Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. И. Киргетов

(Москва)

В настоящей работе продолжено изучение управляемых механических систем, начатое в работе [1]. Рассмотрены общие вопросы аналитической теории управляемых систем. Показано, что уравнения движения управляемой системы могут быть записаны во всех основных формах: в форме уравнений Лагранжа, канонических уравнений и в форме уравнений Аппеля. Рассмотрены канонические преобразования голономных управляемых систем. Выведены уравнения движения неголономных управляемых систем.

Индексы, встречающиеся в работе, принимают следующие значения:

$$\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ a;\quad \pi = 1,\ 2,\ \ldots,\ b;\quad i = 1,2,\ \ldots,\ 3n;\quad \alpha,\ \beta = 1,2,\ \ldots,\ s = 3n - a - b;$$
$$\tau,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;\quad \lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad \vartheta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p - l;\quad \gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ c;$$
$$\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ s-c;\quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

1. Система n материальных точек движется относительно неподвижной декартовой системы координат. Обозначим через $x_1, x_2, x_3, m_1 = m_2 = m_3$ координаты и массу первой точки системы, через $x_4, x_5, x_6, m_4 = m_5 = m_6$ — координаты и массу второй точки и т. д.

Пусть система подчинена связям, среди которых имеются параметрические. Обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_k$ параметры управления системой. Пусть

$$f_\rho (t, x_1, \ldots, x_{3n}) = 0, \qquad \varphi_\pi (t, x_1, \ldots, x_{3n}, u_1, \ldots, u_k) = 0 \tag{1.1}$$

будут уравнения связей системы.

Связи системы будем считать идеальными. Тогда для нее справедлив [1] принцип Даламбера — Лагранжа: для действительного ускорения системы соотношение

$$\sum (m_i x_i'' - X_i)\, \delta x_i = 0 \tag{1.2}$$

имеет место при всех возможных перемещениях системы. Последние задаются [1] соотношениями

$$\sum \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\, \delta x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_i}\, \delta x_i = 0 \tag{1.3}$$

Величины $X_1, \ldots, X_{3n}$ в соотношении (1.2) представляют компоненты по осям координат действующих на систему активных сил. Будем считать величины $X_1, \ldots, X_{3n}$ определенными функциями времени, координат и скоростей точек системы, а также параметров управления системой. Последнее предположение указывает на то, что, кроме кинематического, допускается динамическое управление системой.

Преимуществом управляемых систем сравнительно с системами неуправляемыми является возможность активного воздействия через параметры управления на движение управляемой системы. Параметры управления по своей природе — неопределенные переменные, которыми можно распорядиться произвольно. Входя в уравнения движения управляемой системы (через связи системы и через действующие на нее силы), параметры управления по существу размыкают указанную систему уравнений. Уравнения движения поэтому сами по себе еще не определяют движение управляемой системы — оно определяется лишь после того, как заданы какие-либо условия, позволяющие замкнуть систему уравнений движения управляемой системы. В этом источник гибкости управляемых систем.

2. Пусть $\chi_1,\ldots, \chi_s$ — некоторые функции времени координат и, быть может, параметров управления. Напишем уравнения

$$\chi_\alpha(t,\ x_1,\ldots,x_{3n},\ u_1,\ldots,u_k) = q_\alpha \tag{2.1}$$

и дополним ими систему уравнений (1.1). Допустим, что общее число уравнений (1.1) и (2.1) равно $3n$, а функции χ_α таковы, что система уравнений (1.1) и (2.1) независима по переменным $x_1,\ldots, x_{3n}$. Тогда эта система может быть разрешена относительно $x_1,\ldots,x_{3n}$. Так что имеем

$$x_i = x_i\ (t,\ q_1,\ldots,q_s,\ u_1,\ldots,u_k) \tag{2.2}$$

При фиксированных значениях параметров управления между величинами $q_1,\ldots,q_s$ и допустимыми связями положениями системы существует взаимно однозначное соответствие. По аналогии с механикой неуправляемых систем будем называть величины $q_1,\ldots,q_s$ обобщенными, или лагранжевыми, координатами рассматриваемой управляемой механической системы. Равенства (2.2) дают явные выражения декартовых координат системы через ее обобщенные координаты, время и параметры управления. Нетрудно показать, что равенства (2.2) приводят к следующим явным выражениям для возможных перемещений системы

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \tag{2.3}$$

где $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ — произвольные величины.

Подставим выражения (2.3) для возможных перемещений системы в основное уравнение механики (1.2). Получим

$$\sum \delta q_\alpha \sum (m_i x_i'' - X_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть этого равенства. Прежде всего из равенств

$$x_i' = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} q_\alpha' + \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu} u_\nu'$$

получающихся дифференцированием (2.2) по времени, находим

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'}, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha} \tag{2.5}$$

Примечание. Следует отметить, что здесь и в дальнейшем параметры управления наряду с координатами системы считаются самостоятельными переменными.

С учетом равенств (2.5) имеем

$$\sum m_i x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \sum m_i x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} - \sum m_i x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum m_i x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} - \sum m_i x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \qquad \left(T = \frac{1}{2} \sum m_i x_i'^2\right)$$

Здесь T — кинетическая энергия системы. Внося эти выражения в соотношение (2.4), представим его в виде

$$\sum \delta q_\alpha \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) = 0 \ . \qquad \left(Q_\alpha = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \tag{2.6}$$

Здесь Q_α — обычные обобщенные силы. Величины δq_α произвольны, поэтому из (2.6) находим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \tag{2.7}$$

Таким образом, уравнения движения управляемой системы имеют вид обычных уравнений Лагранжа второго рода.

Если силы, действующие на систему, обладают силовой функцией U, то обобщенные силы Q_α могут быть представлены в виде $Q_\alpha = \partial U \,/\, \partial q_\alpha$, и уравнения (2.7) приводятся к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{2.8}$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа системы.

Число уравнений каждой из систем (2.7) и (2.8) равно числу обобщенных координат. Эти уравнения, однако, кроме обобщенных координат, содержат еще параметры управления, которые остаются пока еще совершеднно неопределенными переменными. Поэтому указанные системы уравнений разомкнуты и сами по себе, как отмечалось в конце предыдущего параграфа, движение системы не определяют.

3. Обозначим

$$p_\alpha = \partial T \,/\, \partial q_\alpha' \tag{3.1}$$

и будем называть величины p_α обобщенными импульсами системы. Введем в рассмотрение функцию

$$H^* = \sum p_\beta q_\beta' - T \tag{3.2}$$

Исключим из нее при помощи (3.1) обобщенные скорости q_β'. Тогда H^* будет функцией времени, обобщенных координат и импульсов, а также параметров управления и их производных. Найдем производные H^* по p_α и q_α. Дифференцируя H^* как сложную функцию и принимая во внимание равенства (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial p_\alpha} &= \sum p_\beta \frac{\partial q_\beta'}{\partial p_\alpha} + q_\alpha' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\beta'} \frac{\partial q_\beta'}{\partial p_\alpha} = q_\alpha' \\ \frac{\partial H^*}{\partial q_\alpha} &= \sum p_\beta \frac{\partial q_\beta'}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\beta'} \frac{\partial q_\beta'}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Возьмем теперь уравнения Лагранжа (2.7). При помощи равенств (3.1) они записываются в виде

$$p_\alpha' = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha$$

Совмещая эти уравнения с (3.3), приходим к каноническим уравнениям

$$q_\alpha' = \frac{\partial H^*}{\partial p_\alpha}, \qquad p_\alpha' = -\frac{\partial H^*}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha \tag{3.4}$$

Уравнения (3.4) получают форму гамильтоновых канонических уравнений, если силы, действующие на систему, допускают силовую функцию. Действительно, вводя в рассмотрение в этом случае функцию Гамильтона $H = H^* - U$, непосредственно получаем

$$q_\alpha' = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad p_\alpha' = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{3.5}$$

Таким образом, уравнения движения управляемой системы в общем случае могут быть записаны в форме канонических уравнений. Если же силы, действующие на систему, допускают силовую функцию, то эти уравнения приводятся к виду канонических уравнений Гамильтона.

4. В предыдущих параграфах было показано, что уравнения движения управляемой системы могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода и в форме канонических уравнений. Покажем, что они могут быть записаны и в третьей основной форме — форме уравнений Аппеля. Продифференцируем для этого дважды по времени выражения (2.2) для декартовых координат точек системы. Получим равенства

$$x_i'' = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} q_\alpha'' + \ldots$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от вторых производных обобщенных координат. Из этих равенств находим

$$\frac{\partial x_i''}{\partial q_\alpha''} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}$$

Подставив последние тождества в равенства (2.3) для возможных перемещений системы, получаем

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i''}{\partial q_\alpha''} \delta q_\alpha$$

Воспользовавшись этими равенствами, преобразуем кинематическую часть основного уравнения механики (1.2). Имеем

$$\sum m_i x_i'' \delta x_i = \sum m_i x_i'' \sum \frac{\partial x_i''}{\partial q_\alpha''} \delta q_\alpha = \sum \delta q_\alpha \sum m_i x_i'' \frac{\partial x_i''}{\partial q_\alpha''} = \sum \frac{\partial S}{\partial q_\alpha''} \delta q_\alpha$$

где через S обозначена энергия ускорений системы

$$S = \frac{1}{2} \sum m_i x_i''^2$$

С другой стороны, на основании равенств (2.3) находим

$$\sum X_i \delta x_i = \sum X_i \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum Q_\alpha \delta q_\alpha$$

где Q_α — обобщенные силы.

Основное уравнение механики теперь можно записать

$$\sum\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha''} - Q_\alpha\right)\delta q_\alpha = 0 \qquad (4.1)$$

Откуда в силу независимости величин δq_α получаем требуемое:

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha''} - Q_\alpha = 0 \qquad (4.2)$$

5. Рассмотрим теперь канонические преобразования уравнений движения управляемой механической системы.

Задача ставится следующим образом: среди всевозможных преобразований

$$q_\alpha^* = q_\alpha^*(q, p, t, u); \quad p_\alpha^* = p_\alpha^*(q, p, t, u) \qquad (5.1)$$

канонических переменных q и p в $2\,n$ новых переменных q^* и p^* найти такие, при которых сохраняется гамильтонов вид уравнений (3.5) движения управляемой механической системы. Параметры управления, которые наряду с обобщенными координатами и импульсами являются переменными системы, участвуют в преобразовании (5.1), но сами преобразованию не подвергаются.

Своеобразие постановки задачи о канонических преобразованиях уравнений движения управляемых механических систем состоит в следующем: по части переменных системы уравнения движения имеют гамильтонов вид, требуется найти такие преобразования канонических переменных, при которых уравнения для преобразуемых переменных сохраняют гамильтонов вид.

Рассматриваемый вопрос тесно связан с формами Пфаффа, точнее, со свойствами инвариантной связи формы и ее союзной системы. Рассмотрим его сначала в общей постановке. Возьмем какую-либо форму Пфаффа

$$\omega = \Sigma A_\tau d\xi_\tau$$

где A_τ — некоторые функции переменных ξ. Билинейным ковариантом этой формы называется выражение [2]

$$\Delta = \sum\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial \xi_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial \xi_\tau}\right) d\xi_\tau \delta\xi_\sigma$$

где $d\xi$ и $\delta\xi$ — две группы дифференциалов переменных ξ. Важным свойством билинейного коварианта является его инвариантность по отношению к замене переменных: преобразованный билинейный ковариант будет билинейным ковариантом преобразованной формы, другими словами,

$$\sum\left(\frac{\partial A_\tau^*}{\partial \xi_\sigma^*} - \frac{\partial A_\sigma^*}{\partial \xi_\tau^*}\right) d\xi_\tau^* \delta\xi_\sigma^* = \sum\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial \xi_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial \xi_\tau}\right) d\xi_\tau \delta\xi_\sigma \qquad (5.2)$$

где

$$\xi_\tau^* = \xi_\tau^*(\xi_1, \ldots, \xi_p), \qquad \sum A_\tau^* d\xi_\tau^* = \sum A_\tau\, d\xi_\tau$$

Система уравнений

$$\sum\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial \xi_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial \xi_\tau}\right) d\xi_\tau = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, p)$$

в силу которых билинейный ковариант заданной формы Пфаффа обращается в нуль тождественно по $\delta\xi_\sigma$, называется союзной системой заданной формы. Как и билинейный ковариант, союзная система инвариантно связана (по отношению к замене переменных) с формой ω: преобразованная союзная система является союзной системой преобразованной формы.

Свойство инвариантной связи билинейного коварианта и союзной системы с формой Пфаффа имеет место применительно к самому общему преобразованию переменных. Предположим, что преобразованию подвергается только часть переменных ξ. Пусть это будут первые l переменных. Тогда

$$\xi_\lambda^* = \xi_\lambda^* (\xi_1, \ldots, \xi_p), \qquad \xi^*_{l+\vartheta} = \xi_{l+\vartheta} \tag{5.3}$$

Положим $\delta\xi_{l+\vartheta} = d\xi_{l+\vartheta}$, что можно сделать в силу произвольности и независимости дифференциалов $d\xi$ и $\delta\xi$. Покажем, что билинейный ковариант Δ в этом случае обращается в нуль уже в силу уравнений

$$\sum \left(\frac{\partial A_\tau}{\partial \xi_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial \xi_\tau} \right) d\xi_\tau = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{5.4}$$

В самом деле, нетрудно убедиться, что в силу условий $\delta\xi_{l+\vartheta} = d\xi_{l+\vartheta}$ и уравнений (6.4) билинейный ковариант приводится к виду

$$\Delta = \sum \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial \xi_{l+\vartheta}} - \frac{\partial A_{l+\vartheta}}{\partial \xi_\lambda} \right) d\xi_\lambda d\xi_{l+\vartheta}$$

С другой стороны, из системы (5.4) находим

$$\sum \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial \xi_{l+\vartheta}} - \frac{\partial A_{l+\vartheta}}{\partial \xi_\lambda} \right) d\xi_{l+\vartheta} = - \sum \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial \xi_\lambda} \right) d\xi_\mu$$

и, следовательно, билинейный ковариант Δ записывается

$$\Delta = - \sum \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial \xi_\lambda} \right) d\xi_\mu d\xi_\lambda = 0$$

что и требовалось. Возьмем теперь билинейный ковариант

$$\Delta^* = \sum \left(\frac{\partial A_\tau^*}{\partial \xi_\sigma^*} - \frac{\partial A_\sigma^*}{\partial \xi_\tau^*} \right) d\xi_\tau^* \delta\xi_\sigma^*$$

преобразованной формы ω. По только что доказанному, он обращается в нуль в силу уравнений

$$\sum \left(\frac{\partial A_\tau^*}{\partial \xi_\lambda^*} - \frac{\partial A_\lambda^*}{\partial \xi_\tau^*} \right) d\xi_\tau^* = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{5.5}$$

Однако вследствие соотношения (5.2) билинейный ковариант Δ^* обращается в нуль в силу уравнений (5.4). Следовательно, уравнения (5.5) эквивалентны уравнениям (5.4).

Система уравнений (5.4) является подсистемой союзной системы формы ω. Будем ее условно называть частичной союзной системой формы ω по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_l$. Тогда полученный результат может быть сформулирован следующим образом: при частичном преобразовании переменных (5.3) частичная союзная система инвариантно связана со своей формой.

Вернемся теперь к проблеме канонических преобразований уравнений движения управляемой механической системы.

Докажем теорему. Если преобразование (5.1) удовлетворяет тождественно (в пространстве переменных q, p, u, t) соотношению

$$\sum p_\alpha^* \, dq_\alpha^* = \sum p_\alpha \, dq_\alpha + K dt + \sum K_\nu \, du_\nu + dW \tag{5.6}$$

где K, K_ν и W — некоторые функции обобщенных координат, импульсов, времени и параметров управления, то преобразование (5.1) — каноническое. Действительно, тождество (5.6), будучи переписано в виде

$$\sum p_\alpha^* dq_\alpha^* - (H + K)\, dt - \sum K_\nu du_\nu - dW = \sum p_\alpha dq_\alpha - H dt$$

означает, что в результате преобразования (5.1) форма, стоящая в правой части, преобразуется в форму, стоящую в левой части.

Легко проверить, что частичными союзными системами этих форм по преобразуемым переменным будут соответственно система (3.5) и система

$$dq_\alpha^* - \frac{\partial (H + K)}{\partial p_\alpha^*}\, dt - \sum \frac{\partial K_\nu}{\partial p_\alpha^*}\, du_\nu = 0$$

$$dp_\alpha^* + \frac{\partial (H + K)}{\partial p_\alpha^*}\, dt + \sum \frac{\partial K_\nu}{\partial q_\alpha^*}\, du_\nu = 0 \qquad (5.7)$$

В силу доказанного ранее свойства инвариантной связи формы и ее частичной союзной системы, система (5.7) должна получаться в результате преобразования системы (3.5).

С другой стороны, система (5.7) имеет гамильтонов вид

$$\frac{dq_\alpha^*}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha^*}, \qquad \frac{dp_\alpha^*}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha^*} \qquad \left(\Phi = H + K + \sum K_\nu u_\nu'\right) \qquad (5.8)$$

Значит преобразование (5.1) — каноническое. Что и требовалось.

Присутствие в (5.6) неопределенных функций K и K_ν позволяет в качестве условия канонического преобразования вместо (5.6) рассматривать более простое условие

$$\sum p_\alpha^* dq_\alpha^* = \sum p_\alpha dq_\alpha + dW \qquad (5.9)$$

в котором, однако, дифференцирование производится при постоянных t и u_ν. Условие (5.9) удобно для явного представления канонических преобразований через производящие функции. Допустим, что преобразование (5.1) таково, что

$$\frac{\partial (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)}{\partial (p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0$$

Тогда первая группа равенств (5.1) может быть разрешена относительно канонических импульсов p, и, следовательно, за независимые можно принять переменные q и q^*. В этих условиях тождество (5.9) дает

$$p_\alpha^* = \partial W / \partial q_\alpha^*, \qquad p_\alpha = -\partial W / \partial q_\alpha \qquad (5.10)$$

Функция W называется производящей функцией канонического преобразования. Система (3.5) в результате канонического преобразования преобразуется в систему (5.8).

Найдем выражения функций K и K_ν через производящую функцию. Подставим для этого выражения (5.10) в тождество (5.6). Раскрывая в нем dW, находим

$$K = -\partial W / \partial t, \qquad K_\nu = -\partial W / \partial u_\nu$$

Новая функция Гамильтона имеет, таким образом, вид

$$\Phi = H - \frac{\partial W}{\partial t} - \Sigma \frac{\partial W}{\partial u_\nu} u_\nu'$$

Проиллюстрируем полученный результат на простом примере. Пусть имеется каноническая система

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (H = qu + p)$$

Подвергнем ее каноническому преобразованию с производящей функцией $W = uqq^*$. Тогда преобразованная система должна иметь вид

$$\frac{dq^*}{dt}=\frac{\partial \Phi}{\partial p^*}, \qquad \frac{\partial p^*}{dt}=-\frac{\partial \Phi}{\partial q^*} \qquad \left(\Phi = H - \frac{\partial W}{\partial u} u' = [qu + p - qq^* u']\right) \tag{5.11}$$

Квадратная скобка здесь означает переход к новым переменным q^* и p^*. Покажем, что это действительно так. Подставив выражение для W в равенства (5.10), находим явный вид канонического преобразования $p^* = qu$, $p = -q^*u$.

Раскроем теперь в исходной системе функцию H и перейдем в ней к новым переменным. Получим

$$\frac{dq^*}{dt} = 1 - q^* \frac{u'}{u}, \qquad \frac{dp^*}{dt} = u + p^* \frac{u'}{u} \tag{5.12}$$

С другой стороны, раскроем систему (5.11). Функция Φ в переменных p^* и q^* записывается

$$\Phi = p^* - q^*u - q^*p^* \frac{u'}{u}$$

Подставив ее в систему (5.11), приходим снова к системе (5.12). Что и требовалось.

6. До сих пор связи системы считались голономными. Предположим теперь, что уравнения связей (включая параметрические связи) могут зависеть от скоростей точек системы. Пусть $q_1, \ldots, q_s$ — лагранжевы координаты системы и пусть система подчинена неголономным связям

$$F_\gamma (q_1, \ldots, q_s, q_1', \ldots, q_s', t, u_1, \ldots, u_k) = 0 \tag{6.1}$$

Примечание. Не все уравнения системы (6.1) обязательно содержат параметры управления. Вид (6.1) для уравнений неголономных связей системы принят исключительно в целях упрощения выкладок.

Примером системы со связями вида (6.1) является обычный велосипед, катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Чтобы убедиться в этом, составим уравнения связей велосипеда. Положение велосипеда, очевидно, будет задано, если будут заданы координаты x и y центра заднего колеса велосипеда, угол ψ поворота рамы велосипеда вокруг вертикальной оси, наклон θ рамы велосипеда к горизонту, поворот u руля (параметр управления) и углы φ и φ_1 поворота вокруг своих осей соответственно заднего и переднего колес велосипеда. Для простоты будем считать, что рама велосипеда остается вертикальной. В этом случае уравнения связей, которым подчинено заднее колесо велосипеда, будут

$$x' + a\varphi' \cos\psi = 0, \qquad y' + a\varphi' \sin\psi = 0 \tag{6.2}$$

где a — радиус колеса велосипеда. Приняв во внимание, что координаты центра переднего колеса велосипеда будут

$$x + b\cos\psi, \quad y + b\sin\psi$$

где b — расстояние между центрами колес, имеем для связей переднего колеса велосипеда аналогичные уравнения

$$(x + b\cos\psi)' + a\varphi_1' \cos(\psi + u) = 0, \qquad (y + b\sin\psi)' + a\varphi_1' \sin(\psi + u) = 0$$

Эти уравнения легко преобразуются к следующему окончательному виду

$$\varphi' + \varphi_1' \cos u = 0, \qquad b\psi' + a\varphi_1' \sin u = 0 \tag{6.3}$$

Уравнения (6.2) и (6.3) образуют полную систему неголономных связей велосипеда. Они, очевидно, имеют вид уравнений (6.1).

Обобщая определение возможных перемещений, принятое для голономных управляемых систем (соотношения (1.3)), определим возможные перемещения управляемой системы при наличии связей (6.1) соотношениями

$$\sum \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha = 0 \tag{6.4}$$

Напишем уравнения движения системы при связях (6.1). После введения лагранжевых координат основное уравнение механики запишется

$$\sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0 \tag{6.5}$$

В случае, когда связи (6.1) отсутствуют, все δq_α независимы, и из соотношения (6.5) следуют уравнения Лагранжа для голономной системы. В рассматриваемом случае неголономной системы величины δq_α не являются более независимыми. Они стеснены соотношениями (6.4). В этом случае из (6.5) легко получаются уравнения движения системы со множителями. Они имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \sum \lambda_\gamma \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_\alpha} \tag{6.6}$$

где λ_γ — подлежащие определению множители.

Уравнения движения неголономной управляемой системы могут быть записаны также в форме уравнений Аппеля. Для этого дополним уравнения (6.1) соотношениями

$$\Phi_\varkappa (q_1, \ldots, q_s, q_1', \ldots, q_s', t, u_1, \ldots, u_k) = \omega_\varkappa \tag{6.7}$$

таким образом, чтобы система соотношений (6.1) и (6.7) была разрешимой относительно производных $q_1', \ldots, q_s'$. Учитывая, что величины $\omega_\varkappa$ означают численные значения функций $\Phi_\varkappa$ при значениях аргументов, удовлетворяющих уравнениям связей (6.1), заключаем в силу сделанного предположения относительно (6.7), что соотношения (6.1) и (6.7) устанавливают взаимно однозначное соответствие между произвольными величинами $\omega_\varkappa$ и многообразием кинематически допустимых скоростей системы. В одну сторону это соответствие дается (6.7), в другую — соотношениями

$$q_\alpha' = \varphi_\alpha (q_1, \ldots, q_s, \omega_1, \ldots, \omega_{s-c}, t, u_1, \ldots, u_k) \tag{6.8}$$

получающимися путем разрешения соотношений (6.1) и (6.7).

Определим величины $\delta\vartheta_\varkappa$ равенствами

$$\delta\vartheta_\varkappa = \sum \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha \tag{6.9}$$

Вместе с (6.4) соотношения (6.9) устанавливают взаимно однозначное соответствие между произвольными величинами $\delta\vartheta_\varkappa$ и возможными перемещениями системы. Действительно, всякому возможному перемещению системы в силу равенств (6.9) соответствует определенная система величин $\delta\vartheta_\varkappa$. С другой стороны, определитель системы (6.4) и (6.9) будет якобианом системы (6.1) и (6.7), а последний отличен от нуля. Следовательно, система соотношений (6.4) и (6.9) может быть разрешена относительно δq_α и, значит, каждой системе значений $\delta\vartheta_\varkappa$ соответствует возможное перемещение механической системы.

Нетрудно видеть, что равенства, выражающие δq_α через $\delta\vartheta_\varkappa$, могут быть записаны в виде

$$\delta q_\alpha = \sum \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \omega_\varkappa} \delta\vartheta_\varkappa \qquad (6.10)$$

Для доказательства подставим последние выражения для δq_α в соотношения (6.4). Получим

$$\sum \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_\alpha'} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \omega_\varkappa} \delta\vartheta_\varkappa = 0 \qquad (6.11)$$

Но в силу (6.4) и (6.8)

$$\sum \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_\alpha'} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \omega_\varkappa} = 0$$

Поэтому равенства (6.11) выполняются тождественно по $\delta\vartheta_\varkappa$. Что и требовалось.

Введем в рассмотрение энергию ускорений S (q_1, q', q'', t, u, u'). Тогда основное уравнение механики может быть представлено в виде (4.1).

Отметим, что из равенств (6.8) вытекают тождества

$$\frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial \omega_\varkappa'} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \omega_\varkappa}$$

и, следовательно, равенства (6.10) могут быть записаны

$$\delta q_\alpha = \sum \frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial \omega_\varkappa'} \delta\vartheta_\varkappa \qquad (6.12)$$

В предположении равенств (6.10) и (6.12) преобразуем теперь основное уравнение механики (4.1). Имеем

$$\sum \left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha''} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = \sum \frac{\partial S}{\partial q_\alpha''} \frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial \omega_\varkappa'} \delta\vartheta_n - \sum Q_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \omega_\varkappa} \delta\vartheta_\varkappa =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial S^*}{\partial \omega_\varkappa'} - Q_\varkappa^* \right) \delta\vartheta_\varkappa = 0 \quad \left(Q_\varkappa^* = \sum Q_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \omega_\varkappa} \right) \qquad (6.13)$$

где S^* — энергия ускорений, преобразованная к переменным $\omega_\varkappa$.

Равенство (6.13) выполняется для всех $\delta\vartheta_\varkappa$. Учитывая, что последние совершенно произвольны, получаем из (6.13)

$$\frac{\partial S^*}{\partial \omega_\varkappa'} - Q_\varkappa^* = 0$$

Это и есть искомые уравнения. Выбор величин $\omega_\varkappa$ связан с соотношениями (6.7), которые задаются практически произвольно. В качестве величин $\omega_\varkappa$ поэтому вполне могут быть взяты независимые из производных q_α'. В этом случае уравнения движения рассматриваемой управляемой системы записываются полностью через лагранжевы координаты системы.

Поступила 7 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Киргетов В. И. О кинематически управляемых механических системах. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
2. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. ИЛ, 1951, т. II, ч. 2.