

ОБ ОБЩИХ УРАВНЕНИЯХ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

В. Д. Андреев

(Москва)

Выводятся и исследуются уравнения идеального (невозмущенного) и возмущенного функционирования обобщенной системы инерциальной навигации, осуществляющей определение координат движущегося объекта по показаниям трех ньютонометров и трех измерителей абсолютной угловой скорости, установленных по осям ортогонального триэдра, начало которого совмещено с некоторой точкой движущегося объекта.

В отличие от [1, 2], ориентация осей триэдра произвольна.

Уравнения идеальной работы учитывают нецентральность поля тяготения Земли, уравнения возмущенной работы — основные инструментальные погрешности.

Уравнения ошибки выводятся и исследуются не только для малых, но и конечных величин переменных возмущенного режима.

Как частные случаи получаются уравнения и результаты исследования частных схем, рассмотренных в работах [1-7].

1. Введем правые ортогональные системы координат: $O_2\xi\eta\zeta$, $O_1\xi\eta\zeta$.

Система координат $O_2\xi\eta\zeta$ является инерциальной системой, для которой по определению справедливы законы динамики Ньютона. Выбор положения точки O_2 и ориентации осей $\xi\eta\zeta$ не подчинены каким-либо другим условиям. Начало системы $O_1\xi\eta\zeta$ совмещено с центром Земли. Ориентация осей системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ неизменна по отношению к инерциальной. Не уменьшая общности, можно считать их ориентацию одинаковой.

Введем также системы координат $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ с началом в некоторой точке O движущегося объекта (не обязательно в центре масс). Ориентация осей системы координат $O\xi\eta\zeta$ совпадает с ориентацией соответствующих осей систем $O_2\xi\eta\zeta$, $O_1\xi\eta\zeta$. Ориентация осей системы координат $Oxyz$ произвольна.

Наконец, введем систему координат O_1xyz , начало которой совмещено с центром Земли, а ориентация осей одинакова с трехгранником $Oxyz$.

Задачей, которую должна решать инерциальная система, будем считать определение декартовых координат ξ , η , ζ точки O объекта в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$ и параметров, определяющих ориентацию объекта относительно осей $\xi\eta\zeta$.

Пусть вдоль ребер трехгранника $Oxyz$ установлены три ньютонометра и три измерителя проекций абсолютной угловой скорости вращения трехгранника $Oxyz$ на его оси.

Обозначим показания ньютонометров через n_x , n_y , n_z , измерителей проекций абсолютной угловой скорости — через m_x , m_y , m_z и введем векторы

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{x} + n_y \mathbf{y} + n_z \mathbf{z}, \quad \mathbf{m} = m_x \mathbf{x} + m_y \mathbf{y} + m_z \mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} \quad (1.1)$$

где ω — абсолютная угловая скорость трехгранника $Oxyz$, а x, y, z — единичные векторы соответствующих осей.

Определим n , полагая чувствительные массы ньютометров единичными, точечными и помещенными в точке O .

Если r_{02} — радиус-вектор точки O в инерциальной системе координат, то условие относительного равновесия чувствительной массы ньютометра имеет вид

$$d^2r_{02}/dt^2 = F(r_{02}) + f \quad (1.2)$$

где $F(r_{02})$ — геометрическая сумма сил притяжения чувствительных масс ньютометров всей совокупностью небесных тел, а f — сумма сил, действующих на чувствительные массы со стороны их подвесов.

В ньютометре чувствительная масса находится обычно в упругом подвесе [1,2]; величина упругой деформации подвеса, пропорциональная силе f , и является показанием ньютометра¹. Поэтому, полагая коэффициент пропорциональности равным единице, имеем

$$n = d^2r_{02}/dt^2 - F(r_{02}) \quad (1.3)$$

Заметим, что дифференцирование в формуле (1.3) проведено в системе координат $O_2\xi\eta\zeta$.

Если обозначить через r радиус-вектор точки O относительно точки O_1 , а через r_{01} — радиус-вектор точки O_1 относительно точки O_2 , то из (1.3), принимая во внимание, что

$$r_{02} = r + r_{01}, \quad d^2r_{01}/dt^2 = F(r_{01}) \quad (1.4)$$

и вводя для силы притяжения Землей единичной массы, помещенной в точке O , специальное обозначение $g(r)$, получаем

$$n = d^2r/dt^2 - g(r) + F_1(0) - F_1(r) \quad (1.5)$$

В (1.5) $F_1(r)$ определяется теперь полем тяготения в точке O совокупности небесных тел за вычетом Земли.

Будем считать пока, что движение объекта (точки O) происходит на небольшом удалении от поверхности Земли (сравнимом, например, с ее радиусом). Тогда разность

$$F_1(0) - F_1(r) \quad (1.6)$$

сил притяжения в точках O и O_1 становится исчезающе малой даже для ближайших небесных тел, в том числе для Луны и Солнца. Поэтому с большой точностью

$$n = d^2r/dt^2 - g(r) \quad (1.7)$$

Так как система координат $O_1\xi\eta\zeta$ движется относительно $O_2\xi\eta\zeta$ поступательно, то дифференцирование в формуле (1.7) можно считать проведенным в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$.

¹ Здесь подвес предполагается пружинным, хотя в действительных конструкциях ньютометров упругие силы могут быть и другой природы, например электромагнитными.

2. Построим уравнения идеальной работы, т. е. уравнения невозмущенного функционирования инерциальной системы.

В проекциях на оси O_1xyz

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.1)$$

где локальные производные, обозначенные точкой, взяты в системе координат O_1xyz . При помощи (2.1) из (1.7), заменяя $\boldsymbol{\omega}$ на \mathbf{m} согласно (1.1) и интегрируя в системе координат O_1xyz , получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int_0^t [\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{g}(\mathbf{r})] dt + \frac{d\mathbf{r}^0}{dt}, \quad \mathbf{r} = \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{m} \times \mathbf{r}\right) dt + \mathbf{r}^0 \quad (2.2)$$

Соотношения (2.2) позволяют с помощью интегрирующих и вычислительных устройств получить по величинам $n_x, n_y, n_z; m_x, m_y, m_z$ и начальным значениям $\mathbf{r}^0, d\mathbf{r}^0/dt$ декартовы координаты x, y, z точки O в системе координат O_1xyz , если, конечно, известны $g_x(x, y, z), g_y(x, y, z), g_z(x, y, z)$, что будет иметь место, если, например, считать поле тяготения Земли центральным (точнее, сферичным).

Чтобы перейти к декартовым координатам ξ, η, ζ точки O в системе $O_1\xi\eta\zeta$, необходимо наряду с (2.2) моделировать уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \int_0^t (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{m}) dt + \boldsymbol{\xi}^0 \quad (\xi\eta\zeta) \quad (2.3)$$

которые по m_x, m_y, m_z и взаимному расположению систем координат $O_1\xi\eta\zeta$ и O_1xyz в начальный момент позволяют определить направляющие косинусы между ортами $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ и x, y, z , и уравнения

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r} \quad (\xi\eta\zeta) \quad (2.4)$$

осуществляющие переход от координат x, y, z к координатам ξ, η, ζ . В (2.3), (2.4) и в дальнейшем символ $(\xi\eta\zeta)$, стоящий рядом с формулой, означает циклическую перестановку переменных и индексов.

Очевидно, что ориентация объекта в пространстве задается его положением относительно трехгранника $Oxyz$, что требует дополнительного измерения либо самого положения трехгранника $Oxyz$ относительно объекта, либо угловой скорости вращения трехгранника $Oxyz$ относительно объекта и решения уравнений, аналогичных (2.3).

Если считать поле тяготения Земли сферичным, т. е.

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r} g(r) \quad (2.5)$$

то уравнения (2.2), (2.3) решаются независимо. В противном случае поле тяготения может быть задано только в связанной с Землей системе координат, или в системе координат, в которой движение тела Земли известно, например, в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$. В этом случае заданными функциями будут $g_\xi(\xi, \eta, \zeta, t), g_\eta(\xi, \eta, \zeta, t), g_\zeta(\xi, \eta, \zeta, t)$; для определения g_x, g_y, g_z необходимо предварительное разрешение уравнений (2.3), затем совместное решение (2.2), (2.4).

Разумеется, зная декартовы координаты ξ, η, ζ , можно перейти к любым другим в общем случае криволинейным и неортогональным координатам $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, которые могут зависеть от ξ, η, ζ и времени t , если поверхности равных значений координат $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ будут изменять свое положение относительно трехгранника $O_1\xi\eta\zeta$ со временем. Последнее будет, например, иметь место, если координаты $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ связываются жестко с Землей.

Для перехода к координатам $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ необходимо, очевидно, задать три соотношения вида

$$\Phi_i(\xi, \eta, \zeta; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

которые во всей области работы инерциальной системы должны удовлетворять обычным условиям однозначного соответствия координат ξ, η, ζ и $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, т. е. определители Якоби функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 по ξ, η, ζ и $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ должны быть отличны от нуля.

Следует отметить, что построение уравнений идеальной работы в их интегральной форме (а именно в этой форме они моделируются вычислительным устройством системы инерциальной навигации [2]) не вполне однозначно. Они могут быть построены в нескольких, хотя и равносильных, но различных формах.

Например, вместо уравнений (2.2) может быть взято равносильное им уравнение

$$\mathbf{r} = \int_0^t \left[\int_0^t (\mathbf{n} - \mathbf{m} \times (\mathbf{r}' + \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \mathbf{g}(\mathbf{r})) dt + (\mathbf{r}')^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{r}^\circ \right] dt + \mathbf{r}^\circ \quad (2.7)$$

Уравнения (2.2) и (2.8) предполагают интегрирование вдоль тех же осей $Oxyz$ (O_1xyz), по которым измеряются $n_x, n_y, n_z; m_x, m_y, m_z$ и получение декартовых координат x, y, z .

Существенно отличным оказывается другое построение. Воспользовавшись (2.3), можно спроектировать \mathbf{n} на оси системы координат $O_1\xi\eta\zeta$, провести интегрирование вдоль этих осей и получить декартовы координаты ξ, η, ζ . Можно спроектировать \mathbf{n} на оси любой другой ортогональной системы $O_1\xi'\eta'\zeta'$ (с началом в центре Земли O_1), движение которой относительно $O_1\xi\eta\zeta$ известно, оси такой системы координат могут быть, например, жестко связаны с Землей. Можно, наконец, спроектировать \mathbf{n} на направления нормалей к координатным поверхностям $\kappa_i = \text{const}$, провести интегрирование по направлениям этих нормалей и получить в результате интегрирования координаты $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$.

Возможен и промежуточный между указанными двумя способ построения уравнений идеальной работы, когда первое интегрирование производится вдоль одних направлений (не обязательно совпадающих с направлениями замера составляющих \mathbf{n}), а второе вдоль других.

Формулы (2.3) также можно записать в других формах, например, введением углов Эйлера, параметров Олдинга Родрига или параметров Кейли—Клейна [8, 9].

Все варианты построения уравнений идеальной работы по количеству необходимых вычислительных операций разнятся незначительно, если иметь в виду полные уравнения идеальной работы, произвольную ориентацию трехгранника $Oxyz$ и произвольное движение объекта. Возможность упрощений уравнений идеальной работы связана с выбором и обеспечением специальной ориентации трехгранника $Oxyz$, с наложением на движение объекта определенных ограничений и с пренебрежением теми или иными членами уравнений идеальной работы, учет которых лежит за рамками обеспечения инерциальной системой заданной точности.

Трехгранник $Oxyz$ может быть жестко связан с объектом. Тогда используется полная система уравнений идеальной работы. Решение системы (2.3) определяет при этом и ориентацию объекта в пространстве.

Трехгранник $Oxyz$ может быть неизменно ориентирован в пространстве [2], например его оси параллельны осям $\xi\eta\zeta$. Тогда интегрирование дает сразу координаты ξ, η, ζ , а уравнения (2.3) выпадают. Такая ориентация трехгранника $Oxyz$ может быть обеспечена стабилизированной платформой.

Если оси трехгранника $Oxyz$ параллельны осям $\xi'\eta'\zeta'$, ориентация которых в системе $O_1\xi\eta\zeta$ является известной функцией времени, то непосредственным интегрированием получаются декартовы координаты $\xi'\eta'\zeta'$. При этом положение трехгранника $Oxyz$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$ должно повторять по времени заданную ориентацию системы $O_1\xi'\eta'\zeta'$ относительно $O_1\xi\eta\zeta$.

Трехгранник $Oxyz$ может быть ориентирован также с учетом определенных самой инерциальной системой координат x_1, x_2, x_3 точки O объекта. Например, одна из его плоскостей может быть плоскостью касания к поверхности постоянного значения какой-либо из координат, например x_1 , тогда одна из осей трехгранника $Oxyz$, например Ox , нормальна к этой плоскости. В этом случае интегрирование вдоль оси Ox даст сразу координату x_1 . Если координаты x_1, x_2, x_3 ортогональны, то можно оси Oy, Oz также расположить вдоль нормалей к поверхностям $x_2 = \text{const}, x_3 = \text{const}$ и интегрированием определить x_2, x_3 . В случае неортогональной сетки координат можно перейти к неортогональному триэдру $Oxyz$.

Примерами ориентации ортогонального трехгранника $Oxyz$ с учетом текущего местоположения объекта могут быть: реализация сопровождающего трехгранника Дарбу на сфере радиуса r , концентрической с Землей, если за координаты x_1, x_2, x_3 взяты сферические координаты (геоцентрические или ортодромические), или сопровождающего трехгранника на поверхности $h = \text{const}$, если определяемыми координатами будут географические широта, долгота и высота h над уровнем моря.

Простейшим примером, в котором целесообразен переход к неортогональному трехграннику, может служить случай, когда определяемыми координатами являются: расстояние r от центра Земли O_1 и углы x_1, x_2 между r и осями $O_1\xi$ и $O_1\eta$. В этом случае, направив ось Oz вдоль r , оси Ox и Oy следует расположить в плоскостях $OO_1\xi$ и $OO_1\eta$. Легко видеть, что при этом оси Ox, Oy, Oz нормальны к поверхностям $x_1 = \text{const}, x_2 = \text{const}, r = \text{const}$, угол же между осями Ox и Oy отличен от прямого и зависит от координат x_1, x_2 .

Если объект движется по поверхности $x_1 = \text{const}$, то уравнения идеальной работы упрощаются тем, что выпадает их часть, относящаяся к определению x_1 ; так что может отсутствовать и ньютонометр вдоль нормали к поверхности $x_1 = \text{const}$. Аналогичные упрощения возможны, когда поверхность не является координатной, а задана соотношением $\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = 0$. Примерами такого рода упрощенных схем с двумя ньютонометрами (или эквивалентных схеме с двумя ньютонометрами) служат схемы, приведенные в работах [1-5].

Наконец, если объект движется вдоль линии $\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \sigma_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, то из схемы может быть изъят и второй ньютонометр, а оставшийся ориентирован вдоль касательной к этой линии.

Конечно, перечисленные упрощения, обусловленные наложением связей на движение объекта, в частности оставление двух или даже одного ньютонометра, возможны и при отсутствии этих связей, если одна или две координаты определяются не инерциальной системой, а при помощи сторонних источников информации. Например, расстояние до центра Земли может быть определено при помощи радиовысотомера [2].

Заметим, что наряду с пренебрежением по малости частью членов полных уравнений идеальной работы упрощение этих уравнений может быть достигнуто также и формированием части членов не как функций текущих параметров движения объекта, а как функций их программных значений, т. е. как функций времени.

Рассмотренные выше уравнения идеальной работы инерциальной системы составлялись в предположении, что движение происходит в такой близости к поверхности Земли, когда в (1.5) можно пренебречь по малости разностью (1.6). Легко видеть, что этого ограничивающего предположения можно и не делать.

Пусть имеется n небесных тел, притяжение которых следует учесть при подсчете разности (1.6).

Обозначим через \mathbf{r}_i радиус-вектор центра масс i -го из этих небесных тел относительно центра масс Земли O_1 . Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}_i^{(1)}$ точки O по отношению к центру i -го тела равен

$$\mathbf{r}_i^{(1)} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i \quad (2.8)$$

Если считать, что массы учитываемых небесных тел и их движение относительно Земли известны (объект, естественно, не возмущает движение Земли и этих небесных тел), а поля тяготения их центральны, то [10]

$$\mathbf{F}_1(0) - \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n m_i \gamma \left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \quad (2.9)$$

где m_i — масса i -го небесного тела, а γ — гравитационная постоянная.

С учетом (2.9) первое уравнение (2.2) заменяется на следующее

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int_0^t \left[\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^n m_i \gamma \left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \right] dt + \frac{d\mathbf{r}^0}{dt} \quad (2.10)$$

В (2.10) \mathbf{r}_i в проекциях на оси O_1xyz определяется по проекциям на оси $O_1\xi\eta\zeta$, которые известны как функции времени, и формулам (2.3).

Учет нецентральности полей тяготения каждого из учитываемых небесных тел не вносит принципиальных трудностей в построение соответствующих уравнений идеальной работы, но делает эти уравнения существенно более громоздкими, ибо для определения полей тяготения требуется введение n систем координат, каждая из которых жестко связана с i -м небесным телом. В этом случае становится необходимым, чтобы было известно движение каждого из небесных тел вокруг его центра масс по отношению к системе координат $O_2\xi\eta\zeta$ (или $O_1\xi\eta\zeta$).

3. Выведем уравнения ошибки, т. е. уравнения, описывающие возмущенную работу инерциальной системы, когда начальные условия уравнений идеальной работы заданы не точно, а элементы системы имеют инструментальные погрешности. Уравнения ошибки определяют устойчивость работы инерциальной системы и зависимость ее точности от величин ошибок задания начальных условий и инструментальных погрешностей элементов.

В качестве инструментальных погрешностей возьмем основные: $\Delta\mathbf{m}$ и $\Delta\mathbf{n}$ [2]. Можно показать, что любые другие всегда сводятся к эквивалентным основным.

Из (2.2), полагая теперь

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} \quad (3.1)$$

получаем

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \int_0^t [\mathbf{n}' - \mathbf{m}' \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{g}(\mathbf{r}')] dt + \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{r}' = \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} - \mathbf{m}' \times \mathbf{r}' \right) dt + (\mathbf{r}')^0$$

Вычитая из (3.2) уравнения идеальной работы (2.2) и замечая, что $\mathbf{m} = \boldsymbol{\omega}$, получаем, используя обозначения (3.1), интегральные уравнения ошибки

$$\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \int_0^t \left[\Delta\mathbf{n} - \Delta\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - (\boldsymbol{\omega} + \Delta\mathbf{m}) \times \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} + \right. \\ \left. + \mathbf{g}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \mathbf{g}(\mathbf{r}) \right] dt + \frac{d\delta\mathbf{r}^\circ}{dt} \quad (3.3)$$

$$\delta\mathbf{r} = \int_0^t \left(\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} - \Delta\mathbf{m} \times \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} + \Delta\mathbf{m}) \times \delta\mathbf{r} \right) dt + \delta\mathbf{r}^\circ$$

Дифференцируя в той же системе координат, в которой взяты интегралы, т. е. в системе $Oxyz$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\delta\mathbf{r}'' + 2(\boldsymbol{\omega} + \Delta\mathbf{m}) \times \delta\mathbf{r}' + (\boldsymbol{\omega} + \Delta\mathbf{m}) \times [(\boldsymbol{\omega} + \Delta\mathbf{m}) \times \delta\mathbf{r}] + \\ + (\boldsymbol{\omega}' + \Delta\mathbf{m}') \times \delta\mathbf{r} - \mathbf{g}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \Delta\mathbf{n} - 2\Delta\mathbf{m} \times \mathbf{r}' - \Delta\mathbf{m}' \times \mathbf{r} - \\ - \Delta\mathbf{m} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} + \Delta\mathbf{m}) \times (\Delta\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \quad (3.4)$$

с начальными условиями

$$\delta\mathbf{r}(0) = \delta\mathbf{r}^\circ \\ \delta\mathbf{r}'(0) = (\delta\mathbf{r}')^\circ + (\delta\boldsymbol{\omega}^\circ - \Delta\mathbf{m}^\circ) \times (\mathbf{r}^\circ + \delta\mathbf{r}^\circ) \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) при заданных в проекциях на оси $Oxyz$ величинах $\boldsymbol{\omega}$, $\Delta\mathbf{m}$, $\Delta\mathbf{n}$, \mathbf{r} и начальных значениях $\delta\mathbf{r}^\circ$, $\delta\boldsymbol{\omega}^\circ$, $(\delta\mathbf{r}')^\circ$ позволяет получить погрешности определения инерциальной системой декартовых координат x , y , z . Уравнение (3.4) — точное. Если пренебречь в нем произведениями проекций $\Delta\mathbf{m}$ на проекции $\delta\mathbf{r}$, то получим уравнение

$$\delta\mathbf{r}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \delta\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \delta\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}' \times \delta\mathbf{r} - \mathbf{g}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \\ = \Delta\mathbf{n} - 2\Delta\mathbf{m} \times \mathbf{r}' - \Delta\mathbf{m}' \times \mathbf{r} - \Delta\mathbf{m} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times (\Delta\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \quad (3.6)$$

с начальными условиями

$$\delta\mathbf{r}(0) = \delta\mathbf{r}^\circ, \quad \delta\mathbf{r}'(0) = (\delta\mathbf{r}')^\circ + (\delta\boldsymbol{\omega}^\circ - \Delta\mathbf{m}^\circ) \times \mathbf{r}^\circ \quad (3.7)$$

При $\Delta\mathbf{m} = 0$, т. е. когда возмущения оказываются лишь следствием погрешности ньютометров и начальных условий, уравнение (3.4) совпадает с (3.6) точно.

В (3.6) $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r} , $\Delta\mathbf{m}$, $\delta\mathbf{r}$ заданы в проекциях на оси O_1xyz , а $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость вращения трехгранника O_1xyz . Поэтому (3.6) может быть записано и так

$$\frac{d^2\delta\mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{g}(\mathbf{r}) - \mathbf{g}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \Delta\mathbf{n} - \Delta\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d}{dt}(\Delta\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \quad (3.8)$$

где $\delta\mathbf{r}$, \mathbf{r} , $\Delta\mathbf{m}$, $\Delta\mathbf{n}$ определены теперь проекциями на оси системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Заметим, что однородное уравнение (3.8) соответствует точно не только уравнению (3.6), но и (3.4), где сохранены произведения проекцией $\Delta\mathbf{m}$ на проекции $\delta\mathbf{r}$.

Обратимся ко второй группе уравнений работы инерциальной системы, т. е. к уравнениям (2.3), (2.4).

Из (2.3) получаем

$$\delta \dot{\xi} + (\omega + \Delta m) \times \delta \xi = \xi \times \Delta m \quad (\xi \eta \zeta) \quad (3.9)$$

Или, с теми же пренебрежениями, что и при переходе от (3.4) к (3.6)

$$\delta \dot{\xi} + \omega \times \delta \xi = \xi \times \Delta m \quad (\xi \eta \zeta) \quad (3.10)$$

или, наконец, аналогично (3.8)

$$\frac{d\delta \xi}{dt} = \xi \times \Delta m \quad (\xi \eta \zeta) \quad (3.11)$$

где, как и в (3.8), $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$ и Δm определены в проекциях на оси $O_1 \xi \eta \zeta$. Начальные условия уравнений (3.9), (3.10), (3.11) очевидны.

Из (2.4) имеем

$$\delta \xi = \delta \xi \cdot r \quad (\xi \eta \zeta) \quad (3.12)$$

Обозначив через δr_1 полную погрешность, а через δr_2 погрешность, определяемую уравнениями второй группы (3.9), (3.12) или (3.10), (3.12), получаем

$$\delta r_1 = \delta r + \delta r_2 \quad (3.13)$$

где

$$\delta r_2 = (\delta \xi \cdot r) \xi + (\delta \eta \cdot r) \eta + (\delta \zeta \cdot r) \zeta \quad (3.14)$$

а δr — решение уравнений ошибки первой группы (3.4) или (3.6).

В заключении вывода уравнений ошибки перейдем от векторных уравнений (3.6), (3.10), (3.14), (3.13) к скалярным. Если пренебречь при раскрытии разности $g(r) - g(r + \delta r)$ вариацией нецентральности поля тяготения Земли и сохранить при этом лишь линейные члены, то

$$g(r) - g(r + \delta r) = \delta \frac{r}{r} g(r) = \frac{g(r)}{r^2} [r \delta r - 3r (|r + \delta r| - r)] \quad (3.15)$$

Проектируя теперь (3.6) с учетом (3.15) на оси $x y z$, получаем первую группу уравнений ошибки в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \delta \dot{x} + \left(\frac{g}{r} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \omega_z) \delta y - \\ & - 2\omega_z \delta y + (\omega_x \omega_z + \omega_y) \delta z + 2\omega_y \delta z - \frac{3g}{r^2} x (|r + \delta r| - r) = \\ & = \Delta n_x - 2(\Delta m_{yz} - \Delta m_{zy}) - (\Delta m_{yz} - \Delta m_{zy}) - \omega_x (\Delta m_{yz} + \Delta m_{zy}) - \\ & - \Delta m_x (\omega_y y + \omega_z z) + 2x (\omega_y \Delta m_y + \omega_z \Delta m_z) \quad (xyz) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Начальными условиями этой группы уравнений будут

$$\begin{aligned} \delta x(0) &= \delta x^0, \\ \delta \dot{x}(0) &= (\delta \dot{x})^0 + (\delta \omega_y^0 - \Delta m_y^0) z^0 - (\delta \omega_z^0 - \Delta m_z^0) y^0 \quad (xyz) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Найдем уравнения для проекций δx_2 , δy_2 , δz_2 вектора δr_2 , заданного соотношениями (3.10), (3.14) на оси $x y z$.

Вводя таблицу направляющих косинусов

	x	y	z	
ξ	α_{11}	α_{12}	α_{13}	
η	α_{21}	α_{22}	α_{23}	
ζ	α_{31}	α_{32}	α_{33}	(3.18)

и замечая, что уравнения (2.3) равносильны трем системам скалярных дифференциальных уравнений [9]

$$\dot{\alpha}_{i1} + \omega_y \alpha_{i3} - \omega_z \alpha_{i2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (123, xyz) \quad (3.19)$$

получаем вместо (3.10) (3.20)

$$\delta \alpha_{i1} + \omega_y \delta \alpha_{i3} - \omega_z \delta \alpha_{i2} = \Delta m_z \alpha_{i2} - \Delta m_y \alpha_{i3} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (123, xyz)$$

Из (3.19), (3.20), вводя обозначения $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ для величин

$$\begin{aligned} \theta_x &= -\alpha_{12} \delta \alpha_{13} - \alpha_{22} \delta \alpha_{23} - \alpha_{32} \delta \alpha_{33} \\ \theta_y &= \alpha_{11} \delta \alpha_{13} + \alpha_{21} \delta \alpha_{23} + \alpha_{31} \delta \alpha_{33} \\ \theta_z &= -\alpha_{11} \delta \alpha_{12} - \alpha_{21} \delta \alpha_{22} - \alpha_{31} \delta \alpha_{32} \end{aligned} \quad (3.21)$$

и пренебрегая квадратами вариаций направляющих косинусов α_{ij} , приходим к соотношениям

$$\dot{\theta}_x + \omega_y \theta_z - \omega_z \theta_y = \Delta m_x \quad (xyz) \quad (3.22)$$

Но $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ согласно (3.21) суть составляющие вектора малого поворота θ по осям xyz . Поэтому (3.22) можно записать в виде уравнения

$$\dot{\theta} + \omega \times \theta = \Delta m \quad \left(\frac{d\theta}{dt} = \Delta m \right) \quad (3.23)$$

с начальным условием $\theta(0) = \theta^0$, определяемым (3.21).

Теперь, очевидно, $\delta r_2 = \theta \times r$, откуда

$$\delta x_2 = \theta_y z - \theta_z y \quad (xyz) \quad (3.24)$$

Полная погрешность, согласно (3.13)

$$\delta x_1 = \delta x + \delta x_2 \quad (xyz) \quad (3.25)$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ определены (3.16), а $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$ заданы (3.22), (3.24).

Если учитывать при подсчете разности (3.15) вариацию нецентральности поля тяготения Земли, то необходимо сохранить и квадратичные члены разложения сферической части поля тяготения, так как они имеют тот же порядок малости, что и линейная часть разложения поправки на несферичность (для поля Земли, во всяком случае).

Введем обозначение

$$g(r) = -\frac{r}{r} g(r) + \varepsilon(r) \quad (3.26)$$

где

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_x(x, y, z) x + \varepsilon_y(x, y, z) y + \varepsilon_z(x, y, z) z$$

векторная функция r , характеризующая несферичность поля тяготения, имеем

$$\begin{aligned} g(r) - g(r + \delta r) &= -\frac{\delta r}{r} g(r) + \frac{g(r)}{r^2} (r + \delta r) \left[15(|r + \delta r| - r) - \frac{12r\delta r}{r} - \frac{6\delta r^2}{r} \right] - \\ &- (\text{grad } \varepsilon_x \delta r_1) x - (\text{grad } \varepsilon_y \delta r_1) y - (\text{grad } \varepsilon_z \delta r_1) z \end{aligned} \quad (3.27)$$

Так как (3.27) входит не только δr , но и δr_1 , то в этом случае первая группа уравнений ошибки не отделяется от второй, так же как не разделяются и сами уравнения идеальной работы при учете нецентральности поля тяготения.

Не представляет труда учесть в первой группе уравнений [ошибки и разности притяжения других (кроме Земли) небесных тел в центре Земли и в точке O текущего местоположения объекта согласно уравнениям идеальной работы (2.10).

В этом случае $\delta r_i = \delta r_{i2}$, и уравнения ошибок первой и второй группы также оказываются связанными.

4. Укажем теперь некоторые общие свойства уравнений ошибки рассмотренной обобщенной схемы инерциальной навигации, а также покажем, как получить из них уравнения ошибки для частных схем, рассмотренных в работах [1-5].

Уравнения ошибки (3.16), (3.22), (3.24), (3.25) допускают группу преобразований, определяемую произвольным вращением трехгранника O_1xyz ($Oxyz$) в пространстве. Это свойство уравнений следует из произвольности ориентации трехгранника $Oxyz$ и произвольности ω . Оно может быть доказано и непосредственно, подобно аналогичному доказательству [2]. Поэтому анализ уравнений ошибки схемы инерциальной навигации с любым образом реализованной ориентацией трехгранника $Oxyz$ (O_1xyz) можно проводить относительно другого трехгранника, подходящим образом выбранного. (Аналогично тому, как это делалось в работе [2] по отношению к повороту сопровождающего трехгранника в азимуте.)

Таким трехгранником может быть, например, трехгранник $O_1\xi\eta\zeta$, неизменно ориентированный в пространстве. В этом случае уравнения ошибки получаются из (3.16), (3.22), (3.24), (3.25), если положить $\omega = 0$. Вместо (3.16) получаем

$$\begin{aligned} \delta\xi'' + \frac{g}{r} \delta\xi - \frac{3g}{r^2} \xi (|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}| - r) = \\ = \Delta n_\xi - 2(\Delta m_\eta \zeta - \Delta m_\zeta \eta) - \Delta m_\eta \dot{\zeta} + \Delta m_\zeta \dot{\eta} \end{aligned} \quad (\xi\eta\zeta) \quad (4.1)$$

что следует также и из (3.8), а вместо (3.22), (3.24), (3.25)

$$\theta_\xi = \Delta m_\xi, \quad \delta\xi_2 = \theta_\eta \zeta - \theta_\zeta \eta, \quad \delta\xi_1 = \delta\xi + \delta\xi_2 \quad (\xi\eta\zeta) \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1), (4.2) Δn_ξ , Δn_η , Δn_ζ , Δm_ξ , Δm_η , Δm_ζ — проекции $\Delta\mathbf{n}$ и $\Delta\mathbf{m}$ на оси $\xi\eta\zeta$. Они могут быть получены из Δn_x , Δn_y , Δn_z , Δm_x , Δm_y , Δm_z , если известны $\alpha_{ij}(t)$.

Уравнения (4.1), (3.8) допускают интересную аналогию. Они аналогичны уравнениям в вариациях движения материальной точки единичной массы в поле тяготения Земли, когда движение этой точки возмущается силами, стоящими в правой части (4.1), (3.8). В частности, уравнения (4.1), (3.8) аналогичны уравнениям движения материальной точки в кабине спутника [11]. Указанная аналогия позволяет в последнем случае применить к анализу первой группы уравнений ошибок инерциальной навигации хорошо разработанные методы небесной механики.

Если учитывать притяжение не только Земли, но и других небесных тел, то соответствующее уравнение ошибки будет аналогично возмущенному движению материальной точки в поле тяготения n тел.

Уравнения (3.16), (3.22), (3.24), (3.25) являются уравнениями ошибки произвольной схемы. Они справедливы, очевидно, как в том случае, когда ориентация трехгранника $Oxyz$ — заданная функция времени, т. е. не зависит от координат, определенных инерциальной системой, так и в том случае, когда ориентация трехгранника задана в функции определенных инерциальной системой координат. Следует иметь в виду, что в последнем случае положение трехгранника $Oxyz$ возмущается погрешностями определения координат.

Однородные уравнения первой группы (3.16) — точные. Они описывают возмущенный режим работы инерциальной системы не только при малых, но и при больших возмущениях.

Уравнения (3.22), (3.24) второй группы — уравнения в малых отклонениях, ибо при переходе от (3.20) к (3.22) отброшены квадраты $\delta\alpha_{ij}(t)$. Для того чтобы получить уравнения (3.22), (3.24) в больших возмущениях, следует воспользоваться при преобразовании точных уравнений (3.10), (3.20) теорией не малых, а конечных поворотов [9].

Заметим, что вторая группа уравнений ошибок инерциальной системы имеет тот же вид, что и полученная в работе [2], и при заданных $\alpha_{ij}(t)$ может быть проинтегрирована в квадратурах, что следует из (4.2).

Получим из уравнений (3.16) уравнения возмущенной работы частных схем инерциальной навигации, рассмотренных в работах [1-5].

Полагая в (3.16)

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

$$\delta x = \delta\xi_*, \quad \delta y = \delta\eta_*, \quad \delta z = \delta\zeta_*, \quad x = \xi_*, \quad y = \eta_*, \quad z = \zeta_* \quad (4.3)$$

и замечая, что

$$r^2 = \xi_*^2 + \eta_*^2 + \zeta_*^2 \quad (4.4)$$

и поэтому с точностью до членов второго порядка малости

$$|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}| - r = \xi_* \delta\xi_*' + \eta_* \delta\eta_*' + \zeta_* \delta\zeta_*' \quad (4.5)$$

получаем уравнения (4.14) работы [2] для схемы, в которой интегрирование производится по неизменно ориентированным в абсолютном пространстве направлениям.

Направив ось Oz трехгранника $Oxyz$ в невозмущенном положении вдоль \mathbf{r} и замечая, что в этом случае

$$x = y = 0, \quad z = r \quad (4.6)$$

и с точностью до величин второго порядка малости

$$\delta x = r\beta, \quad \delta y = -r\alpha, \quad \delta z = \delta r, \quad |\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}| - r = \delta z \quad (4.7)$$

приходим к уравнениям (3.9) работы [2] для схемы с тремя ньютонометрами, расположенными по осям трехгранника Дарбу на сфере, окружающей Землю.

Из двух первых уравнений (3.16) в этом случае получаются уравнения малых колебаний физического маятника Шулера [5, 12], двухгироскопической вертикали [4], гирогоризонткомпаса [3] и схемы, рассмотренной в работе [1], стоит лишь в (4.5) положить

$$\delta z = \delta r = 0 \quad (4.8)$$

В работах [1-5] даются уравнения малых колебаний систем около положения относительного равновесия. Уравнения же (3.16) — точные, и из них сразу же получаются уравнения возмущенного движения и при произвольных, а не обязательно малых отклонениях.

Пусть, например, трехгранник $Oxyz$ в невозмущенном положении будет трехгранником Дарбу на сфере [1-5], окружающей Землю. Обозначим его через $Ox_0y_0z_0$, сохранив обозначение xuz для возмущенного по-

ложения. Пусть возмущенное положение трехгранника xuz относительно невозмущенного характеризуется двумя углами¹ α и β согласно таблице направляющих косинусов

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x_0 & \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ y_0 & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ z_0 & -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{array} \quad (4.9)$$

Проекция абсолютной угловой скорости трехгранника $Oxyz$ на его оси выражаются через проекции ω_{x_0} , ω_{y_0} , ω_{z_0} абсолютной угловой скорости трехгранника $Ox_0y_0z_0$ на оси $x_0y_0z_0$ и углы α и β следующим образом

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x_0} \cos \beta + \omega_{y_0} \sin \alpha \sin \beta - \omega_{z_0} \cos \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta \\ \omega_y &= \omega_{y_0} \cos \alpha + \omega_{z_0} \sin \alpha + \dot{\beta} \\ \omega_z &= \omega_{x_0} \sin \beta - \omega_{y_0} \sin \alpha \cos \beta + \omega_{z_0} \cos \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} \sin \beta \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для схемы с двумя ньютонметрами при движении точки O по сфере постоянного радиуса r из (4.9)

$$\delta x = -r \cos \alpha \sin \beta, \quad \delta y = r \sin \alpha, \quad \delta z = r (\cos \alpha \cos \beta - 1) \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10) и (4.11) в первые два уравнения (3.16), получаем после очевидных группировок и упрощений²

$$\begin{aligned} &\beta'' + \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta + 2\alpha' (\omega_{x_0} \sin \beta \cos \beta - \\ &\quad - \omega_{y_0} \sin \alpha \cos^2 \beta + \omega_{z_0} \cos \alpha \cos^2 \beta) + \omega_{y_0}' (\cos \alpha - \cos \beta) + \\ &+ \omega_{z_0}' \sin \alpha + \omega_{x_0}' \sin \alpha \sin \beta + (\omega_0^2 - \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos \beta - \omega_{y_0}^2) \sin \beta \cos \alpha + \\ &\quad + \omega_{x_0}^2 (\cos \beta - \cos \alpha) \sin \beta - \omega_{y_0}^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \\ &\quad + \omega_{x_0} \omega_{y_0} (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \sin \alpha + \\ &\quad + \omega_{x_0} \omega_{z_0} (\cos^2 \beta \cos \alpha - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos \alpha) + \\ &\quad + \omega_{y_0} \omega_{z_0} (2 \cos \alpha \cos \beta - 1) \sin \alpha \sin \beta = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} &\alpha'' \cos \beta - 2\alpha' \beta' \sin \beta + 2\beta' (-\omega_{x_0} \sin \beta + \omega_{y_0} \sin \alpha \cos \beta - \\ &\quad - \omega_{z_0} \cos \alpha \cos \beta) + \omega_{x_0}' (\cos \beta - \cos \alpha) + \omega_{y_0}' \sin \alpha \sin \beta - \\ &\quad - \omega_{z_0}' \cos \alpha \sin \beta + (\omega_0^2 - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - \\ &\quad - \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos \beta) \sin \alpha - \omega_{x_0} \omega_{y_0} \cos \alpha \sin \beta - \omega_{x_0} \omega_{z_0} \sin \alpha \sin \beta + \\ &\quad + \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\sin^2 \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha) = 0, \quad \omega_0^2 = g/r \end{aligned}$$

Уравнения (4.10) в точности совпадают с уравнениями маятника Шулера [5,12], точка подвеса которого движется по сфере радиуса r . В самом деле, уравнения движения маятника в проекциях на оси xuz имеют вид

$$H_x' + \omega_y H_z - \omega_z H_y = -lF_y, \quad H_y' + \omega_z H_x - \omega_x H_z = lF_x \quad (4.13)$$

Для маятника Шулера [5,12] проекции кинетического момента

$$H_x = mlr\omega_x, \quad H_y = mlr\omega_y, \quad H_z = 0 \quad (4.14)$$

¹ Третий поворот несуществен. Его можно отнести к положению трехгранника $x_0y_0z_0$.

² Выписаны однородные уравнения.

Составляющие F по осям $x_0y_0z_0$

$$\begin{aligned} F_{x_0} &= -mr(\omega_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}), & F_{y_0} &= mr(\omega_{x_0} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) \\ F_{z_0} &= mr(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) - mg \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подстановка (4.14), (4.15), (4.10) в (4.13) немедленно дает уравнения (4.12). Уравнения (4.12) являются также уравнениями возмущенного движения схем [1, 3, 4].

При постоянных ω_{x_0} , ω_{y_0} , ω_{z_0} уравнения (4.12) имеют первый интеграл. Для его получения достаточно умножить первое уравнение (4.12) на β , второе на $\alpha \cos \beta$ и сложить. Интегрирование суммы дает

$$\begin{aligned} V &= (\alpha \cos \beta)^2 + \beta^2 - 2\omega_0^2 \cos \alpha \cos \beta + \\ &+ \omega_{z_0}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \omega_{x_0}^2 (\sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta) + \\ &+ \omega_{y_0}^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta) - 2\omega_{x_0}\omega_{y_0} \sin \alpha \sin \beta \cos \beta + \\ &+ 2\omega_{x_0}\omega_{z_0} (\cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \sin \beta) + \\ &+ 2\omega_{y_0}\omega_{z_0} (\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta) = \text{const} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из (4.16) следует условие устойчивости решений (4.12) по Ляпунову

$$\omega_0^2 - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 > 0 \quad (4.17)$$

полученное ранее в работах [6, 7], из рассмотрения уравнений, приводимых к (4.12).

Условие (4.17) является достаточным условием. В работах [6, 13] показано, что условие (4.17) можно считать необходимым условием устойчивости, если предполагать в системе силы полной диссипации. В этой связи необходимо заметить, что диссипативные силы в инерциальных системах приводят к появлению скоростных девиаций, и схемы инерциальной навигации, если не имеется в виду коррекция по скорости, стремятся строить так, чтобы диссипация в них отсутствовала. Поэтому произвольное введение в систему диссипативных сил при исследовании устойчивости требует большой осторожности.

Для получения уравнений возмущенной работы схемы с двумя ньютонометрами в больших отклонениях при $r = r(t)$, когда величина r определяется из дополнительных источников информации, не связанных с работой инерциальной системы, следует в (4.11) считать r заданной функцией времени. Если r вычисляется как функция двух координат, определенных инерциальной системой, то при написании уравнений возмущенной работы эту функцию необходимо варьировать [2].

Чтобы получить уравнения возмущенной работы при больших отклонениях схемы [2] в переменных α , β , δr , необходимо в (3.16) подставить вместо (4.11)

$$\begin{aligned} \delta x &= -(r + \delta r) \cos \alpha \sin \beta, & \delta y &= (r + \delta r) \sin \alpha \\ \delta z &= (r + \delta r) (\cos \alpha \cos \beta - 1) + \delta r \end{aligned} \quad (4.18)$$

5. Исследуем устойчивость работы инерциальной системы в случае, когда ось Oz трехгранника $Oxyz$ в невозмущенном положении направлена вдоль r , а ω_x , ω_y , ω_z и r постоянны. Из (3.16)

$$|r + \delta r| - r = \delta z + o(\delta z) \quad (5.1)$$

Сохраняя теперь в правой части (5.1) лишь δz , замечаем, что уравнения (3.16) становятся линейными с постоянными коэффициентами, харак-

теристическое уравнение системы (3.16) сводится к полному кубическому относительно квадрата неизвестной $q = p^2$:

$$q^3 + 2q^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) + q [-3\omega_0^4 + 3\omega_0^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2 - 2\omega_z^2) + (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^2] - \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) (2\omega_0^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2 - 2\omega_z^2) = 0 \quad (5.2)$$

Для устойчивости (неасимптотической) уравнение (5.2) должно, как известно, иметь отрицательные или нулевые корни, причем кратным корням характеристического уравнения системы (3.16) должны соответствовать линейные элементарные делители характеристической матрицы.

Для исследования устойчивости системы (3.16) в рассматриваемом случае можно воспользоваться также тем обстоятельством, что она может рассматриваться как описывающая движение материальной точки единичной массы под действием потенциальных и гироскопических сил.

Выражение для силовой функции записывается, очевидно, следующим образом:

$$U = -\frac{1}{2} [(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x^2 + (\omega_0^2 - \omega_x^2 - \omega_z^2) \delta y^2 - (2\omega_0^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2) \delta z^2 + 2\omega_x \omega_y \delta x \delta y + 2\omega_x \omega_z \delta x \delta z + 2\omega_y \omega_z \delta y \delta z] \quad (5.3)$$

Гироскопическими силами можно считать следующие выражения:

$$2\omega_z \delta y' - 2\omega_y \delta z' \quad (xyz) \quad (5.4)$$

так как матрица коэффициентов этих сил кососимметрична [14]. Система (3.16) имеет в рассматриваемом случае интеграл энергии

$$\delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2 - 2U = \text{const} \quad (5.5)$$

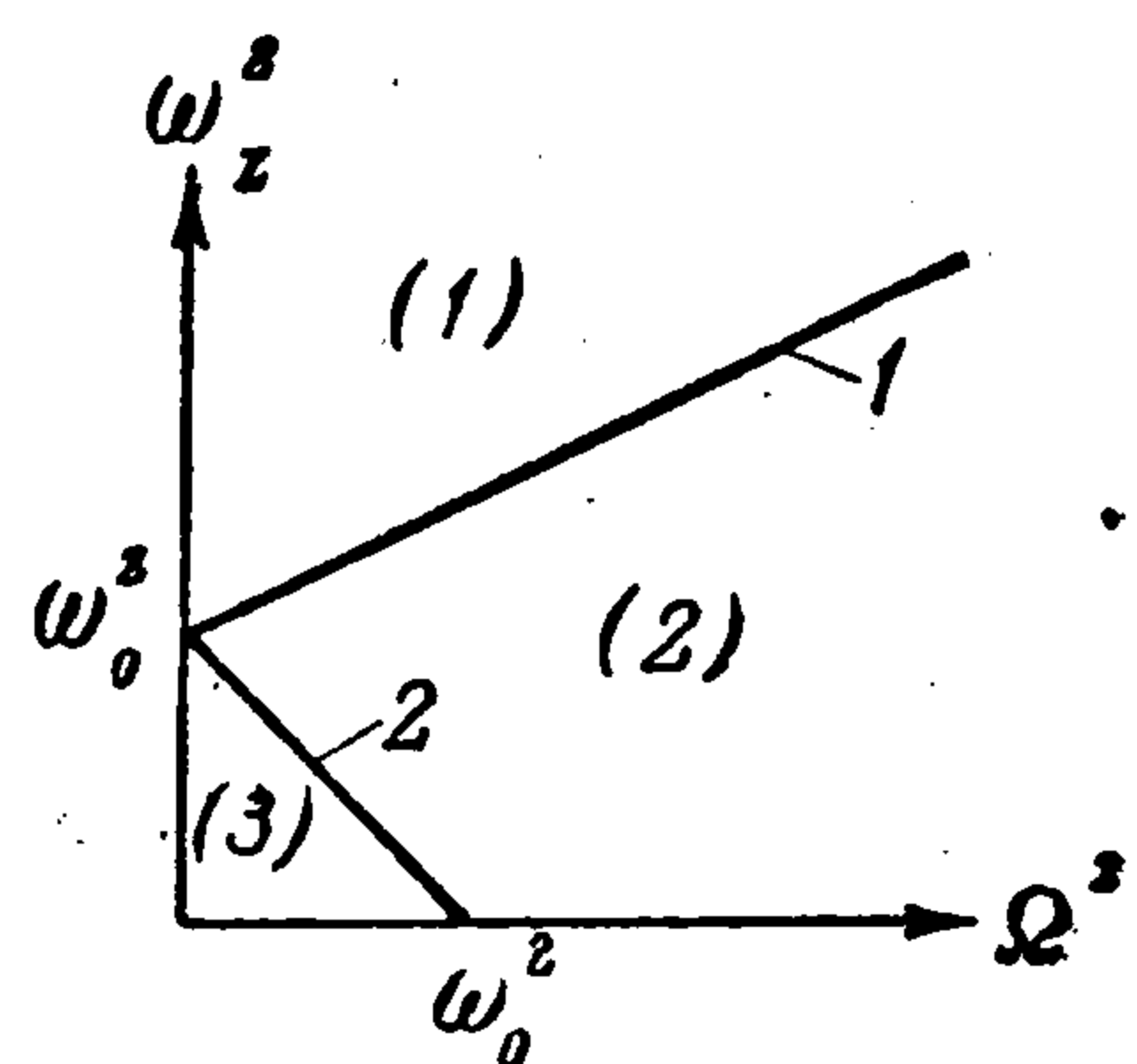
который можно получить непосредственно, если сложить и проинтегрировать уравнения (3.16), умноженные соответственно на $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$.

Если отбросить гироскопические силы (5.4), то останутся только потенциальные. Для устойчивости равновесия под действием лишь потенциальных сил силовая функция должна иметь максимум в точке равновесия. Так как силовая функция (5.3) представляет собой квадратичную форму, условиями максимума являются условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. В рассматриваемом случае они сводятся к неравенствам

$$\omega_0^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0, \quad 2\omega_0^2 - 2\omega_z^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2 < 0 \quad (5.6)$$

На фигуре $\Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$, а прямые 1, 2 соответствуют уравнениям $\omega_0^2 - \omega_z^2 - \Omega^2 = 0$, $2\omega_0^2 + \Omega^2 - 2\omega_z^2 = 0$. Из фигуры видно, что области, определяемые неравенствами (5.6), не пересекаются, поэтому силовая функция не имеет максимума.

Так как в нашем случае силовая функция является однородной второй степени, то по известной теореме Ляпунова [15], из отсутствия максимума



ее следует неустойчивость системы без необходимости рассматривать члены высших порядков.

Вернемся к гироскопическим силам (5.4).

В области (1) и (3) (фигура), где степень неустойчивости¹ консервативной системы нечетна, гироскопические силы, согласно теореме Томсона и Тета [16], не могут стабилизировать равновесие.

В области (2), где степень неустойчивости четна, остается принципиальная возможность стабилизации гироскопическими силами. Эта стабилизация, как известно [15], имеет временный характер и разрушается силами полной диссипации.

Стабилизация гироскопическими силами осуществляется если, например,

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2, \quad \omega_z^2 = \varepsilon^2 \quad (5.7)$$

где ε^2 — достаточно малая величина.

Можно убедиться в том, что полином (5.2) удовлетворяет в этом случае условиям Гурвица. Дискриминант Δ кубического уравнения, получаемого из (5.2) заменой переменной

$$y = q + \frac{2}{3}(\omega_0^2 + \varepsilon^2) \quad (5.8)$$

отрицателен

$$\Delta = -\omega_0^{10} \varepsilon^2 q^{-3} < 0 \quad (5.9)$$

Поэтому все корни характеристического уравнения простые и чисто мнимые.

6. В заключение исследуем устойчивость схемы с тремя ньютонометрами, когда ориентация трехгранника $Oxyz$ произвольна, а $|r|$ для формирования $g(r)$ задается дополнительно, от внешнего по отношению к инерциальной системе источника информации.

В этом случае в уравнениях ошибки (3.16) следует положить

$$|r + \delta r| - r = 0 \quad (6.1)$$

а погрешность задания $|r|$ отнести к правым частям уравнений (3.16).

Из (3.16), (3.8), (4.1) следует тогда, что однородные уравнения ошибок приобретают вид

$$\delta \xi'' + \frac{g}{r} \delta \xi = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad (6.2)$$

Из (6.2) вытекает, что при $r = \text{const}$, когда $\omega_0^2 = g/r$ постоянно, возмущенное движение системы устойчиво при любых $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$.

Из (6.2) при заданных $\alpha_{ij}(t)$ немедленно следует и решение уравнений (3.16) в этом случае.

При постоянных ω_x , ω_y , ω_z устойчивость обнаруживается и без обращения к уравнениям (3.8), (4.1).

В рассматриваемом случае условие максимума силовой функции сводится к одному неравенству

$$\omega_0^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0 \quad (6.3)$$

Вне области (6.3) степень неустойчивости четна и равновесие стабилизируется гироскопическими силами. Последнее легко показать, рассмотрев характеристическое уравнение, которое, если записать его относительно квадрата неизвестной, имеет вид

$$q^3 + (3\omega_0^2 + 2\omega^2) q^2 + q(3\omega_0^4 + \omega^4) + \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 0 \quad (6.4)$$

¹ Число отрицательных коэффициентов устойчивости Пуанкаре [15].

где для краткости введено обозначение

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \quad (6.5)$$

Полином (6.4) удовлетворяет условиям Гурвица, так как всегда

$$(3\omega_0^2 + 2\omega^2)(3\omega_0^4 + \omega^4) - \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 > 0 \quad (6.6)$$

Дискриминант Δ кубического уравнения

$$y^3 + 3by + 2c = 0 \quad (6.7)$$

получаемого из (6.4) заменой переменной

$$y = q + \frac{3\omega_0^2 + 2\omega^2}{3} \quad (6.8)$$

не положителен

$$\Delta = -\frac{4}{27}\omega_0^2\omega^6(4\omega_0^2 - \omega^2)^2 \leq 0 \quad (6.9)$$

Если $\omega \neq 0$, $4\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$, $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$, то (6.4) имеет три различных вещественных отрицательных корня. Следовательно, характеристическое уравнение имеет три пары различных чисто мнимых корней.

При $\omega \neq 0$, $4\omega_0^2 - \omega_0^2 \neq 0$, $\omega_0^2 = \omega^2$ уравнение (6.4) наряду с двумя вещественными отрицательными имеет нулевой корень, а характеристическое уравнение — кратный нулевой корень.

Если $\omega = 0$, то (6.4) имеет трехкратный корень $q_{1,2,3} = -\omega_0^2$, а характеристическое уравнение соответственно пару мнимых корней той же кратности.

Наконец, при $4\omega_0^2 - \omega^2 = 0$ уравнение (6.4) имеет кратный корень $q_{2,3} = -\omega_0^2$, характеристическое уравнение — пару мнимых кратных корней.

Можно убедиться, что когда корни характеристического уравнения получаются кратными, элементарные делители характеристической матрицы системы (3.16) в рассматриваемом случае остаются линейными.

Автор благодарен А. Ю. Ишлинскому за просмотр рукописи работы и полезные замечания.

Поступила 2 II 1963]

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
2. Андреев В. Д. К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. I.
3. Ишлинский А. Ю. К теории гиригоризонткомпасов. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
4. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
5. Андреев В. Д. Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 6.
6. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гироскопа. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
7. Жбанов Ю. К. К исследованию свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
8. Апель П. Теоретическая механика, т. 2. Физматгиз, 1960.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
10. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. Физматгиз, 1961.
11. Лурье А. И. Свободное падение материальной точки в кабине спутника. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. I.
12. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
13. Кошляков В. Н. Об устойчивости гиригоризонткомпасов при наличии диссипативных сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
14. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. Гостехиздат, 1956.
15. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
16. Thomson W. and Tait P., Treatise on Natural Philosophy, т. 1. Cambridge University Press, 1879.