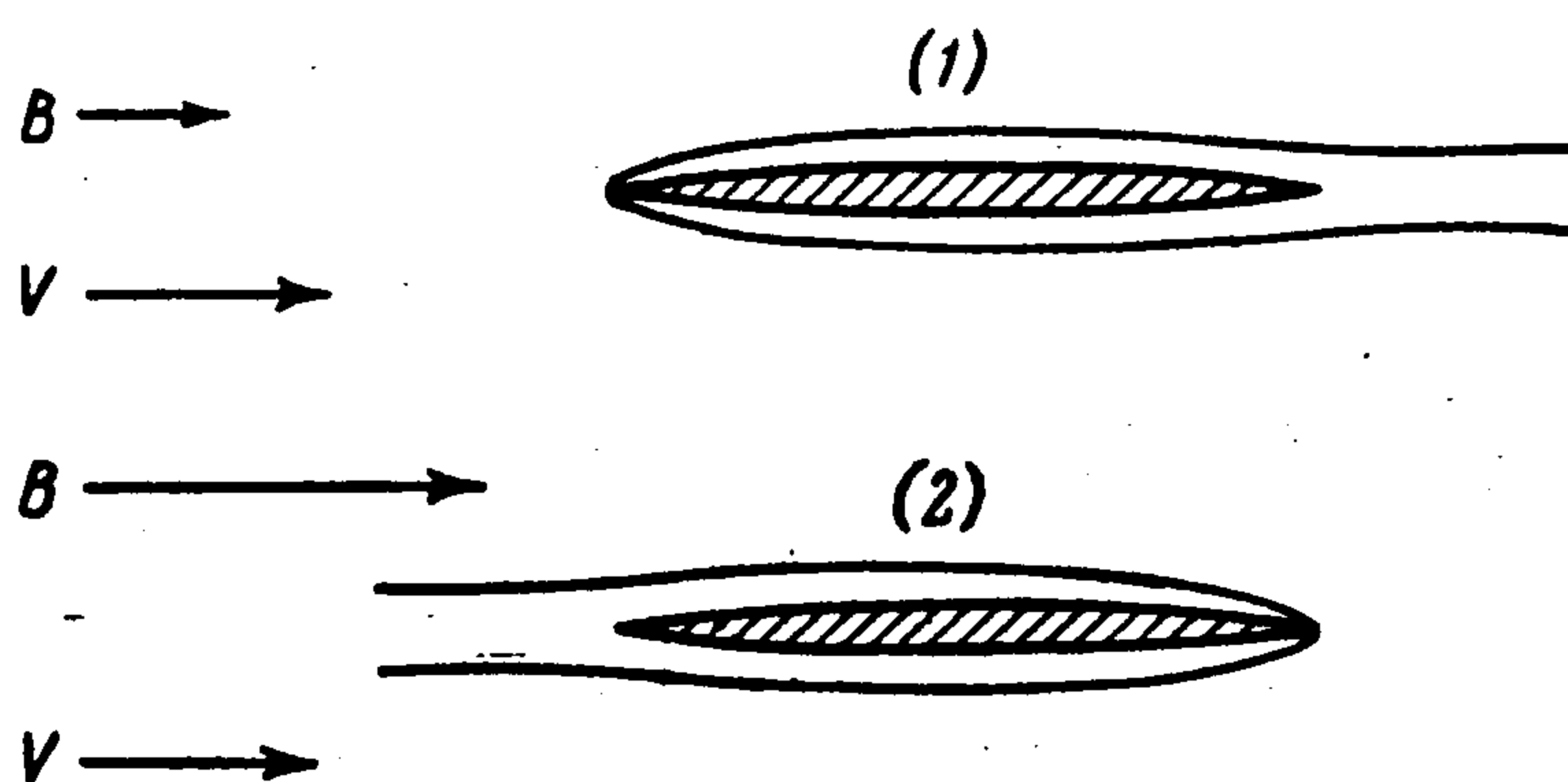
ности обтекаемого тела создают каждая одно семейство вихрей уже в случае идеальной жидкости, в котором можно выбирать нормальную, но не тангенциальную компоненту скорости жидкости на контуре тела. Чтобы задавать тангенциальную компоненту скорости независимо, един-



Фиг. 5

не приносящую какой-либо информации. Однако никогда не следует недооценивать возможностей диффузии. Сильная диффузия может преодолеть любую конвективную скорость, хотя, конечно, при этом будет иметь место сильное затухание вихря. Поэтому, если граница тела требует наличия второго типа вихря, может существовать тонкий вихревой слой второго типа, причем в нем имеет место тангенциальная скорость, отвечающая соответственно $V - B_x$ или $V + B_x$ (фиг. 5).

Часть вихрей, находящихся в пограничном слое, может двигаться вверх по потоку, если $V - B_x$ отрицательно. После схода на задней или даже на передней кромке тела вихри второго типа в конце концов присоединяются к вихрям своего семейства в виде узкой полосы шнуров, добавляемой к ранее рассмотренной полосе (фиг. 4).



Фиг. 6

Возвратимся теперь к случаю коллинеарных полей скорости и магнитной индукции. При этом вихревые полосы течения идеальной жидкости сворачиваются в линию тока, проходящую вдоль границы тела, однако завихренность в пограничном слое и диффузионное расширение краев первоначальных полос все еще остаются (фиг. 6). Равно-диссипирующая жидкость в соответствии с этой фигурой имеет два типа вихрей: (а) с одинаковым направлением вращения вихрей, (б) с противоположным направлением вращения вихрей. Эти вихри имеют различные конвективные скорости $V - B$ и $V + B$. Вихри одного из этих типов, типа (а), если V и B коллинеарны, могут даже при доальфеновских скоростях двигаться к передней кромке тела и далее за нее.

Полуидеальные жидкости утрачивают одно из своих диффузионных свойств, которые обычно делают разрывы невозможными. Поскольку раз-

рывы становятся допустимыми, двойной пограничный слой равнодиссипирующей жидкости превращается в ординарный пограничный слой (фиг. 7) с фазовой скоростью $(V^2 - B^2) / V$. Обращение снова происходит при альфеновской скорости, однако при доальфеновских скоростях только ведущая кромка примыкает к следу. Можно было бы ожидать нестационарного схода вихрей на задней кромке, но этот процесс не фигурирует в факторизованном дифференциальном уравнении для Q .

§ 7. Заключение. Плоское магнитогидродинамическое обтекание профиля рассмотрено методом линеаризации для трех частных значений отношений коэффициентов, характеризующих отклонение жидкости от идеальной за счет вязкости и электрического сопротивления: нуля, единицы и бесконечности. В этих обстоятельствах проблема Кутта — Жуковского о регулировании подъемной силы не может быть выяснена до конца. Если бы это было возможно, то были бы предложены не только обобщенная гипотеза Кутта — Жуковского, но и ее доказательство на основе теории пограничного слоя. В некотором смысле дело здесь снова находится в стадии догадок, и ученые здесь имеют случай рисковать своей репутацией, делая ошибочные предположения. Два результата не подлежат сомнению: движения в случае неколлинеарных поля скоростей и поля магнитной индукции носят сверхзвуковой характер, так что заостренная передняя и задняя кромки регулируют подъемную силу через их угол атаки. Далее, в области сверхальфеновских скоростей для случая коллинеарных полей элементом, регулирующим подъемную силу, является задняя кромка и она должна быть заостренной.

Остающиеся гипотезы касаются того, заостренной или незаостренной должны быть передняя и задняя кромки при доальфеновских скоростях, когда след, или, по крайней мере, половина следа, простирается вперед от тела. Раздавались некоторые голоса [6] в пользу полного обращения всех известных результатов, относящихся к несжимаемому или дозвуковому случаям, и принятия заостренной передней кромки в качестве элемента, регулирующего подъемную силу. Здесь можно добавить только предупреждение: подсасывающая сила на острой задней кромке, поддерживающая отрыв, превращается в сжимающую силу, приводящую к затуплению для реальных материалов с конечной прочностью.

Поступила 2 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Sears W. R. and Resler E. L. Jr. Theory of Thin Airfoils in Fluids of High Electrical Conductivity *J. Fluid Mech.*, Feb. 1959, vol. 5, Part 2,
2. Resler E. L., Jr and McCune J. E. Electromagnetic Interaction with Aerodynamic Flows. *The Magnetohydrodynamics of Conducting Fluids*, Ed. by Daniel Bershader, Stanf. Univ. Press 1959.
3. Carrier G. F. and Greenspan H. P. Magnetohydrodynamic Flow Past a Flat Plate. *The Magnetodynamics of Conducting Fluids*, ed. by Daniel Bershader, Stanf. Univ. Press 1959 and *J. Fluid Mech.*, 1959, vol 5. pp. 77—96.
4. Sears W. R. Studies of an Inviscid Boundary Layer of Magnetohydrodynamics. Tenth Internat. Appl. Mach. Congress, Stresa, Italy 1960.
5. Busemann A. On the Karman Vortex Street in Magnetofluid-Dynamics 80th Anniversary Proceedings, IAS 1962
6. Busemann A. Relations Between Aerodynamics and Magnetohydrodynamics NASA — SP 25 of University Conference Chicago November 1—3, 1962.