Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОВОДИМОСТЬЮ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО КАНАЛУ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. А. Лурье

(Ленинград)

Задача определения токов и электрических полей в слабопроводящей жидкости, движущейся в плоском канале в поперечном магнитном поле, рассматривалась рядом авторов [1–4]; наиболее обстоятельные из этих исследований принадлежат А. Б. Ватажину.

Во всех упомянутых работах расчет полей и токов производился в предположении, что электропроводность жидкости, распределение скорости и внешнее магнитное поле — будем называть их в дальнейшем управлениями — являются так или иначе заданными функциями координат. В тех случаях, когда удавалось получить решение при управлениях, заданных произвольно в определенном классе функций (например, при постоянной проводимости и магнитном поле, а скорости, зависящей только от поперечной координаты), можно было выбрать такие функции из указанных классов, которым соответствовали оптимальные в определенном смысле режимы.

Однако такого рода общие решения можно получить в весьма редких случаях. Между тем, если ставить с самого начала задачу оптимизации (в определенном смысле) распределения токов по отношению к управлениям, выбираемым среди функций некоторого (возможно, достаточно широкого) класса, то для решения ее вообще не потребуется знание распределения токов для произвольного управления в указанном классе[1]. Общий метод решения подобного рода оптимальных задач математической физики был развит в работе [5], где указан прием, позволяющий с самого начала выделить управления, которые только и могут оказаться оптимальными (условие Вейерштрасса). Дальнейшее исследование относится лишь к выбранным управлениям и во многих случаях может быть доведено до конца.

Предлагаемая работа содержит пример приложения развитой в [5] общей теории. Рассматривается задача об отыскании среди кусочно-непрерывных функций двух независимых переменных $\sigma(x, y)$ (проводимость жидкости), удовлетворяющих неравенству $\sigma_{\min} \leqslant \sigma(x, y) \leqslant \sigma_{\max}$, оптимального управления $\sigma(x, y)$, которому соответствует распределение токов и электрического поля, удовлетворяющее известным экстремальным требованиям. Эти требования вместе с условиями задачи подробно сформулированы в п. 1.

Решение задачи оказывается достаточно простым; это связано, разумеется, с тем, что управление $\sigma(x, y)$ входит в исходные уравнения линейно, и в силу этого неравенство, ограничивающее возможные значения $\sigma(x, y)$, играет решающую роль в определении оптимального управления.

1. Распределение тока j и потенциала электрического поля z^1 в проводящей жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{v}(v(x, y), 0, 0)$ в магнитном поле $\mathbf{B}\,(0, 0, -B(x))$, описывается следующими уравнениями [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\left(-\operatorname{grad} z^1 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}, \mathbf{B}]\right) \tag{1.1}$$

Здесь σ — электропроводность жидкости.

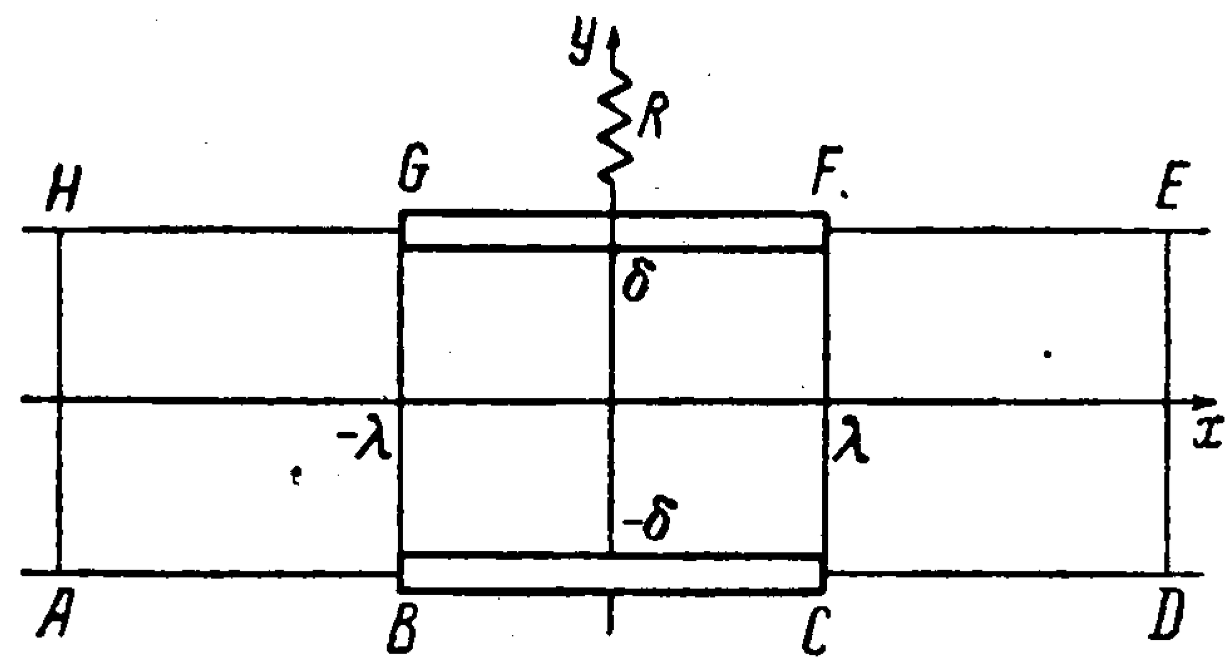
[1] Если такое решение все-таки известно, то разыскание оптимальных управлений соответствующим образом упрощается: задача Майера—Больца вариационного исчисления сводится к простейшей задаче. При этом, разумеется, не требуется никакой специальной методики для определения оптимального управления.

Функции $v(y)$ и $B(x)$ будем считать заданными; как известно, этому соответствует часто используемое в магнитной гидродинамике приближение малых магнитных чисел Рейнольдса, когда распределение скоростей практически совпадает с гидродинамическим, а индуцированные магнитные поля пренебрежимо малы[1].

Что касается функции $\sigma(x, y)$, то значение ее в любой точке потока определяется имеющимися в нашем распоряжении возможностями управления проводимостью жидкости. Как правило, эти возможности ограничены, и в лучшем случае удается добиться некоторого максимального значения проводимости $\sigma_{\max}$. С другой стороны, собственная проводимость жидкости (при отсутствии внешних воздействий — нагрева[2], присадок и т. д.) определяет минимальное возможное значение $\sigma_{\min}$. Таким образом, можно считать, что проводимость во всех случаях удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{\min} \leqslant \sigma(x, y) \leqslant \sigma_{\max} \tag{1.2}$$

Это неравенство весьма существенно для дальнейшего.



Фиг. 1

Если ввести обозначения

$$\mathbf{j} = -\operatorname{rot}(\mathbf{k}z^2), \quad j_x = \zeta^1, \quad j_y = \zeta^2, \quad \rho = 1/\sigma \tag{1.3}$$

то уравнения (1.1) и неравенство (1.2) запишутся в следующей форме

$$\begin{gathered}
\frac{\partial z^1}{\partial x} = -\rho\zeta^1, \qquad \frac{\partial z^1}{\partial y} = -\rho\zeta^2 + \frac{vB}{c}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{vB}{c} - \rho\zeta^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\rho\zeta^1 = 0 \\
\frac{\partial z^2}{\partial x} = \zeta^2, \qquad \frac{\partial z^2}{\partial y} = -\zeta^1, \qquad \frac{\partial \zeta^1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial y} = 0
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\rho_{\min} \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho_{\max}$$

Граничные условия задачи могут быть самыми разнообразными. Рассмотрим случай, когда стенки $y = \pm\delta$ канала (фиг. 1) повсюду изолирующие за исключением участков $|x| < \lambda$, расположенных на обеих стенках один против другого и представляющих собой идеально проводящие электроды [1]. Последние соединены нагрузкой R, через которую при движении жидкости в магнитном поле протекает электрический ток

$$I = \int_{-\lambda}^{\lambda} \zeta^2(x, \pm\delta)\, dx \tag{1.5}$$

Приведем еще выражение для величины джоулевых потерь

$$Q = \int_{-\delta}^{\delta} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2]\, \rho(x, y) \tag{1.6}$$

---

[1] Функции $v(y)$ и $B(x)$ фиксируются только для упрощения оптимальной задачи. Можно, разумеется, оптимизировать распределение токов и по отношению к этим управлениям.

[2] Температурным изменением проводимости вследствие джоулева нагрева пренебрегаем.

Для схемы, показанной на фиг. 1, будет решена задача об управлении проводимостью жидкости таким образом, чтобы (задача *1*) функционал I достигал максимального, либо (задача *2*) функционал Q — минимального возможного значения.

Граничные условия для поставленных задач будут выписаны в п. 4.

2. Уравнения для множителей Лагранжа. *Задача 1*. Согласно [5]

$$H^{(1)} = -\xi_1\rho\zeta^1 + \xi_2\zeta^2 + \eta_1\left(\frac{vB}{c_1^2} - \rho\zeta^2\right) - \eta_2\zeta^1 - \\ - \Gamma^*\left[(\rho_{\max} - \rho)(\rho - \rho_{\min}) - \rho_*^2\right] \tag{2.1}$$

Здесь ρ_* — дополнительное управление; ξ_i, η_i, Γ^* — множители Лагранжа [1]. Условия стационарности сводятся к следующим уравнениям

$$\begin{gathered} \partial\xi_1 / \partial x + \partial\eta_1 / \partial y = 0, \qquad \partial\xi_2 / \partial x + \partial\eta_2 / \partial y = 0 \\ \rho\xi_1 + \eta_2 = 0, \qquad \rho\eta_1 - \xi_2 = 0 \\ \zeta^1\xi_1 + \zeta^2\eta_1 - \Gamma^*(2\rho - \rho_{\max} - \rho_{\min}) = 0, \qquad \Gamma^*\rho_* = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Дополнительное управление ρ_* введено уравнением

$$(\rho_{\max} - \rho)(\rho - \rho_{\min}) - \rho_*^2 = 0 \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) удобно преобразовать к другой форме: введем функции $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ соотношениями (2.4)

$$\xi_1 = -\partial\omega_1 / \partial y, \qquad \xi_2 = -\partial\omega_2 / \partial y, \qquad \eta_1 = \partial\omega_1 / \partial x, \qquad \eta_2 = \partial\omega_2 / \partial x$$

Первая пара уравнений (2.2) тождественно удовлетворяется; вторая пара записывается теперь так

$$\rho\partial\omega_1 / \partial y = \partial\omega_2 / \partial x, \qquad \rho\partial\omega_1 / \partial x = -\partial\omega_2 / \partial y \tag{2.5}$$

Исключая ω_2 и ω_1, последовательно находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega_2}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

Задача 2. Функция H равна

$$H^{(2)} = H^{(1)} - \rho\left[(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2\right] \tag{2.7}$$

Уравнения для множителей Лагранжа имеют вид

$$\begin{gathered} \partial\xi_1 / \partial x + \partial\eta_1 / \partial y = 0, \qquad \partial\xi_2 / \partial x + \partial\eta_2 / \partial y = 0 \\ \rho\xi_1 + \eta_2 + 2\rho\zeta^1 = 0, \qquad \rho\eta_1 - \xi_2 + 2\rho\zeta^2 = 0 \\ \zeta^1\xi_1 + \zeta^2\eta_1 - \Gamma^*(2\rho - \rho_{\max} - \rho_{\min}) + (\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 = 0, \qquad \Gamma^*\rho_* = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Введем функции $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ по формулам (2.4). Вторая пара уравнений (2.8) запишется теперь в следующей форме

$$-\rho\frac{\partial\omega_1}{\partial y} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x} + 2\rho\zeta^1 = 0, \qquad \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + 2\rho\zeta^2 = 0 \tag{2.9}$$

---

[1] В этой работе употребляются обозначения $\xi_i, \ldots$ для величин, обозначенных в [5] через $\xi_i \div \varphi_{iy}, \ldots$.

или, если учесть уравнения (1.4) (вторая строка),

$$\rho \frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 + 2z^2) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = 0, \qquad \rho \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 + 2z^2) + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

Если исключить ω_2 и ω_1 из уравнений (2.9), то, учитывая последнее уравнение во второй строке (1.4), последовательно найдем

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = -\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial x}(vB), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \tag{2.11}$$

Граничные условия для функций ω_1, ω_2 имеют различный вид для различных исходных краевых задач; эти условия будут выписаны в п. 4.

3. Условие Вейерштрасса. *Задача 1.* Согласно условию Вейерштрасса разность

$$\Delta H^{(1)} = H^{(1)}(\rho, \zeta^1, \zeta^2) - H^{(1)}(\mathrm{P}, Z^1, Z^2) = -\xi_1(\rho\zeta^1 - \mathrm{P}Z^1) + \\ + \xi_2(\zeta^2 - Z^2) - \eta_1(\rho\zeta^2 - \mathrm{P}Z^2) - \eta_2(\zeta^1 - Z^1) \tag{3.1}$$

должна быть неотрицательна при всех допустимых P, Z^1, Z^2; допустимыми будут такие значения этих переменных, которые связаны с оптимальными значениями ρ, ζ^1, ζ^2 уравнениями

$$(\rho\zeta^1 - \mathrm{P}Z^1)x_t + (\rho\zeta^2 - \mathrm{P}Z^2)y_t = 0, \quad (\zeta^2 - Z^2)x_t - (\zeta^1 - Z^1)y_t = 0 \tag{3.2}$$

Здесь x_t, y_t — любые вещественные числа, удовлетворяющие условию $x_t^2 + y_t^2 = 1$ и имеющие смысл направляющих косинусов касательной к кривой возможного разрыва проводимости. Равенства (3.2) выражают непрерывность функций z^1, z^2 на этой кривой.

Подчеркнем, что управления ρ и P удовлетворяют последнему неравенству (1.4).

Система (3.2) позволяет исключить переменные Z^1 и Z^2 из выражения (3.1); после введения функций ω_1, ω_2 и вектора $\mathbf{j}(\zeta^1, \zeta^2)$ условие Вейерштрасса примет вид (выкладки опускаем)

$$\Delta H^{(1)} = -\frac{\rho - \mathrm{P}}{\mathrm{P}}\left(\frac{\rho - \mathrm{P}}{\rho} j_n \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \mathbf{j}\cdot \operatorname{grad}\omega_2\right) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Через $\mathbf{n}$ обозначено направление с направляющими косинусами $(y_t, -x_t)$; неравенство (3.3) должно выполняться при произвольном $\mathbf{n}$.

Структура левой части последнего неравенства показывает, что возможны следующие два случая:

$$1) \quad s = \frac{\rho - \mathrm{P}}{\rho} > 0, \qquad A = s j_n \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}\omega_2 \leqslant 0$$

$$2) \quad s = \frac{\rho - \mathrm{P}}{\rho} < 0, \qquad A = s j_n \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}\omega_2 \geqslant 0$$

Случай 1. Прежде всего заметим, что из неравенства $s > 0$ и последнего неравенства (1.4) следует, что $\rho = \rho_{\max}$. При $\rho = \rho_{\max}$ параметр s изменяется в пределах

$$0 \leqslant s \leqslant 1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} = s_{\max} \leqslant 1 \tag{3.4}$$

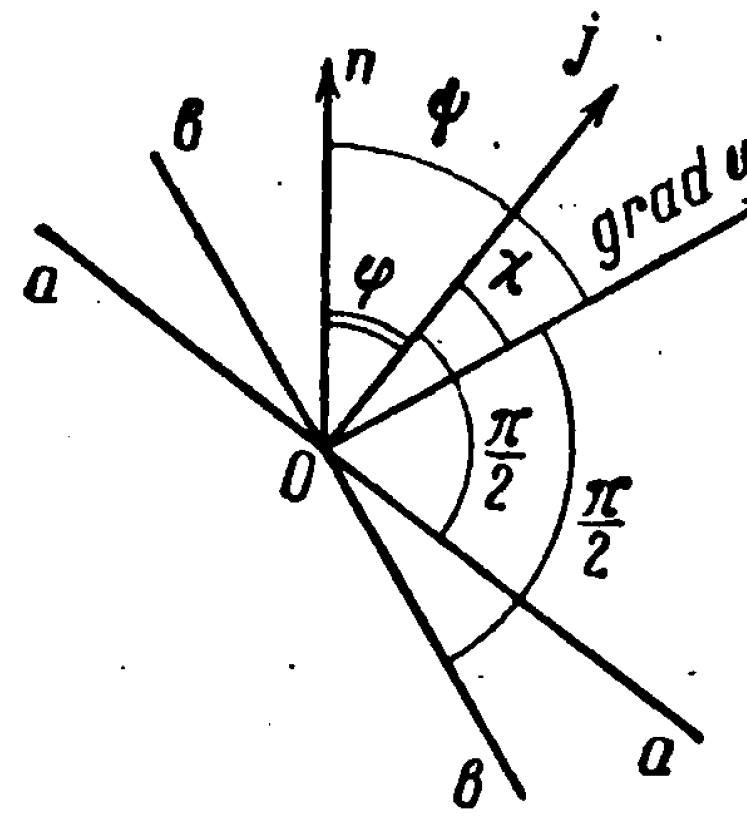
Предположим, что $\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}\omega_2 < 0$. Ясно, что при этом условие $A \leqslant 0$ не выполняется, так как всегда найдется направление $\mathbf{n}$, для которого

$j_n \partial\omega_2 / \partial n = 0$. Остается случай $\mathbf{j} \cdot \mathrm{grad}\, \omega_2 > 0$. Если направление $\mathbf{n}$ располагается в углах aob (фиг. 2), ограниченных прямыми, перпендикулярными к векторам $\mathbf{j}$ и $\mathrm{grad}\, \omega_2$, то $j_n \partial\omega_2 / \partial n < 0$, и неравенство $A \leqslant 0$ выполняется. Если $\mathbf{n}$ расположено вне углов aob, то необходимо найти максимум функции

$$f(\varphi, \psi) = s_{\max} j_n \frac{\partial\omega_2}{\partial n} = s_{\max} j \,|\mathrm{grad}\, \omega_2| \cos\varphi \cos\psi$$

при условиях (см. фиг. 2) $\psi = \chi + \varphi$, $\chi = \mathrm{const}$, и потребовать, чтобы соответствующее значение A было неположительно. Легко проверить, что функция $f(\varphi, \chi + \varphi)$ достигает максимума при $\varphi = -{}^1/_2\chi$, т. е. для направления $\mathbf{n}$, делящего пополам острый угол χ. Для этого направления

$$f_{\max} = f(-{}^1/_2\chi, {}^1/_2\chi) = s_{\max} j \,|\mathrm{grad}\, \omega_2| \cos^2 ({}^1/_2\chi)$$



Фиг. 2

Соответствующее значение A равно

$$A_{\max} = j \,|\mathrm{grad}\, \omega_2| \,[s_{\max} \cos^2 ({}^1/_2\chi) - \cos\chi]$$

Согласно сказанному выше, должны иметь

$$s_{\max} \cos^2 ({}^1/_2\chi) - \cos\chi \leqslant 0$$

или

$$(s_{\max} - 2) \cos^2 ({}^1/_2\chi) + 1 \leqslant 0$$

Отсюда

$$\chi \leqslant 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{2 - s_{\max}}} \qquad (3.5)$$

Вспомним, что при $\mathbf{j} \cdot \mathrm{grad}\, \omega_2 > 0$ $|\chi| \leqslant \pi / 2$. Если принять во внимание неравенства (3.4), то станет ясно, что в рассматриваемом случае условие (3.5) ограничивает сверху абсолютную величину острого угла χ между векторами $\mathbf{j}$ и $\mathrm{grad}\, \omega_2$. Величина верхнего предела зависит от $s_{\max}$: этот предел равен ${}^1/_2\pi$ при $s_{\max} = 0$ ($\rho_{\min} = \rho_{\max}$) и нулю при $s_{\max} = 1$ ($\rho_{\min} = 0$ или $\rho_{\max} = \infty$).

Случай 2. Рассуждения, совершенно аналогичные изложенным выше, приведут нас к неравенству (фиг. 3)

$$\chi \geqslant 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{2 - s_{\min}}} \qquad (3.6)$$

выполняющемуся при условии

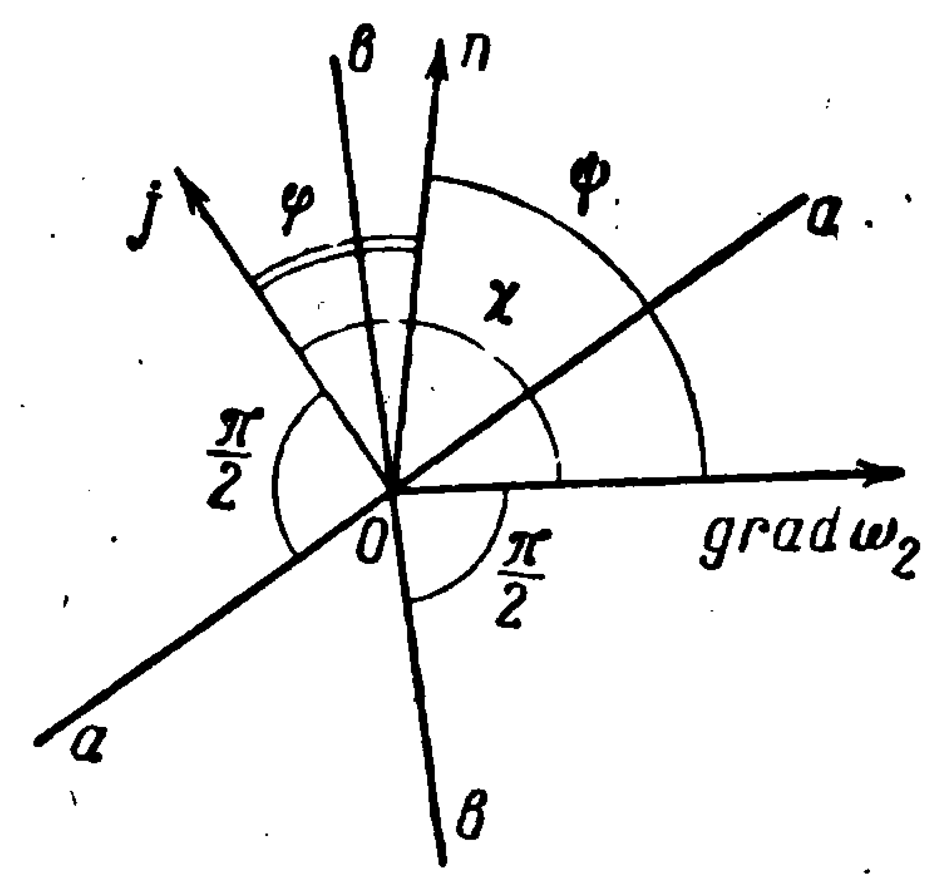
$$\mathbf{j} \cdot \mathrm{grad}\, \omega_2 < 0.$$

Параметр $s_{\min}$ определен формулой

$$s_{\min} = 1 - \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}$$

и в случае 2

$$s_{\min} \leqslant s \leqslant 0$$



Фиг. 3

Как видим, неравенство (3.6) ограничивает снизу абсолютное значение тупого угла χ между $\mathbf{j}$ и $\mathrm{grad}\, \omega_2$. Величина нижнего предела зависит от значения $s_{\min}$: этот предел равен $\pi / 2$ при $s_{\min} = 0$ ($\rho_{\min} = \rho_{\max}$) и π при $s_{\min} = -\infty$ ($\rho_{\min} = 0$ или $\rho_{\max} = \infty$).

Одновременно устанавливаем, что условие $A = 0$ может соблюдаться (если отвлечься от исключительных случаев $\mathbf{j} = 0$ или $\operatorname{grad} \omega_2 = 0$) только на отдельных кривых, а не в целых областях: это следует из определения величины A, содержащей неинвариантное слагаемое $sj_n \partial\omega_2 / \partial n$.

Кроме того, скалярное произведение $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2$ в оптимальном режиме не может обратиться в нуль (за исключением упомянутых выше случаев), так как в противном случае, очевидно, нарушилось бы условие Вейерштрасса.

Результаты изложенного резюмируем следующим образом.

Теорема. Максимум функционала I при ограничениях (1.4) может быть достигнут при следующих оптимальных управлениях: (3.7)

$$1)\quad \rho = \rho_{\max} \quad \text{при } \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 > 0, \ \chi \leqslant \arccos p$$

$$2)\quad \rho = \rho_{\min} \quad \text{при } \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 < 0, \ \chi \geqslant \pi - \arccos p$$

Параметр p определяется формулой

$$p = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\rho_{\max} + \rho_{\min}}$$

Задача 2. Согласно условию Вейерштрасса, разность

$$\Delta H^{(2)} = \Delta H^{(1)} - \rho \left[(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2\right] + \mathrm{P} \left[(Z^1)^2 + (Z^2)^2\right] \tag{3.8}$$

должна быть неотрицательна.

Повторив рассуждения, проведенные выше для задачи *1*, напишем сразу аналог неравенства (3.3); будем иметь

$$\Delta H^{(2)} = -\frac{(\rho - \mathrm{P})^2}{\mathrm{P}\rho} j_n \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \frac{(\rho - \mathrm{P})^2}{\mathrm{P}} j_n^2 + \frac{\rho - \mathrm{P}}{\mathrm{P}} \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 + \frac{\rho - \mathrm{P}}{\rho} \rho j^2 \geqslant 0 \tag{3.9}$$

Как и ранее, возможны два случая:

$$1)\quad s = \frac{\rho - \mathrm{P}}{\rho} > 0, \qquad A^\circ = sj_n \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 + s\rho j_n^2 - \rho j^2 \leqslant 0$$

$$2)\quad s = \frac{\rho - \mathrm{P}}{\rho} < 0, \qquad A^\circ = sj_n \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 + s\rho j_n^2 - \rho j^2 \geqslant 0$$

Введем вектор $\boldsymbol{\mu} = \operatorname{grad} \omega_2 + \rho \mathbf{j}$. Нетрудно видеть, что величина A° зависит от $\boldsymbol{\mu}$ точно так же, как величина A от $\operatorname{grad} \omega_2$. Поэтому в обоих отмеченных случаях приходим к тем же выводам относительно оптимальных управлений, что были получены для задачи *1* и сформулированы в теореме. Единственное различие заключается в том, что в формулах теоремы следует заметить вектор $\operatorname{grad} \omega_2$ на $\boldsymbol{\mu}$, а углу χ придать смысл угла между векторами $\mathbf{j}$ и $\boldsymbol{\mu} = \operatorname{grad} \omega_2 + \rho \mathbf{j}$. Последний угол, согласно теореме, может быть либо острым (случай *1*), либо тупым (случай *2*); этого, однако, нельзя сказать теперь об угле между векторами $\mathbf{j}$ и $\operatorname{grad} \omega_2$, который может быть тупым как в случае *1*, так и в случае *2* (но острым лишь в случае *1*). Указанное обстоятельство в определенных условиях может привести к неединственности оптимальных режимов, определяемых условием Вейерштрасса (см. п. 4). Ясно, что в этом нет ничего парадоксального, так как условие Вейерштрасса само по себе является необходимым условием сильного относительного минимума; абсолютный минимум в рамках используемого метода приходится определять прямым подсчетом значений функционала в относительных минимумах и сравнением этих значений между собой.

4. *Пример*. Однородное магнитное поле B; скорость зависит только от координаты y (решение задачи для случая постоянной проводимости получено А. Б. Ватажиным [1]).

Схема устройства показана на фиг. 1; граничные условия, выражающие постоянство потенциала z^1 на электродах, и исчезновение нормальной компоненты плотности тока ζ^2 на изоляторах, а также условие на бесконечности и закон Ома для электрической цепи имеют вид

$$z^1(x, \pm\delta) = z_\pm^1 = \text{const}, \qquad |x| < \lambda$$

$$z^2(x, \pm\delta)\,|_{x>\lambda} = z_+^2 = \text{const}, \qquad z^2(x, \pm\delta)\,|_{x<-\lambda} = z_-^2 = \text{const}$$

$$z^1(\infty, +\delta) - z^1(\infty, -\delta) = z^1(-\infty, +\delta) - z^1(-\infty, -\delta) = \frac{1}{c} B \int_{-\delta}^{\delta} v dy = \varepsilon\,,$$

$$z^2(\infty, \pm\delta) - z^2(-\infty, \pm\delta) = R^{-1}[z_+^1 - z_-^1] \qquad (4.1)$$

Задача 1. Учитывая уравнения (2.2), напишем следующее выражение для первой вариации функционала I, составленное при помощи множителей Лагранжа [5] (см. фиг. 1)

$$\Big(\int_E^F + \int_G^H\Big)[\eta_1\delta z^1 + \eta_2\delta z^2]\,dt - \Big(\int_A^B + \int_C^D\Big)[\eta_1\delta z^1 + \eta_2\delta z^2]\,dt +$$

$$+ \int_F^G [\eta_1\delta z^1 + \eta_2\delta z^2]\,dt - \int_B^C [\eta_1\delta z^1 + \eta_2\delta z^2]\,dt - \int_H^A [\xi_1\delta z^1 + \xi_2\delta z^2]\,dt +$$

$$+ \int_D^E [\xi_1\delta z^1 + \xi_2\delta z^2]\,dt - \delta z_+^2 + \delta z_-^2 \qquad (4.2)$$

Приравнивая это выражение нулю, получим краевые условия для множителей Лагранжа; при этом нужно учесть, что входящие сюда вариации связаны соотношениями, получающимися путем варьирования равенств (4.1). Кроме того, вертикальные отрезки HA, DE (фиг. 1) следует удалить в бесконечность. Будем иметь:

на электродах (FG и BC)

$$\eta_2 = 0 \qquad (4.3)$$

на изоляторах (EF, GH, AB, CD)

$$\eta_1 = 0 \qquad (4.4)$$

на бесконечности

$$\int_H^A \xi_1\,dt = \int_D^E \xi_1\,dt = 0, \qquad \int_H^A \xi_2\,dt = \int_D^E \xi_2\,dt = 0 \qquad (4.5)$$

Оставшиеся в (4.2) слагаемые образуют равенство

$$\left[\int_E^F \eta_2\,dt - \int_C^D \eta_2\,dt - 1\right]\delta z_+^2 + \left[\int_G^H \eta_2\,dt - \int_A^B \eta_2\,dt + 1\right]\delta z_-^2 + $$
$$+ \int_F^G \eta_1\,dt\,\delta z_+^1 - \int_B^C \eta_1\,dt\,\delta z_-^2 = 0 \qquad (4.6)$$

Входящие сюда вариации связаны соотношением

$$\delta z_+^1 - \delta z_-^1 = R\,[\delta z_+^2 - \delta z_-^2]$$

Исключая с его помощью вариацию δz_+^1 из (4.6), придем к соотношению, в котором уже можно считать вариации независимыми и приравнять нулю соответствующие коэффициенты. Получаем

$$\int_F^G \eta_1\,dt = \int_B^C \eta_1\,dt$$

$$\int_E^F \eta_2\,dt - \int_C^D \eta_2\,dt - 1 = -R\int_F^G \eta_1\,dt$$

$$\int_G^H \eta_2\,dt - \int_A^B \eta_2\,dt + 1 = R\int_F^G \eta_1\,dt \qquad (4.7)$$

Запишем полученные условия при помощи введенных выше функций ω_1, ω_2. Будем иметь:

на электродах

$$\omega_2(x, \pm\delta) = \omega_{2\pm} = \mathrm{const}, \qquad \partial\omega_1/\partial y = 0 \qquad (4.8)$$

на изоляторах

$$\omega_1(x, \pm\delta)\big|_{x>\lambda} = \omega_{1+} = \mathrm{const}, \quad \omega_1(x, \pm\delta)\big|_{x<-\lambda} = \omega_{1-} = \mathrm{const}$$
$$\partial\omega_2/\partial y = 0 \qquad (4.9)$$

на бесконечности

$$\begin{array}{ll} \omega_1(\infty, \delta) = \omega_1(\infty, -\delta), & \omega_1(-\infty, \delta) = \omega_1(-\infty, -\delta) \\ \omega_2(\infty, \delta) = \omega_2(\infty, -\delta), & \omega_2(-\infty, \delta) = \omega_2(-\infty, -\delta) \end{array} \qquad (4.10)$$

Кроме того,

$$\omega_{2+} - \omega_{2-} + 1 = R\,[\omega_{1+} - \omega_{1-}] \qquad (4.11)$$

Если теперь ввести функцию u, связанную с z^1 соотношением

$$u = z^1 - \frac{B}{c}\int_0^y v\,dy \qquad (4.12)$$

то уравнения (1.4) перепишутся в эквивалентной форме

$$\frac{\partial z^2}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4.13)$$

а вектор $\mathbf{j}$ будет равен

$$\mathbf{j} = -\rho^{-1}\,\mathrm{grad}\,u \qquad (4.14)$$

Уравнения (4.13) совпадут с уравнениями (2.5), если в этих последних заменить ω_2 на u, а ω_1 на z^2. Сравнение краевых условий (4.1) и (4.8) — (4.11) показывает, что при любой функции $\rho(x, y)$ имеют место соотношения

$$z^2 = \varepsilon\omega_1, \qquad u = \varepsilon\omega_2 \tag{4.15}$$

Формулы (4.14) и (4.15) показывают, что векторы $\mathbf{j}$ и grad ω_2 повсюду антипараллельны ($\chi = \pi$); вспоминая критерий Вейерштрасса для задачи *1* (теорема), заключаем, что в оптимальном режиме повсюду $\rho = \rho_{\min}$ — результат, вполне согласующийся с соображениями физического характера.

Отметим, что, пользуясь решением [1], также пришли бы к этому заключению, но максимум функционала I был бы подтвержден по отношению к классу функций сравнения, повсюду принимающих одно и то же постоянное значение, тогда как результат, полученный по общему методу [5], относится к более широкому классу кусочно-непрерывных функций двух независимых переменных. В этом последнем классе общего решения задачи получить не удается.

Задача 2. В этой задаче сохраняются краевые условия (4.8) — (4.10) для множителей Лагранжа; вместо условия (4.11) соблюдается равенство

$$\omega_{2+} - \omega_{2-} + 2IR = R\,[(\omega_{1+} + 2z_+^2) - (\omega_{1-} + 2z_-^2)] \tag{4.10}$$

Как и ранее, находим, что функции u (см. (4.12)) и ω_2 связаны ревенством

$$u = \frac{\varepsilon}{2IR}\omega_2$$

Критерий Вейерштрасса принимает теперь следующую форму

$$\Delta H^{(2)} = \frac{\rho - P}{P}\rho\left(\frac{2IR}{\varepsilon} - 1\right)\left[\frac{\rho - P}{\rho}j_n^2 - j^2\right] \geqslant 0$$

Отсюда нетрудно заключить о возможности следующих оптимальных режимов:

1) $2IR/\varepsilon < 1, \quad \rho = \rho_{\max}$

2) $2IR/\varepsilon > 1, \quad \rho = \rho_{\min}$

3) $2IR/\varepsilon = 1$, Особый случай

При $\rho = \mathrm{const}$ выражение $2IR/\varepsilon$ легко вычислить; оно равно [1]

$$\frac{2IR}{\varepsilon} = \frac{2R\alpha}{2\rho + R\alpha}$$

параметр α задается соотношением

$$\alpha = \left[\frac{K(k)}{K(k')}\right]^{-1}, \qquad k = \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{\delta}\right), \qquad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Неравенства, относящиеся к режимам *1* и *2*, принимают соответственно вид

$$R < 2\rho_{\max}/\alpha, \qquad R > 2\rho_{\min}/\alpha$$

Отсюда следует, что при $R < 2\rho_{min}/\alpha$ возможно лишь управление $\rho = \rho_{max}$; при $R > 2\rho_{max}/\alpha$ — лишь управление $\rho = \rho_{min}$. Если параметр R заключен в интервале $(2\rho_{min}/\alpha,\ 2\rho_{max}/\alpha)$, то условие Вейерштрасса допускает оба управления ρ_{max} и ρ_{min}. Подобная возможность уже обсуждалась в конце п. 3; остается указать критерий для определения абсолютного минимума. Легко проверить, пользуясь выражением [1] для функции Q при $\rho = \mathrm{const}$

$$Q = \frac{\varepsilon^2}{[2(\rho/\alpha) + R]^2}\,\frac{2\rho}{\alpha}$$

что абсолютный минимум достигается при:

$$\rho = \rho_{max}, \quad \text{если } 2\alpha^{-1}\rho_{min} < R < 2\alpha^{-1}\sqrt{\rho_{max}\rho_{min}}$$

$$\rho = \rho_{min}, \quad \text{если } 2\alpha^{-1}\sqrt{\rho_{max}\rho_{min}} < R < 2\alpha^{-1}\rho_{max}$$

Что касается особого режима, то его следует отбросить, так как уже по отношению к классу функций сравнения, повсюду принимающих постоянное значение, этот режим соответствует максимуму, а не минимуму функционала I, что подтверждается непосредственным вычислением. Критерий Вейерштрасса выполняется в этом случае в слабом смысле.

Отметим в заключение, что все выводы, сделанные для задачи *2*, можно было бы получить из соответствующих утверждений для задачи *1* при помощи равенства

$$Q = I\varepsilon - I^2 R$$

справедливого в случае однородного магнитного поля B.

Здесь результаты получены непосредственно для иллюстрации технических приемов, характерных для приложений общего метода [5].

Поступила 25 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Boucher R. A., Ames D. B. End effect losses in dc. magnetohydrodynamic generators. J. Appl. Phys, v. 32, No 5.
3. Ватажин А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
5. Лурье К. А. Задача Майера — Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.