Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О ВНУТРЕННЕЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ПОЧТИ ОДИНАКОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛАБЫХ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Рассматривается общий случай почти одинаковых объектов, синхронизирующихся под действием слабых линейных связей. Получены условия существования и устойчивости синхронных движений и уравнения для определения «порождающих фаз».

Почти во всех областях науки и техники приходится иметь дело с системами нескольких согласованно функционирующих динамических объектов [1]. О согласованных, или синхронных, движениях объектов в системе будем говорить в случае совпадения основных параметров, характеризующих «ритм» движений этих объектов. Для периодических движений речь идет о совпадении их периодов. Синхронизация объектов осуществляется посредством связей между ними в широком смысле этого слова.

В дальнейшем точно так же, как и в работе [1], будем выделять случай «сильных» связей, посредством которых на объект может быть передано весьма значительное воздействие. Случай такой синхронизации в определенном смысле тривиален и, в частности, сводится к тому, что задание движения одного из объектов необходимым образом определяет движение всех прочих объектов.

Основной интерес представляет синхронизация под действием слабых связей, воздействия которых на объекты малы и весьма незначительно искажают характер движения объектов. Ввиду этого понятно, что система со слабыми связями может быть приведена в синхронизм, вообще говоря, лишь в случае, когда в первоначально изолированных, не связанных один с другим объектах возможны движения, близкие по крайней мере в течение конечного, но достаточно большого промежутка времени, к искомым синхронным. Иными словами, величины, характеризующие степень несинхронности системы первоначально изолированных объектов, должны быть того же порядка малости, что и параметр, отражающий «силу» связей. Понятно, что этому условию удовлетворяют прежде всего системы почти одинаковых объектов.

Необходимо отметить, что в системе изолированных, автономных объектов возможно бесчисленное множество движений, близких к синхронным. В самом деле, почти синхронные движения, реализуемые в системе изолированных объектов, могут быть в силу автономности совершенно произвольно сдвинуты одно относительно другого по фазе. Это множество движений представляет собой семейство, зависящее по крайней мере от m произвольных постоянных, где m — общее число объектов. Если отвлечься от незначительной несинхронности движений изолированных объектов, то возникает вопрос о выборе из этого семейства такого движения [2], которое качественно и количественно близко к искомому синхронному режиму во взаимосвязанной системе. Это собственно и определяет сущность задачи о самофазировке, которая всегда сопутствует основной задаче о выявлении областей существования и устойчивости синхронных режимов движения системы динамических объектов под действием слабых связей.

[1] Многочисленные примеры подобных систем, а также обширная библиография приводятся в работе И. И. Блехмана [1].

[2] В задачах о синхронизации движения, возможные в каждом объекте при отсутствии связей, предполагаются известными; обычно их нахождение не представляет затруднений.

§ 1. В дальнейшем будем полагать, что движение взаимосвязанной системы объектов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с малым параметром. При этом будем пользоваться теоремой о существовании и устойчивости решений определенного вида, которая является обобщением соответствующей теоремы, приведенной в монографии И. Г. Малкина [2]. Опускаем доказательство этой теоремы, так как оно проводится аналогично, и ограничиваемся лишь ее формулировкой.

Допустим, что имеется автономная система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n) + \mu f_s(x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где функции X_s и f_s аналитичны относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ и малого параметра μ в некоторой области G. Кроме того, будем полагать, что функции X_s и f_s 2π периодичны по переменным $x_1, \ldots, x_l$ $(l \leqslant n)$.

Порождающая система

$$\frac{dx_s^\circ}{dt} = X_s(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

допускает семейство решений вида

$$x_s^\circ = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_k) \tag{1.3}$$

зависящее, кроме постоянной h, которая может быть добавлена к t, от k произвольных постоянных $h_1, \ldots, h_k$. При этом пусть

$$\begin{aligned} \varphi_s(t+T) &= 2\pi + \varphi_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, l) \\ \varphi_s(t+T) &= \varphi_s(t) \qquad (s = l+1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где период T не зависит от постоянных $h_1, \ldots, h_k$.

При сделанных предположениях τ — периодические и линейно возрастающие решения системы (1.1), обращающиеся при $\mu = 0$ в решения порождающей системы (1.2) вида $\varphi_s(t, h_1^*, \ldots, h_k^*)$, возможны, если постоянные $h_1^*, \ldots, h_k^*$ удовлетворяют системе

$$P_i(h_1^*, \ldots, h_k^*) = \sum_{\beta=0}^{n} \int_0^T f_\beta [\varphi_1(t, h_1^*, \ldots, h_k^*), \ldots, \varphi_n(t, h_1^*, \ldots h_k^*), 0] \, \psi_{\beta i}(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{1.5}$$

Здесь функции $\psi_{\beta i}(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ есть T-периодические решения линейной системы, сопряженной с уравнениями в вариациях системы (1.2)

$$\frac{dz_s}{dt} + p_{1s} z_1 + \ldots + p_{ns} z_n = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

$$p_{sj} = \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right)_{x_r = \varphi_r(t, h_1^*, \ldots, h_k^*)} \tag{1.6}$$

Кроме того, функции $\psi_{\beta i}(t)$ должны удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha(t, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} \psi_{\alpha i}(t) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \\ &\sum_{\alpha=1}^{n} \dot\varphi_\alpha(t, h_1^*, \ldots, h_k^*) \psi_{\alpha i}(t) = \begin{cases} 0 & (i \neq k+1) \\ 1 & (i = k+1) \end{cases} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k+1 \\ j = 1, \ldots, k+1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Первое приближение к истинному периоду движения вычисляется по формуле

$$\tau = T + \mu\alpha^* \tag{1.8}$$

$$\alpha^* = -\sum_{\beta=1}^{n}\int_0^T f_\beta[\varphi_1(t, h_1^*, \ldots, h_k^*), \ldots, \varphi_n(t, h_1^*, \ldots, h_k^*)]\,\psi_{\beta k+1}(t)\,dt$$

Для устойчивости такого решения системы (1.1) достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \partial P_1/\partial h_1^* - \varkappa & \ldots & \partial P_1/\partial h_k^* \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \partial P_k/\partial h_1^* & \ldots & \partial P_k/\partial h_k^* - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{1.9}$$

удовлетворяли условиям $\operatorname{Re}\varkappa < 0$.

§ 2. Рассмотрим внутреннюю синхронизацию системы почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей. О внутренней синхронизации обычно говорят в случае, когда посредством связей на объекты не передается никакого внешнего воздействия.

Пусть движение m почти одинаковых объектов во взаимосвязанной системе описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{si}^{\cdot} = X_s(x_{1i}, \ldots, x_{ni}) + \mu\,(f_{si}(x_{1i}, \ldots, x_{ni}) + \\ + \sum_{j=1}^{k} V_{si}^{(j)}(x_{1i}, \ldots, x_{ni})\,u_j) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по времени. Слабые линейные связи будем характеризовать системой

$$u_j^{\cdot} = a_{1j}u_1 + \ldots + a_{kj}u_k + \sum_{r=1}^{m} U_{rj}(x_{1r}, \ldots, x_{nr}) \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{2.2}$$

В уравнениях (2.1) и (2.2) величины Q_{ij} $(l, j = 1, \ldots, k)$ будут постоянными, а функции X_s, f_{si}, $V_{si}^{(j)}$ и U_{rj} таковы, что становится применимой теорема, сформулированная в предыдущем параграфе. Функция f_{si} характеризует степень неодинаковости объектов, а функции $V_{si}^{(j)}$ и U_{rj} — взаимодействие связи с объектами.

В системе одинаковых, изолированных один от другого объектов, которая рассматривается в порождающем приближении

$$\overset{\circ}{x}{}_{si}^{\cdot} = X_s(\overset{\circ}{x}_{1i}, \ldots, \overset{\circ}{x}_{ni}) \qquad (s = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

реализуются одинаковые для всех объектов и вполне определенные с точностью до произвольно фазового сдвига синхронные движения

$$\overset{\circ}{x}_{si} = \varphi_s(t + \alpha_i) \tag{2.4}$$

Функции $\varphi_s(t)$ таковы, что во всяком случае выполняется условие

$$\varphi_s^{\cdot}(t + T) = \varphi_s^{\cdot}(t)$$

Таким образом, период синхронных движений T не зависит от значений произвольных фаз α_i. Кроме того, в силу автономности взаимосвязанной системы одна из фаз, например α_m, может быть принята равной нулю. Будем предполагать, что все корни характеристического уравнения

$$\|a_{ij} - \delta_{ij}\rho\| = 0 \qquad (\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,\ \ \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j) \tag{2.5}$$

имеют отрицательные вещественные части и, таким образом, всегда существует T-периодическое решение для координат связи в порождающем приближении вида

$$u_j^\circ = \sum_{r=1}^{m} u_{rj}(t+\alpha_r) \qquad (j=1,\ldots,k) \tag{2.6}$$

Здесь через $u_{rj}(t)$ обозначена T-периодическая функция, удовлетворяющая линейной системе

$$u^{\cdot}_{rj}(t) = a_{1j}u_{r1} + \ldots + a_{kj}u_{rk} + U_{rj}[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)] \tag{2.7}$$
$$(j=1,\ldots,k,\ r=1,\ldots,m)$$

Уравнения в вариациях порождающей системы

$$y_{si}^{\cdot} = p_{1s}(t+\alpha_i)\,y_{1i} + \ldots + p_{ns}(t+\alpha_i)\,y_{ni} \tag{2.8}$$

$$z_j^{\cdot} = a_{1j}z_1 + \ldots + a_{kj}z_k + \sum_{r=1}^{m}[q_{rj}^{(1)}(t+\alpha_r)\,y_{1r} + \ldots + q_{rj}^{(n)}(t+\alpha_r)\,y_{nr}]$$
$$(s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots m;\ j=1,\ldots,k)$$

где

$$p_{sq}(t) = \frac{\partial X_s[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)]}{\partial\varphi_q(t)}, \qquad q_{rj}^{(s)}(t) = \frac{\partial U_{rj}[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)]}{\partial\varphi_s(t)}$$

допускают m независмых T-периодических решений

$$y_{si}^{(\nu)} = \varphi_s^{\cdot}(t+\alpha_i)\,\delta_{i\nu}, \qquad Z_j^{(\nu)} = u_{\nu j}^{\cdot}(t+\alpha_\nu) \qquad (\nu=1,\ldots,m-1) \tag{2.9}$$

$$y_{si}^{(m)} = \varphi_s^{\cdot}(t+\alpha_i), \qquad Z_j^{(m)} = \sum_{r=1}^{m} u_{rj}^{\cdot}(t+\alpha_r)$$

Последние k уравнений линейной системы, сопряженной с (2.8), имеют вид

$$w_j^{\cdot} + a_{j1}w_1 + \ldots + a_{jk}w_k = 0 \qquad (j=1,\ldots,k) \tag{2.10}$$

и, следовательно, допускают единственное тривиальное T-периодическое решение

$$w_j = 0$$

Поэтому T-периодические решения сопряженной системы, соответствующие координатам объектов, можно искать из системы

$$v_{si}^{\cdot} + p_{s1}(t+\alpha_i)\,v_{1i} + \ldots + p_{sn}(t+\alpha_i)\,v_{ni} = 0 \tag{2.11}$$

Обозначим через $\eta_s(t)$ единственное T-периодическое решение системы

$$\eta_s^{\cdot} + p_{s1}(t)\,\eta_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,\eta_n = 0 \tag{2.12}$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi_1^{\cdot}(t)\,\eta_1(t) + \ldots + \varphi_n^{\cdot}(t)\,\eta_n(t) = 1 \tag{2.13}$$

Тогда очевидно, что система (2.11) также допускает m линейно независимых T-периодических решений вида

$$v_{si}^{\cdot(q)} = \eta_1(t+\alpha_i)\,\delta_{iq} \qquad (q=1,\ldots,m) \tag{2.14}$$

Будем T-периодические решения системы (2.11), удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} y_{si}^{\nu}v_{si}^{(\mu)} = \delta_{\nu\mu} \qquad (\nu,\mu=1,\ldots,m) \tag{2.15}$$

искать в виде линейной комбинации решений (3.14)

$$v_{si}^{(\mu)} = \sum_{q=1}^{m} C_{q\mu}\eta_s(t+\alpha_i)\,\delta_{iq} = C_{i\mu}\eta_s(t+\alpha_i) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{2.16}$$

Матрица, составленная из коэффициентов $C_{i\mu}$, которую можно найти, используя соотношения (2.13) и (2.15), будет невырожденной и имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0\ldots 0 & 0 \\ 0 & 1\ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots 1 & 0 \\ -1 & -1\ldots -1 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{2.17}$$

Уравнения для разыскания неизвестных фаз $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, как это следует из (1.5), будут

$$\begin{aligned} P_\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_0^T \Big\{ f_{si}[\varphi_1(t+\alpha_i), \ldots, \varphi_n(t+\alpha_i)] + \\ + \sum_{j=1}^{k} V_{si}^{(j)}[\varphi_1(t+\alpha_i), \ldots, \varphi_n(t+\alpha_i)]\,u_j^\circ\Big\} v_{si}^{(\mu)}\,dt = 0 \\ (\mu = 1, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Окончательно после несложных преобразований при учете (2.6), (2.16) и (2.17) приходим к основной системе задачи о внутренней самосинхронизации почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей

$$\begin{aligned} P_\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}) = \sum_{s=1}^{n}\int_0^T [(f_{s\mu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) - f_{sm}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)] + \\ + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} [V_{s\mu}^{(j)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,u_{rj}(t+\alpha_r-\alpha_\mu) - \\ - V_{sm}^{(j)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,u_{rj}(t+\alpha_r)]\,\eta_s(t)\,dt = 0 \\ (\mu = 1, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Наличие вещественных решений системы (2.19) относительно фаз $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ будет одновременно условием существования синхронного режима. При этом первое приближение к истинному периоду синхронных движений согласно (1.8) определится по формуле

$$\alpha^* = -\sum_{s=1}^{n}\int_0^T \Big(f_{sm}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} V_{sn}^{(j)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,u_{rj}(t+\alpha_r)\Big)\eta_s(t)\,dt \tag{2.20}$$

Об устойчивости той или иной фазировки синхронных движений можно судить по знакам вещественных частей корней уравнения (2.12).

Поступила 24 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехтеоретиздат, 1956.