Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО СВОЙСТВАМ ИХ КОРНЕЙ

Л. М. Мархашов

(Москва)

1°. Рассматривается семейство алгебраических уравнений

$$P_n(z,\ a) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad z \in K; \qquad (a_1 \ldots, a_n) \in D \qquad (1.1)$$

при фиксированном n; K — комплексная плоскость, D — вещественное эвклидово пространство. Ряд задач устойчивости и автоматического регулирования приводится, как известно, к изучению свойств корней уравнения (1.1) в зависимости от его коэффициентов как параметров.

В работе изучается некоторый класс Ω таких свойств.

Предполагается, что условия их сохранения могут быть выражены через условия инвариантности конечного числа дифференцируемых соотношений между $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ относительно некоторой группы Ли G преобразований поля K в себя. Так, сохранение условий Гурвица обеспечивается условием инвариантности уравнения $x = 0$ при всех преобразованиях некоторой группы G_1' (преобразования G_1 оставляют на месте мнимую ось плоскости z); ненарушение условий вещественности корней обеспечено условием инвариантности уравнения $y = 0$ при всех преобразованиях некоторой (другой) группы G_2' (преобразования G_2' составляют на месте вещественную ось); условие сохранения (конечного) числа корней любого уравнения будет выполнено, если подвергнуть плоскость z преобразованиям любой непрерывной (локально) группы преобразований, и т. д.

Примером свойств, не принадлежащих классу Ω, является свойство корней уравнения выражаться рационально или в радикалах через коэффициенты a.

Точки пространства D, для которых выполняется данное свойство $\omega \in \Omega$, будем в дальнейшем называть эквивалентными по ω, а все множество таких точек — областью эквивалентности по ω.

Цель работы — нахождение границ областей эквивалентности. Обсуждаются также некоторые смежные вопросы.

Идея работы заключается в следующем.

Пусть наряду с некоторой группой G преобразований поля K в себя существует изоморфная ей группа G_a преобразований в себя пространства D (так, что преобразования G не зависят от a, а преобразования G_a не зависят от z), причем G и G_a таковы, что преобразования расширенной группы $G + G_a$ сохраняют уравнение (1.1). Тогда каждому соотношению в K инвариантному относительно G отвечает некоторое соотношение (одно, либо несколько) в D инвариантное относительно G_a, а между соответствующими системами интранзитивности в K и D устанавливается однозначное соответствие.

Этот факт имеет место также и для любой пары изоморфных подгрупп $G' \leftrightarrow G_a'$, $G' \subset G$, $G_a' \subset G$. Если группа G бесконечна и $\omega \in \Omega$, то найдется подгруппа $G' \subset G$, сохраняющая это свойство, и изоморфная с ней подгруппа $G_a' \subset G_a$.

Группу G назовем основной.

В силу сказанного выше ω реализуется тогда и только тогда, если область эквивалентности по ω совпадает со строго определенными системами интранзитивности группы G_a'. Если группа G_a' транзитивна, то определение искомых границ приводится к нахождению особых инвариантных многообразий G_a'. Последнее можно сделать стандартным алгебраическим приемом. Цель работы достигается указанием базиса алгебры Ли, позволяющего решать в замкнутом виде некоторые задачи нахождения инвариантных многообразий G_a'. Под транзитивностью всюду понимается локальная транзитивность в точках общего положения.

Рассмотрения ведутся в рамках алгебр Ли инфинитезимальных операторов. Предполагается возможность распространения некоторых фактов теории конечных групп Ли, используемых в этой работе [1,2], на бесконечные группы. В частности, — факта существования группы, соответствующей бесконечной алгебре. Все встречающиеся функции, ради простоты, предполагаются аналитическими (их достаточно считать трижды дифференцируемыми [1]). Всюду, где не оговорено, применяются немые индексы суммирования. Величины, возводимые в степень, берутся в скобки.

2°. Рассмотрим уравнение

$$f(z,\ a) = 0,\quad z \in K,\quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in D \tag{2.1}$$

о числе решений которого известно, что оно равно числу параметров a при любых $a \in D$. Пусть $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ — корни уравнения (2.1).

В соответствии с общепринятым определением, параметры a входят в выражения для λ^i существенным образом, если

$$\det \| f_j^i \| \neq 0, \qquad f_j^i = \frac{\partial f(\lambda^i,\ a)}{\partial a_j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

для любой точки $a \in D$ общего положения. В противном случае существует по крайней мере одна такая система функций

$$\zeta^1(a), \ldots, \zeta^n(a) \tag{2.3}$$

не все среди которых тождественные нули, что имеет место тождество

$$\zeta^j(a) \frac{\partial f(\lambda^i,\ a)}{\partial a_j} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Лемма 2.1. Если все параметры уравнения (2.1) существенны, то существует такая бесконечная группа G преобразований K в себя и такая изоморфная ей группа G_a преобразований D в себя, что расширенная группа $G + G_a$ сохраняет уравнение (2.1); группа G_a транзитивна, а группа G кратно транзитивна любое число раз.

Доказательство. Обозначим через

$$Z_i = \xi_i(z) \frac{\partial}{\partial z}, \qquad A_i = \zeta_i^j(a) \frac{\partial}{\partial a_j}, \qquad X_i = Z_i + A_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

соответственно инфинитезимальные операторы групп G, G_a, $G + G_a$. Чтобы получить бесконечную алгебру Ли G группы G, очевидно, достаточно выбрать в качестве $\xi_i(z)$ любой базис пространства достаточно широкого класса функций. Пусть такой базис выбран в классе аналитических функций. В силу линейной независимости функций $\xi_i(z)$ при всяком конечном k ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1(u^1) \ldots \xi_1(u^k) \\ \xi_2(u^1) \ldots \xi_2(u^k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|$$

равен k, откуда вытекает k-кратная транзитивность группы G.

Компоненты $\zeta_m^j(a)$ определим равенствами

$$\zeta_m^j(a)\frac{\partial f(z,a)}{\partial a_j} + \xi_m(z)\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\Big|_{z=\lambda^i(a)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, \ldots, n \\ m = 0, 1, \ldots \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

где $\lambda^i = \lambda^i(a)$—решения уравнения (2.1). В силу (2.2) существуют и единственные функции $f^{*\beta}_j$, удовлетворяющие уравнениям

$$f_i^j f^{*\beta}_j = \delta_i^\beta \qquad (\delta_i^\beta\text{—символ Кронекера})$$

Разрешая (2.4), получим однозначно

$$\zeta_m^j(a) = -\sum_{i=1}^n f^{*j}_i\left[\xi_m(z)\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]_{z=\lambda^i(a)} \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует в силу $f(z,a) = 0$

$$X_m f(z,a) = 0 \tag{2.6}$$

Если $X_\alpha f(z,a) = 0$, $X_\beta f(z,a) = 0$ в силу $f(z,a) = 0$, то $(e_1 X_\alpha + e_2 X_\beta) f(z,a) = 0$ и легко доказать, что

$$(X_\alpha, X_\beta) f(z,a) = 0 \tag{2.7}$$

в силу того же соотношения.

В самом деле, если справедливо (2.6), то найдется такая функция $\mu(z,a)$ и натуральное число s, что

$$Xf(z,a) \equiv \mu(z,a)\,[f(z,a)]^s$$

Тогда

$$(X_\alpha, X_\beta) f \equiv (s_\beta - s_\alpha)\mu_\alpha\mu_\beta f^{s_\alpha+s_\beta-1} + f^{s_\beta}X_\alpha\mu_\beta - f^{s_\alpha}X_\beta\mu_\alpha$$

что при достаточно общих качественных ограничениях на $\mu(z,a)$ и доказывает (2.7).

Следовательно, операторы X_m действительно образуют алгебру Ли $G + G_a$. Из однозначности решения (2.5) можно заключить, что алгебры G и G_a изоморфны. Соотношения (2.6) показывают, что преобразования группы $G + G_a$ сохраняют уравнение (2.1). Из (2.5) получаем

$$\det\|\zeta^m(a)\| = -\det\|f^{*j}_i\|\cdot\det\|\xi_m(\lambda^i)\|\cdot\prod_{\gamma=1}^n \frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\Big|_{z=\lambda^\gamma(a)} \neq 0 \qquad (m=m_1,\ldots,m_n) \tag{2.8}$$

для любой точки $a \in D$ общего положения, поскольку имеет место (2.2), группа G кратно транзитивна, и в точке a общего положения уравнение (2.1) не может иметь кратных корней (и, значит, $\partial f/\partial z \neq 0$ при $z = \lambda^\gamma$). Из (2.8) следует транзитивность группы G_a. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.1 легко обобщается на случай системы уравнений.

Отметим без доказательства, что справедливо несколько более общее предложение: если уравнение (2.1) содержит $\rho > n$ параметров, из которых n существенны, то существует бесконечная группа G преобразований K в себя и ее гомоморфный прообраз — группа G_a преобразований D в себя; группы эти таковы, что расширенная группа $G + G_a$ сохраняет уравнение (2.1), причем группа G кратно транзитивна любое число раз, группа G_a — интранзитивна и допускает ровно $\rho - n$ абсолютных инвариантов.

Ядру гомоморфизма H отвечает идеал $\boldsymbol{H}$ алгебры $\boldsymbol{G}_a$, образованный $\rho - n$ операторами с компонентами (2.3), и, согласно известной теореме [1] (см. 22), группа G изоморфна факторгруппе G_a/H.

Так как лемма 1 справедлива при любом выборе бесконечной алгебры $\boldsymbol{G}$, то при данном выборе $\boldsymbol{G}$ она останется справедливой и для всякой бесконечной подалгебры $\boldsymbol{G}' \subset \boldsymbol{G}$, и, следовательно,— отвечающей ей бесконечной подгруппы $G' \subset G$, если таковые существуют.

Уточним данное в пункте 1° определение класса Ω изучаемых свойств корней уравнения (2.1). Рассмотрим всевозможные системы кривых на плоскости z

$$\Phi_i(x, y) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{2.9}$$

Пусть система эта такова, что существует такая бесконечная совокупность попарно сопряженных гармонических функций $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, что в силу $\Phi_i = 0$

$$Y\Phi_i \equiv \xi(x, y)\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

Класс Ω состоит из свойств корней уравнения (2.1) сохранять свое распределение между областями плоскости z, ограниченными какой-либо системой кривых (2.9), в том числе — между самими этими кривыми и их дугами.

В пункте 3° будет показано, что класс Ω не пуст.

Из этого определения автоматически следует, что если $\omega \in \Omega$, то существует бесконечная подгруппа $G' \subset G$, сохраняющая свойство ω.

Свойства класса Ω являются в некотором смысле «свойствами положения». Легко представить себе, однако, свойства более сложной природы, интересные для приложений. Это свойства, выражающиеся в виде некоторых зависимостей между вещественными и мнимыми частями самих корней уравнения. Таково, например, свойство, заключающееся в определенном чередовании вещественных и пар комплексно-сопряженных корней. В этом случае преобразования группы G сами должны зависеть от расположения корней на плоскости z, т. е. от a.

Пусть в рассматриваемом примере $x_1 + iy_1$, $x_1 - iy_1$, x_2 какие-нибудь корни уравнения (2.1). Введем обозначения $\psi_1 \equiv x_1 - x_2$, $\psi_2 \equiv \operatorname{Re} f(z, a)$, $\psi_3 \equiv \operatorname{Im} f(z, a)$.

Преобразования плоскости z не будут нарушать характер чередования корней, если потребовать выполнения условия $Y\psi_1 = 0$ в силу $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$.

Это требование выделяет из G бесконечную подгруппу, сохраняющую чередование корней. Эту подгруппу нетрудно построить.

Лемма 2.2. Если некоторое свойство $\omega \in \Omega$ корней уравнения (2.1) выполняется в данной фиксированной точке a°, то оно также выполняется во всей области интранзитивности $M \ni a^\circ$ подгруппы $G_a' \subset G_a$, сохраняющей ω.

Доказательство. Из (2.2) вытекает взаимно однозначное соответствие между λ^i и a. В силу (2.4) это соответствие сохраняется и для $\lambda^{i'} \leftarrow \lambda^i$, $a' \leftarrow a$, полученных из λ^i и a при помощи всевозможных преобразований группы $G + G_a$. Поэтому, если бы оказалось, что существует точка $a^1 \in M$, для которой соответствующие λ^i свойством R не обладают, то это означало бы, что преобразования группы G' против предположения ω не сохраняют.

Из лемм 2.1 и 2.2 и способа получения уравнений особых инвариантных многообразий транзитивных групп вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. Области эквивалентности по $\omega \in \Omega$ совпадают с системами интранзитивности G_a', сохраняющей ω, которые n-мерны и разделены гиперповерхностями, на которых обращаются в нуль все миноры порядка n векторной матрицы $\| \zeta_m^j(a) \|$ группы G_a'.

3°. Рассмотрим вопросы выбора G и основанного на этом вычисления алгебры G_a.

Уравнение (1.1) удовлетворяет условию леммы 2.1. Найдем для него алгебру $G+G_a$. Зададим G в виде

$$Z_m \equiv z^m \frac{\partial}{\partial z} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

Операторы (3.1) действительно образуют алгебру, так как

$$(Z_m, Z_l) = (l-m) Z_{l+m-1}$$

Компоненты $\zeta_m^j(a)$ операторов алгебры G_a найдем следующим способом. Чтобы уравнение (1.1) допускало группу $G+G_a$, достаточно, чтобы для всякого натурального m нашелся такой полином степени $m-1$

$$p_{m-1}(z, a) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \alpha_{m-\nu} z^\nu$$

чтобы тождественно по z и a выполнялось условие

$$X_m P_n \equiv z^m \frac{\partial P_n}{\partial z} + \zeta_m^j(a) \frac{\partial P_n}{\partial a_j} \equiv p_{m-1} P_n \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.2) левую часть уравнения (1.1), получаем

$$\sum_{h=m}^{n+m-1} (h-m+1) a_{n+m-h-1} z^h + \sum_{h=0}^{n-1} \zeta_m^{n-h}(a) z^h = \sum_{h=0}^{n+m-1} \Big(\sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} \Big) z^h$$

Отсюда, приравнивая нулю альтернированные коэффициенты при различных степенях z, найдем

при $m \leqslant n-1$

$$\zeta_m^{n-h}(a) = \sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} \qquad (0 \leqslant h \leqslant m-1)$$

$$\zeta_m^{n-h}(a) = \sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} - (h-m+1) a_{n+m-h-1} \qquad (m \leqslant h \leqslant n-1)$$

$$0 = \sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} - (h-m+1) a_{n+m-h-1} \qquad (n \leqslant h \leqslant n+m-1)$$

при $m \geqslant n$

$$\zeta_m^{n-h}(a) = \sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} \qquad (0 \leqslant h \leqslant n-1)$$

$$0 = \sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} \qquad (n \leqslant h \leqslant m-1)$$

$$0 = \sum_{k+\nu=h} a_{n-k}\alpha_{m-\nu-1} - (h-m+1) a_{n+m-h-1} \qquad (m \leqslant h \leqslant n+m-1)$$

Нетрудно проверить, что для произвольного m соответствующая система дает для $\zeta_m^j(a)$ единственное решение в виде полиномов от a.

Тот же результат получим, рассматривая формулы Виета

$$\varphi_1 \equiv a_1 + (\lambda^1 + \ldots + \lambda^n) = 0, \ldots, \varphi_n \equiv a_n + (-1)^{n+1} \lambda^1 \ldots \lambda^n$$

и учитывая, что в силу $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$

$$X_i \varphi_j = 0$$

Таким образом, в силу $\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0$ получим

$$\zeta_m^{\,1}(a) + (\lambda^1)^m + \ldots + (\lambda^n)^m = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\zeta_m^{\,n}(a) + (-1)^{n+1}\,[(\lambda^1)^m \ldots \lambda^n + \ldots + \lambda^1 \ldots (\lambda^n)^m] = 0$$

Совокупности слагаемых в левых частях, зависящие от λ^i, в силу теоремы о симметрических многочленах рационально выражаются через основные симметрические многочлены, т. е. через $a_1, \ldots, a_n$.

Фактически нет нужды вычислять функции $\zeta_m^j(a)$ по приведенным формулам для больших значений m; достаточно лишь кроме операторов A_0, A_1, A_2, отвечающих дробно-линейной группе преобразований z, найти только A_3. После этого остальные операторы A могут быть вычислены при помощи коммутирования A_m с A_3 $(m = 2, 3, \ldots)$. Компоненты A_3 могут быть определены по формулам

$$\zeta_3^j(a) = \sum_{k+\nu+j=n} a_{n-k}\alpha_{2-\nu} - (n-j-2)\,a_{2+j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-3)$$

$$\zeta_3^j(a) = \sum_{k+\nu+j=n} a_{n-k}\alpha_{2-\nu} \qquad (n-2 \leqslant j \leqslant n)$$

$$(\alpha_0 = a_1^2 - 2a_2, \quad \alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = n)$$

Во многих случаях бывает удобно перейти от переменных $a_1, \ldots, a_n$ к эквивалентной системе переменных

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} (\lambda^i)^k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

пользуясь рекуррентными формулами Ньютона. Тогда вместо алгебры G_a получим изоморфную ей алгебру G_s

$$\zeta_m^{\,k}(s) = \sum_{i=1}^{n} k\,(\lambda^i)^{k-1}(\lambda^i)^m = \sum_{i=1}^{n} k\,(\lambda^i)^{k+m-1} = ks_{k+m-1} \tag{3.3}$$

Элементы алгебры $G + G_s$ получают вид

$$X_m = z^m \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{n} ks_{k+m-1}\frac{\partial}{\partial s_k} \tag{3.4}$$

Пользуясь базисом G, можно построить подалгебры, полезные при рассмотрении некоторых трансцендентных уравнений, удовлетворяющих условию леммы 2.1. Базис

$$\cos mz \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \sin mz \frac{\partial}{\partial z} \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{3.5}$$

может быть формально получен из (3.1) суммированием

$$\cos mz = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\,\xi_{2k}(mz), \qquad \sin mz = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!}\,\xi_{2k-1}(mz)$$

либо переходом в старом базисе к новой переменной. Таким же путем может быть получен, в частности, и такой базис

$$e^{mz}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.6}$$

Применение базисов (3.5) и (3.6) к уравнению (1.1) приводит к трансцендентным выражениям для составляющих $\zeta_m^j(a)$ алгебры G_a.

Базис (3.6) может быть использован при исследовании уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} e^{\nu z} = 0, \qquad a_0 = 1$$

для получения $\zeta_m^j(a)$ в виде полиномов от a. Однако написанное уравнение не отличается существенно от уравнения (1.1) и может быть получено из него переходом к другой переменной $z \to e^z$, так же как алгебра экспоненциального уравнения — из алгебры уравнения (1.1).

Больший интерес представляет непосредственное нахождение алгебры G_a из (3.5) для тригонометрического уравнения

$$f(z, a) \equiv a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu z + b_\nu \sin \nu z) = 0 \qquad (a_n^2 + b_n^2 = 1) \tag{3.7}$$

Требуя выполнения (3.2), где следует положить

$$P_n = f, \qquad \xi_m(z) = \sin mz, \qquad P_{m-1} = \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu \cos \mu z + \beta_\mu \sin \mu z)$$

получим

$$\frac{1}{2}\Big[\sum_{\omega=m+1}^{m+n} (\omega - m)\, a_{\omega-m} \cos \omega z - \sum_{\omega=m-1}^{m-n} (m - \omega)\, a_{m-\omega} \cos \omega z +$$

$$+ \sum_{\omega=m+1}^{m+n} (\omega - m)\, b_{\omega-m} \sin \omega z - \sum_{\omega=m-1}^{m-n} (m - \omega)\, b_{m-\omega} \sin \omega z\Big] +$$

$$+ \zeta_0(a, b) + \sum_{\omega=1}^{n} [\zeta_{am}^{\omega}(a, b) \cos \omega z + \zeta_{bm}^{\omega}(a, b) \sin \omega z] =$$

$$= \alpha_0 a_0 + a_0 \sum_{\omega=1}^{m} (\alpha_\omega \cos \omega z + \beta_\omega \sin \omega z) + \alpha_0 \sum_{\omega=1}^{n} (a_\omega \cos \omega z + b_\omega \sin \omega z) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\omega=2}^{m+n} \sum_{\nu+\mu=n} [(a_\nu \alpha_\mu - b_\nu \beta_\mu) \cos \omega z + (b_\nu \alpha_\mu + a_\nu \beta_\mu) \sin \omega z] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\omega=1-m}^{n-1} \sum_{\nu-\mu=\omega} [(a_\nu \alpha_\mu + b_\nu \beta_\mu) \cos \omega z + (b_\nu \beta_\mu - a_\nu \alpha_\mu) \sin \omega z]$$

Отсюда, приравнивая нулю альтернированные коэффициенты при $\cos \omega z$ и $\sin \omega z$, получим единственное решение в виде полиномов от a и b для функций ζ_{am}^j и ζ_{bm}^j, образующих алгебру

$$\sin mz \frac{\partial}{\partial z} + \zeta_{am}^j(a, b) \frac{\partial}{\partial a_j} + \zeta_{bm}^j(a, b) \frac{\partial}{\partial b_j}$$

Вычисления для $\xi_m(z) = \cos mz$ делаются аналогично. Число корней уравнений (3.7) бесконечно (счетно), однако можно удовлетворить условию леммы 2.1, если отождествить между собой все корни этого уравнения, имеющие одинаковую мнимую часть и вещественные части, разнящиеся на число, кратное 2π.

Для системы алгебраических уравнений

$$P_n^i(z^1, \ldots, z^k, a) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

образующие $\xi_m^1(z^1, \ldots, z^k); \ldots ; \xi_m^k(z^1, \ldots, z^k)$ алгебры G можно взять в виде мономов степени m относительно переменных $z^1, \ldots, z^k$. Тогда образующие $\zeta_m^j(a)$ алгебры G_a будут полиномами от $a_1^i, \ldots a_n^i$.

Как видно из изложенного, вид алгебры G_a существенно зависит от выбора алгебры G.

Естественно так воспользоваться произволом, имеющимся в выборе базиса G, чтобы выражения для составляющих $\zeta_m^j(a)$ алгебры G_a получились возможно более простыми (хотя сведение последних к полиномам и не всегда возможно).

Вторым существенным требованием к G является возможность выделения из G бесконечной подалгебры, сохраняющей изучаемое свойство корней уравнения (2.1) (в частности (1.1)).

4°. Воспользуемся алгеброй

$$\xi_m(z)\frac{\partial}{\partial z} \equiv z^m\frac{\partial}{\partial z}$$

рассмотренной в пункте 3°, для изучения некоторых свойств корней уравнения (1.1).

Группа (3.1) реализует в плоскости $z = x + iy$ следующее представление. Пусть τ — канонический параметр любой однопараметрической подгруппы G. Тогда, из уравнений Ли $\partial z' / \partial\tau = z'^m$ следует

$$\frac{\partial x'}{\partial\tau} + i\frac{\partial y'}{\partial\tau} = \operatorname{Re} z'^m + i \operatorname{Im} z'^m$$

Приравняв в этом уравнении вещественные и мнимые части, получим алгебру искомого представления

$$\xi_m(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_m(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \xi_m(x, y) = \operatorname{Re} z^m, \qquad \eta_m(x, y) = \operatorname{Im} z^m$$

В полярных координатах ρ, φ $(z = \rho e^{i\varphi})$

$$\eta_{\rho m}(\rho, \varphi)\frac{\partial}{\partial\rho} + \eta_{\varphi m}(\rho, \varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (m = 0, 1, \ldots) \qquad (4.1)$$

$$\eta_{\rho m}(\rho, \varphi) = \rho^m\cos(m-1)\varphi, \qquad \eta_{\varphi m}(\rho, \varphi) = \rho^{m-1}\sin(m-1)\varphi$$

Используем явные выражения для $\eta_{\rho m}$, $\eta_{\varphi m}$ для выделения той бесконечной подгруппы, которая сохраняет каждое из рассматриваемых ниже свойств корней уравнения (1.1).

а) *Вещественность корней.* Число вещественных корней уравнения (1.1) остается неизменным при всех преобразованиях некоторой группы $G' \subset G$, если они сохраняют уравнение $\varphi = 0$. Следовательно, алгебру Ли группы G' образуют те из операторов (3.1), для которых в силу $\varphi = 0$ выполняется условие

$$\eta_{\rho m}(\rho, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \eta_{\varphi m}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} = 0$$

Но оно удовлетворяется тождественно для всех натуральных m так, что G' совпадает с основной группой $G' = G$.

Согласно теореме 2.1, для получения уравнения гиперповерхности, ограничивающей области постоянства числа вещественных корней, нужно найти наибольший делитель всех миноров порядка n матрицы $\|\zeta_m^j(a)\|$.

Согласно (3.4), эта матрица имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} s_0 & 2s_1 & \ldots & ns_{n-1} \\ s_1 & 2s_2 & \ldots & ns_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & 2s_n & \ldots & ns_{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\|$$

Ограничимся рассмотрением верхнего минора. Он содержит, во всяком случае, в качестве множителя искомый наибольший делитель

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

Ганкелев определитель, стоящий в левой части (4.2), будет неприводимым многочленом и совпадает с результантом системы уравнений

$$P_n(z, a) = 0, \qquad \frac{\partial P_n(z, a)}{\partial z} = 0$$

Гиперповерхность (4.2) ограничивает в пространстве D некоторую многополостную область. Каждая полость является областью эквивалентности по числу вещественных корней. Для выделения тех полостей, которым отвечает заданное количество вещественных корней, нужны дополнительные условия. Таким условием для случая, когда все корни вещественны, является, как известно, положительность всех диагональных миноров определителя (4.2). Для получения этих условий (если не предполагать их заранее известными) нужно исследовать геометрию многообразия (4.2) и установить по какой-нибудь одной точке — представителю каждой полости, какому количеству вещественных корней она соответствует.

б) *Устойчивость корней.* Условия Гурвица не будут нарушены, если подвергнуть плоскость z всевозможным преобразованиям, оставляющим на месте мнимую ось. Соответствующую алгебру Ли образуют те из операторов (4.1), для которых в силу равенства $\varphi - {}^1/_2\pi = 0$ выполняется условие

$$\eta_{\rho m}(\rho, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \eta_{\varphi m}(\rho, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} = 0$$

Поэтому должно быть

$$\eta_{\varphi m}(\rho, {}^1/_2\pi) = \rho^{m-1}\sin[{}^1/_2(m-1)\pi] = 0 \quad \text{или} \quad m = 2k + 1 \ (k = 0, 1, \dots)$$

Таким образом, искомая подалгебра G' образована системой операторов (3.1) с нечетным индексом m. Матрица подалгебры G'_s имеет вид

$$\begin{Vmatrix} s_1 & 2s_2 & \dots & ns_n \\ s_3 & 2s_4 & \dots & ns_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{2n-1} & 2s_{2n} & \dots & ns_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

Можно проверить, что верхний минор этой матрицы разлагается на множители

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_3 & s_4 & \dots & s_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{2n-1} & s_{2n} & \dots & s_{3n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Второй из множителей будет определителем Гурвица наивысшего порядка и, в свою очередь, разлагается на два неприводимых множителя. Структура их позволяет в некоторых случаях просто найти сами условия Гурвица.

В качестве примера рассмотрим случай $n = 4$. Проверкой для каких-нибудь фиксированных значений корней, расположенных в левой полуплоскости, установим

$$a_4 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

Следовательно, оба множителя левой части этого неравенства не могут менять знака. Испытание знака этих множителей, произведенное для тех же значений корней, показывает, что оба множителя положительны. Но

$$0 < \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} - a_4 a_1^2 \quad \text{или} \quad a_3 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > a_4 a_1^2 > 0$$

Повторное испытание показывает, что должно быть

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$$

Такой прием применим для любого n. Однако каждый раз должны быть проверены полнота и независимость полученной системы неравенств. Последнее замечание относится также к случаю исследования этим способом других ω, в частности, получению различных модификаций и обобщений критерия Гурвица.

в) *Расположение корней внутри угла* — $^1/_2\mu\pi \leqslant \varphi \leqslant {}^1/_2\mu\pi$. Здесь μ — рациональная дробь, $0 < \mu < 1$. Такое расположение корней не нарушают преобразования, оставляющие на месте пару прямых $\varphi = \pm {}^1/_2\mu\pi$. Легко проверить, что соответствующая подалгебра Ли состоит из операторов (4.1), для которых $m = 2k/\mu + 1$ (k/μ — целое число).

Случаи $\mu = 0$ и $\mu = 1$ уже рассмотрены в подпунктах а) и б).

г) *Принадлежность корней отрезку* [0, 1] *вещественной оси*. Этого свойства корней не нарушают преобразования, которые оставляют на месте вещественную ось и точки $x = 0$, $x = 1$. Подалгебра G' образована операторами

$$z^m (z - 1) \frac{\partial}{\partial z} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Матрица алгебры G_s' имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} 2s_2 - s_1 & 3s_3 - 2s_2 \; \ldots & (n+1) s_{n+1} - n s_n \\ 3s_3 - 2s_2 & 4s_4 - 3s_3 \; \ldots & (n+2) s_{n+2} - (n+1) s_{n+1} \\ 4s_4 - 3s_3 & 5s_5 - 4s_4 \; \ldots & (n+3) s_{n+3} - (n+2) s_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

д) *Перемежаемость вещественных корней пары уравнений*

$$P_n(z, a) = 0, \qquad P_n(z, b) = 0$$

Очевидно, что характер чередования вещественных корней этих уравнений не нарушают никакие преобразования основной группы G. При одинаковых степенях уравнений группа преобразований параметров a, b будет удвоенной группой $G_a + G_b$.

Например, для пары квадратных уравнений матрица этой группы имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2 & a_1 & 2 & b_1 \\ a_1 & 2a_2 & b_1 & 2b_2 \\ 2a_2 - a_1^2 & -a_1a_2 & 2b_2 - b_1^2 & -b_1b_2 \\ a_1^3 - 3a_1a_2 & a_1^2a_2 - 2a_2^2 & b_1^3 - 3b_1b_2 & b_1^2b_2 - 2b_2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\|$$

е) *Расположение корней внутри горизонтальной или вертикальной полосы плоскости z.* Алгебра (3.5) реализует в плоскости xy группу с операторами

$$\cos mx \operatorname{ch} my \frac{\partial}{\partial x} - \sin mx \operatorname{sh} my \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \sin mx \operatorname{ch} my \frac{\partial}{\partial x} + \cos mx \operatorname{sh} my \frac{\partial}{\partial y}$$

алгебра (3.6) — группу с операторами

$$e^{mx} \cos my \frac{\partial}{\partial x} + e^{mx} \sin my \frac{\partial}{\partial y}$$

Отсюда видно, что преобразования группы, отвечающей этим алгебрам, оставляют на месте соответственно вертикальную полосу $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и горизонтальную полосу $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$. Компоненты $\zeta_m^j(a)$ получаются в этом случае целыми трансцендентными функциями; для них могут быть выписаны разложения в ряды по степеням параметров a.

ж) *Знакоопределенность квадратичных форм.* Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi = a_{ij}x^i x^j, \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Очевидно, что преобразования линейной группы

$$x^i = \alpha_{i_1}{}^i x^{i_1}, \qquad \det \| \alpha_{i_1}{}^i \| \neq 0 \qquad (i_1 = 1, \ldots, n)$$

не могут изменить сигнатуру формы Φ.

Получаемая в этом случае конечная алгебра G_a имеет матрицу с элементами

$$(\partial a'_{i_1 i_2} \,/\, \partial \alpha_i{}^j)_{\alpha_i{}^j = \delta_{ij}} = a_{ji_1}\delta_{i_2}{}^i + a_{ji_2}\delta_{i_1}{}^i$$

Миноры этой матрицы (ее ранг равен $^1/_2\, n\,(n+1)$) имеют в качестве наибольшего общего делителя определитель $\det \| a_{ij} \|$.

Уравнение $\det \| a_{ij} \| = 0$ определяет неприводимое многообразие — границу областей эквивалентности по сигнатуре формы Φ. Условия Сильвестра, в частности, выделяют в D области эквивалентности по свойству знакоопределенности формы Φ.

Замечание. Результаты п.п. 2°—4° распространяются на случай комплексных параметров. Если $a = \rho e^{i\varphi}$, то преобразования параметров a_j осуществляются группой G_a с операторами

$$(\operatorname{Re} \zeta_m^j(a) \cos\varphi + \operatorname{Im} \zeta_m^j(a) \sin\varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \zeta_m^j(a) \cos\varphi - \operatorname{Re} \zeta_m^j(a) \sin\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Поступила 21 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. Гостехтеоретиздат, 1954.
2. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. Гостехиздат, 1940.