Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ПРОБЛЕМА СИНХРОНИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. И. Блехман
(Ленинград)

Отмечается, что синхронизация представляет собой явление, наблюдаемое в поведении как искусственно созданных, так и природных объектов — электрических и ламповых генераторов, механических вибраторов, маятниковых часов, музыкальных инструментов, некоторых биологических систем. Дается общая постановка задачи о синхронизации динамических объектов и рассматриваются ее особенности; перечисляются главные конкретные задачи и приложения. Указывается математический аппарат, пригодный для изучения основного класса проблем синхронизации — задач о согласованном функционировании нескольких почти одинаковых автоколебательных объектов, слабо взаимодействующих один с другим. Наблюдаемая тенденция таких объектов самой разнообразной природы к синхронным движениям находит свое математическое выражение в том факте, что определенная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, как правило, допускает устойчивые периодические решения. Приводится краткий обзор работ по теории синхронизации динамических систем и перечисляются до сих пор не решенные задачи.

Явление синхронизации состоит в том, что несколько искусственно созданных или природных объектов, совершающих при отсутствии взаимодействия колебательные или вращательные движения с различными частотами (угловыми скоростями), при наложении подчас весьма слабых связей начинают двигаться с одинаковыми или кратными частотами (угловыми скоростями), причем устанавливаются определенные фазовые соотношения между соответствующими колебаниями и вращениями.

Частные случаи явления синхронизации давно известны. Х. Гюйгенс в начале второй половины XVII столетия установил, что пара маятниковых часов, ходивших по-разному, самосинхронизировалась, когда их прикрепляли к легкой балке вместо стены [1].

Синхронизацию в акустических и электроакустических системах обнаружил Релей в конце XIX века. Наблюдая две органные трубы с расположенными рядом отверстиями, он установил, что при достаточно малой расстройке трубы звучат в унисон, т. е. происходит взаимная синхронизация обеих автоколебательных систем. Иногда при этом трубы могут заставить полностью «замолчать» одна другую. Аналогичное явление было обнаружено Релеем и для двух камертонов с электромагнитным возбуждением, связанных между собой либо электрически, либо механически при помощи упругой нити, либо, наконец, посредством резонаторного ящика [2].

Позднее — примерно в начале текущего столетия — явления синхронизации были открыты в электрических цепях и в некоторых электромеханических системах. С этими объектами до недавнего времени были связаны главные технические приложения синхронизации (синхронизация электрических и ламповых генераторов).

В 1947—1948 гг. в СССР было обнаружено явление самосинхронизации механических дебалансных вибраторов, установленных на едином вибрирующем органе [3, 4]. Оказалось, что такие вибраторы, представляющие в простейшем случае неуравновешенные роторы, приводимые от каких-либо двигателей асинхронного типа, при определенных условиях работают синхронно, несмотря на возможное различие параметров вибраторов и на отсутствие каких-либо кинематических или электрических связей между их роторами.

В настоящее время самосинхронизация, а также родственное ей явление вибрационного поддержания вращения неуравновешенных роторов [5, 6], находит все более широкое применение в новых конструкциях вибрационных машин как в СССР, так и за его пределами [7, 8, 79].

Эффект вибрационного возбуждения и поддержания вращения, по существу, используется также в ядерной технике при создании циклических ускорителей заряженных частиц [9]. В Советском Союзе предложен и ряд способов принудительной электрической синхронизации и фазировки вращения вибраторов [10, 11].

Наконец, Н. Винер полагает, что явление синхронизации лежит в основе возникновения альфа-ритмов головного мозга, а также делает далеко идущие предположения о роли этого явления в процессах самоорганизации и самовоспроизведения некоторых биологических объектов, в частности — в процессе развития злокачественных опухолей [12].

Техническая задача синхронизации представляет частный случай более общей проблемы — обеспечения согласованного функционирования нескольких объектов. При этом в некоторых случаях синхронизация и определенная фазировка имеют место в силу уже присутствующих в системе естественных связей (в широком смысле этого слова). Так, например, в задаче о синхронизации генераторов электрических или механических колебаний синхронизация зачастую осуществляется за счет свойств самой системы генератор—нагрузка. Такой тип синхронизации обычно называют самосинхронизацией. В других случаях эффект синхронизации и фазировки достигается путем введения дополнительных синхронизирующих элементов (принудительная синхронизация).

Важнейшими примерами задач о синхронизации являются:

1. Получение условий синхронизации и надлежащей фазировки механических вибраторов — одна из узловых проблем, возникающих при разработке новых типов современных вибрационных машин — грохотов, конвейеров, дробилок, мельниц и др.

2. Исследование условий устойчивой параллельной работы нескольких электрических генераторов на общую нагрузку. Эта задача приобретает особое значение в связи с объединением сложных энергетических систем.

3. Получение условий синхронизации и определенной фазировки автоколебаний, возбуждающихся в нескольких ламповых генераторах.

К этому же классу задач приводится исследование особенностей движения вращающихся гибких валов с неуравновешенными дисками; анализ динамики специальных автоматических балансиров для компенсации неуравновешенностей быстро вращающихся роторов; изучение поведения нескольких неуравновешенных машин, установленных на общем фундаменте или на связанных между собой опорных сооружениях; исследование принципов работы ряда акустических приборов, в частности особенностей звучания некоторых музыкальных инструментов; исследование некоторых биологических явлений.

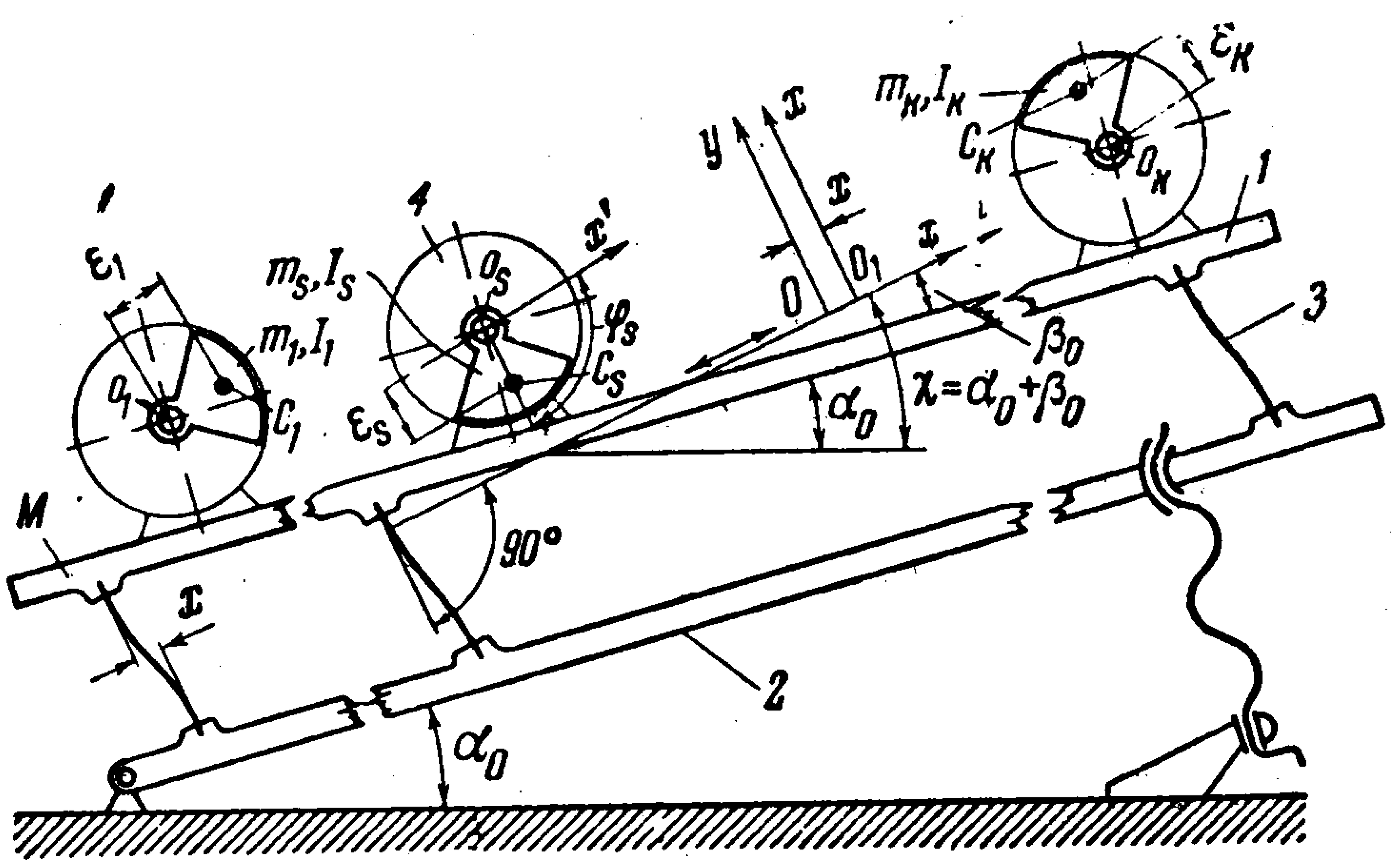
Приведенный краткий обзор истории открытия и технического использования синхронизации показывает, что всюду, где имеются колебательные процессы, рано или поздно возникает задача о синхронизации.

Ниже делается попытка рассмотреть эту задачу в некоторой общей постановке, другими словами, делается попытка изучить общие свойства поведения взаимосвязанных однотипных объектов различной природы.

§ 1. Некоторые задачи о синхронизации динамических объектов.

1. *Синхронизация механических вибраторов.* Задача о синхронизации механических вибраторов — одна из узловых в теории вибрационных машин. Приведем постановку этой задачи для простейшего частного случая — самосинхронизации дебалансных вибраторов, установленных на абсолютно жесткой платформе, имеющей одну степень свободы (фиг. 1).

Вибрирующий орган машины *1* (жесткая платформа) связан с неподвижным основанием *2* системой плоских пружинных опор *3* (рессор). Оси рессор предполагаются нерастяжимыми, и поэтому платформа может поступательно смещаться только в направлении, перпендикулярном этим осям. На платформе установлено некоторое число k дебалансных вибраторов *4*, представляющих собой неуравновешенные роторы, оси которых перпендикулярны плоскости колебаний платформы и которые приводятся во вращение какими-либо двигателями асинхронного типа. Положение системы характеризуется отклонением платформы x от положения статического равновесия и углами поворота роторов вибраторов φ_s, отсчитываемыми по ходу часовой стрелки.



Фиг. 1

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид [3]

$$I_s\varphi_s^{\cdot\cdot} = m_s\varepsilon_s\,[x^{\cdot\cdot}\sin\varphi_s + g\cos(\varphi_s - \chi)] + L_s(\varphi_s^{\cdot}) - R_s(\varphi_s^{\cdot})$$

$$Mx^{\cdot\cdot} + k_x x^{\cdot} + c_x x = -\sum_{s=1}^{k} m_s\varepsilon_s(\cos\varphi_s)^{\cdot\cdot} \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (1.1)$$

Здесь $L_s(\varphi_s^{\cdot})$ — вращающий момент двигателя; $R_s(\varphi_s^{\cdot})$ — момент сил сопротивления вращению ротора вибратора; m_s, ε_s и I_s — соответственно масса, эксцентрицитет и момент инерции относительно оси вращения ротора s-го вибратора; M — масса системы, k_x — коэффициент вязкого сопротивления, c_x — жесткость упругой системы, g — ускорение силы тяжести, χ — угол между направлением оси x и горизонталью.

Задача состоит в установлении условий, при которых все вибраторы будут вращаться с одинаковыми по абсолютной величине средними угловыми скоростями, несмотря на отсутствие каких-либо непосредственных связей между их роторами и на различие параметров, характеризующих вибраторы и действующие на них силы. Иными словами, речь идет о выяснении условий существования и устойчивости, а также о нахождении (хотя бы приближенном) решений системы (1.1) вида

$$\varphi_s = \sigma_s\,[\omega t + \psi_s(\omega t)] \qquad (s = 1, \ldots, k), \qquad x = x(\omega t) \qquad (1.2)$$

Здесь ω — абсолютная величина средней скорости вращения вибраторов; $\psi_s(\omega t)$ и $x(\omega t)$ — периодические функции времени t с периодом $2\pi/\omega$, а каждая из величин σ_s равна либо 1, либо —1; первому случаю отвечает вращение s-го вибратора в положительном, второму — в отрицательном направлениях.

Движения типа (1.2) назовем синхронными; иногда интерес представляет и исследование кратно-синхронных движений, когда среднее значение $|\varphi_s^{\cdot}|$ равно $n_s\,\omega$, где n_s — целые положительные числа.

Модуль угловой скорости синхронного вращения ω заранее не известен и подлежит определению в процессе решения задачи.

Нетрудно видеть, что если в уравнениях (1.1) перейти от зависимых переменных φ_s к новым переменным ψ_s по формулам (1.2) и к «безразмерному времени» $\tau = \omega t$, то задача сведется к установлению условий существования и устойчивости периодических (с периодом 2π) решений системы $k + 1$ нелинейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. В общей форме эта задача является весьма сложной. Однако при определенных предположениях [3] в систему удается ввести малый параметр и тем самым существенно упростить исследование, представив преобразованную систему (1.1) в форме

$$I_s\psi_s'' + \frac{k_s}{\omega}\psi_s' = \mu\sigma_s\Psi_s(\psi_s, x'', \tau) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

$$x'' + \frac{c_x}{M\omega^2}x = -\sum_{s=1}^{k}\frac{m_s\varepsilon_s}{M}[\cos(\tau + \psi_s)]'' - \mu\frac{k_x^*}{M\omega}x' \tag{1.3}$$

где

$$\mu\sigma_s\Psi_s(\psi_s, x'', \tau) = m_s\varepsilon_s\left[x''\sin(\tau + \psi_s) + \frac{g\sigma_s}{\omega^2}\cos(\tau + \psi_s - \sigma_s\chi)\right] +$$
$$+ \frac{\sigma_s}{\omega^2}[L_s(\sigma_s\omega) - R_s(\sigma_s\omega)] \tag{1.4}$$

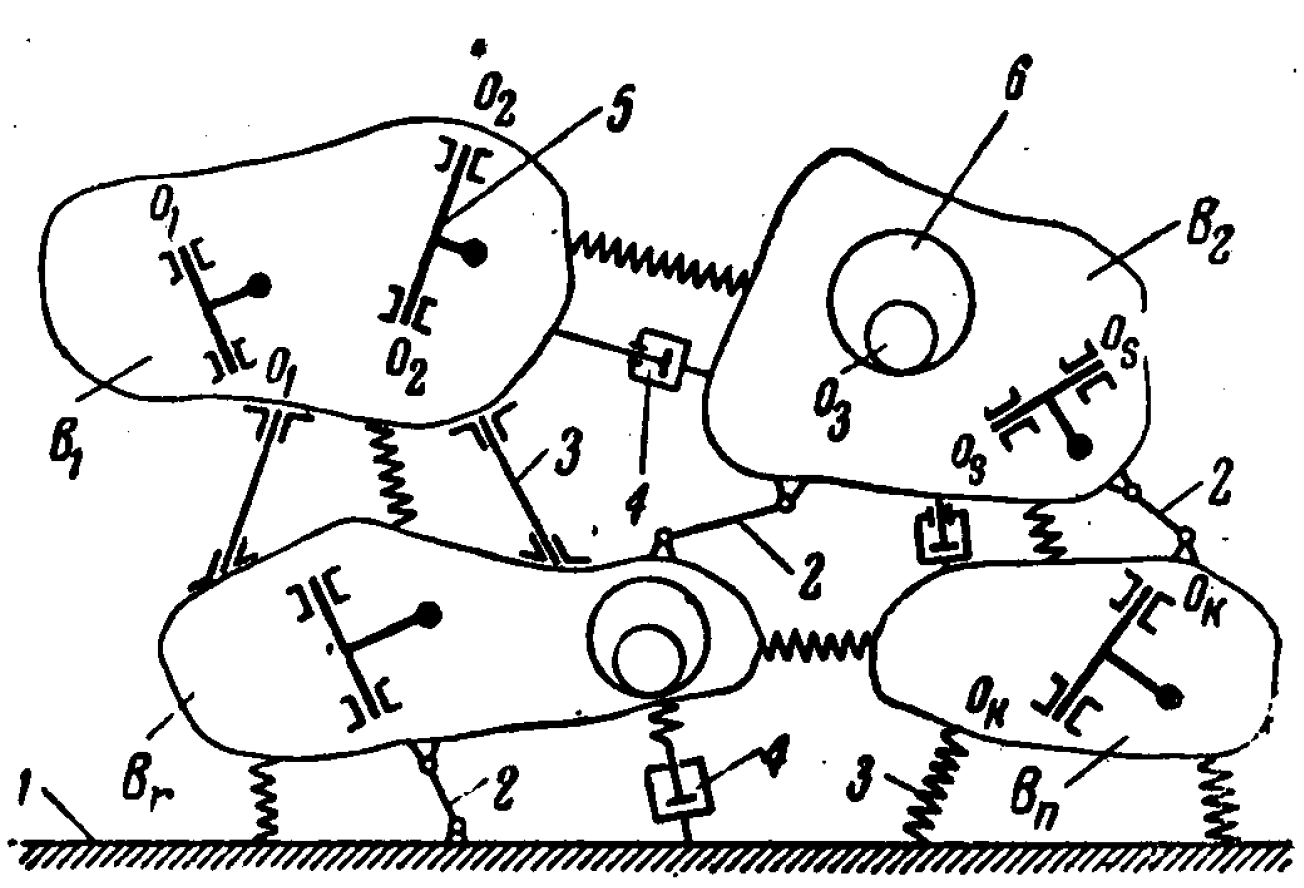
$$k_x = \mu k_x^*, \qquad k_s = k_s^* + k_s^\circ, \qquad k_s^* = -\left(\frac{dL_s}{d\varphi_s^\cdot}\right)_{\varphi_s^\cdot = \sigma_s\omega}, \qquad k_s^\circ = \left(\frac{dR_s}{d\varphi_s^\cdot}\right)_{\varphi_s^\cdot = \sigma_s\omega}$$

μ есть малый параметр, а штрихом, как и всюду ниже, обозначено дифференцирование по $\tau = \omega t$. При получении уравнений (1.3), кроме того, принято

$$L_s[\sigma_s\omega(1 + \psi_s')] \approx L_s(\sigma_s\omega) - k_s^*\sigma_s\omega\psi_s'$$
$$R_s[\sigma_s\omega(1 + \psi_s')] \approx R_s(\sigma_s\omega) + k_s^\circ\sigma_s\omega\psi_s' \tag{1.5}$$

что отвечает предположению о близости движения вибраторов к равномерному вращению, т. е. о малости ψ_s' по сравнению с единицей. Обычно $k_s^* > 0$ и $k_s^\circ > 0$.

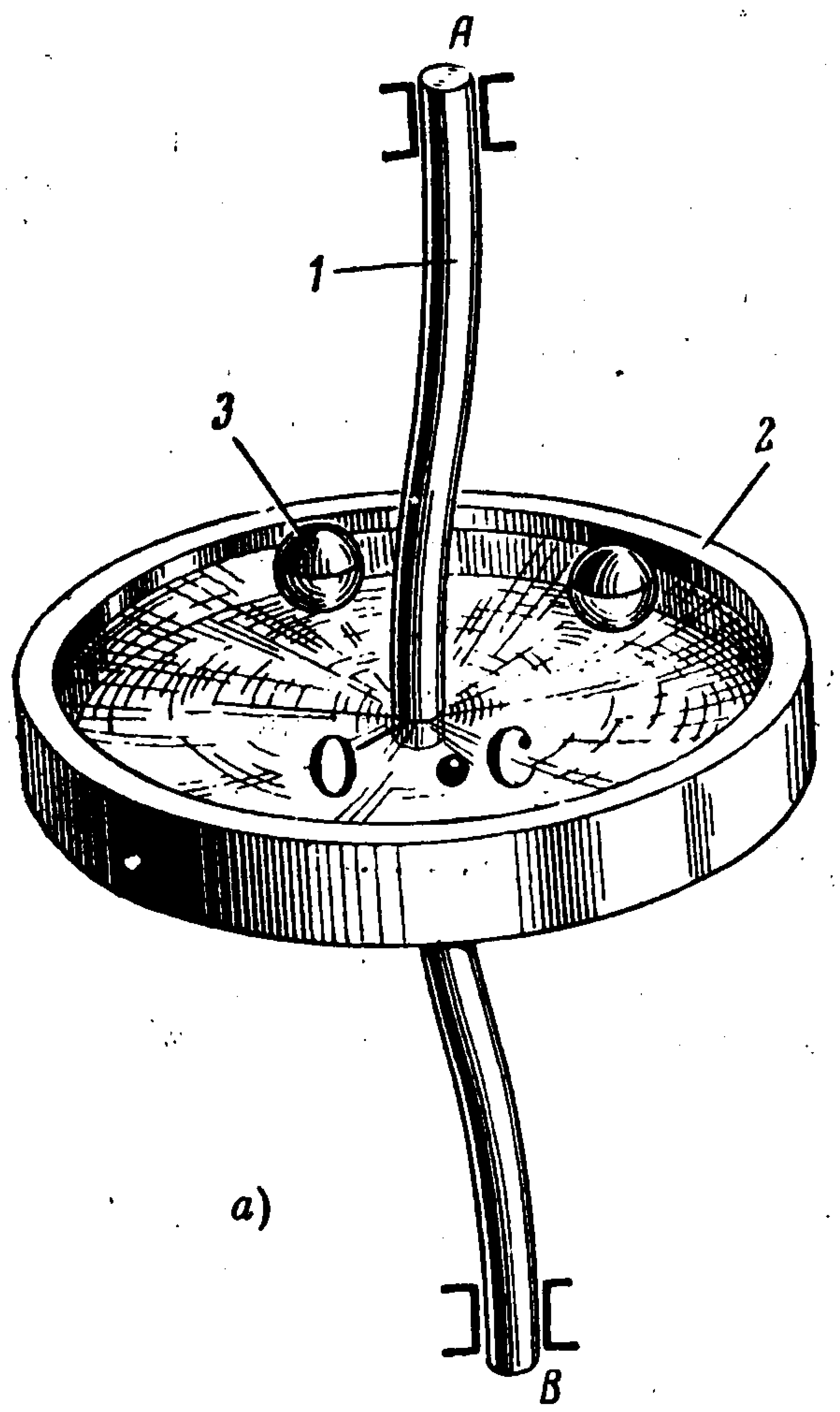
Важная особенность системы (1.3) состоит в том, что при $\mu = 0$ первые k уравнений (уравнения движения синхронизируемых объектов) оказываются независимыми одно от другого, а также от последнего уравнения (1.3). Другой особенностью является наличие k-кратного корня $\rho = 1$ у характеристического уравнения системы в вариациях, отвечающей порождающему решению порождающей системы; при этом кратным корням, как нетрудно убедиться, соответствуют простые элементарные делители. Эти две особенности присущи многим задачам о синхронизации динамических систем (см. ниже).

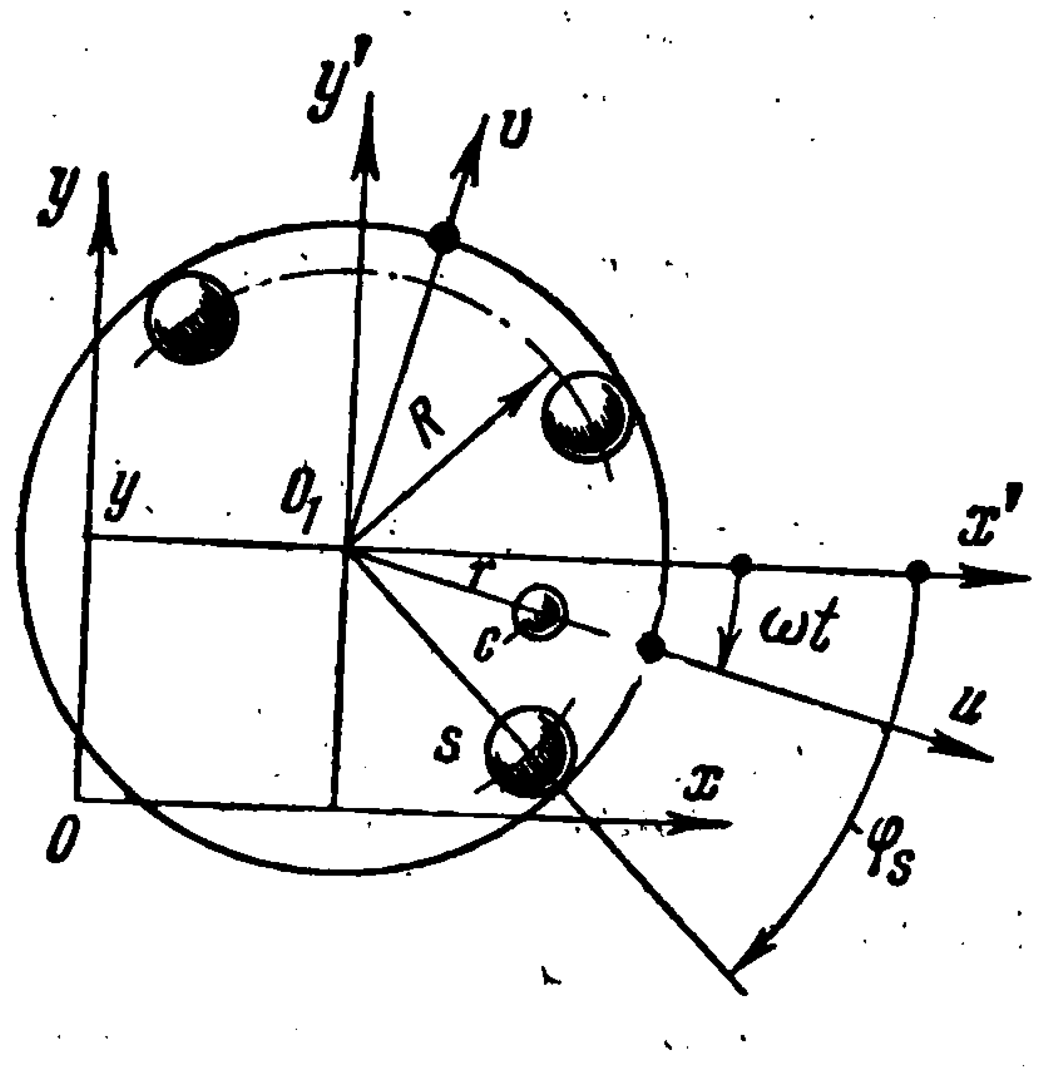


Фиг. 2

Поставленная задача может быть существенно обобщена; так, например, вибрационная машина (фиг. 2) может представлять собой не одно, а несколько твердых тел B_r, связанных между собой и с неподвижным основанием 1 некоторыми геометрическими связями 2, а также упругими 3 и демпфирующими 4 элементами. Среди вибраторов могут быть не только описанные выше простейшие дебалансные вибраторы 5, но также и «планетарные вибраторы» *6*; оси вибраторов могут быть произвольным образом ориентированы в пространстве. Иногда представляет интерес также рассмотрение случаев, когда упомянутые твердые тела в процессе движения могут соударяться. Однако всегда речь идет о выяснении условий существования и устойчивости движений типа (2.2), т. е. синхронных движений.

2. *Динамика автоматического балансира для уравновешивания вращающихся роторов.* Одна из возможных конструктивных форм балансира [13–15] схематически представлена на фиг. 3*а*. На гибком вращающемся валу *1* закреплен диск *2*, центр тяжести которого C не лежит на оси вала AOB. Диск имеет залитую маслом цилиндрическую или тороидальную полость, ось которой совпадает с касательной к оси вала в точке крепления диска O_1. В полость помещены шарики *3*, которые при определенных условиях располагаются во вращающемся диска таким образом, что компенсируют небаланс диска и тем самым устраняют колебания вала и передачу динамических нагрузок на его опоры.





Фиг. 3

Уравнения движения системы имеют вид (в несколько иных обозначениях они приведены в работе [15])

$$R\varphi_s^{\cdot\cdot} + \beta_0 R(\varphi_s^{\cdot} - \omega) = x^{\cdot\cdot}\sin\varphi_s + y^{\cdot\cdot}\cos\varphi_s \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

$$Mx^{\cdot\cdot} + \beta x^{\cdot} + cx = M^{\circ}r\omega^2\cos\omega t - mR\sum_{s=1}^{k}(\cos\varphi_s)^{\cdot\cdot} \qquad (1.6)$$

$$My^{\cdot\cdot} + \beta y^{\cdot} + cy = -M^{\circ}r\omega^2\sin\omega t + mR\sum_{s=1}^{k}(\sin\varphi_s)^{\cdot\cdot}$$

$$(M = km + M^{\circ})$$

Здесь (см. фиг. 3*б*) x и y — координаты центра диска O_1 в неподвижной системе осей xOy, начало которой находится в точке пересечения плоскости диска с осью подшипников; φ_s — отсчитываемый по ходу часовой стрелки угол между прямой, соединяющей центр диска с центром s-го шарика, и направлением x-оси; M°, m и M — соответственно массы диска, шарика и всей системы; r — эксцентрицитет диска, R — расстояние от центра шариков до оси вала; ω — угловая скорость вращения вала; β_0 и β — коэффициенты вязкого сопротивления; c — жесткость вала на изгиб по отношению к силе, приложенной в точке O_1.

Задача сводится к выяснению условий существования и устойчивости решений системы (1.6) вида

$$\varphi_s = \omega t + \psi_s(\omega t) \qquad (s = 1, \ldots, k), \qquad x = x(\omega t), \qquad y = y(\omega t) \tag{1.7}$$

Здесь ψ_s, x и y — периодические функции времени t с периодом $2\pi/\omega$. Особый интерес представляют при этом те решения (1.7), в которых $x(\omega t) \approx y(\omega t) \approx 0$, т. е. решения, отвечающие самоуравновешиванию системы, когда колебания вала отсутствуют.

Наряду с большим сходством постановки данной и предыдущей задаче имеется и различие, которое состоит в том, что исходные уравнения (1.1) задачи о самосинхронизации автономны, в то время как система (1.6) — неавтономная; в первом случае частота ω была заранее неизвестной, а во втором считается заданной. Заметим, однако, что это различие можно устранить, если, не полагая угол поворота вала φ заданным, присоединить к системе (1.6) уравнение движения двигателя, вращающего вал.

Если в уравнениях (1.6) перейти по формулам (1.7) от переменных φ_s к новым переменным ψ_s и безразмерному времени $\tau = \omega t$, то эта система может быть представлена в форме, аналогичной системе (1.3) задачи о самосинхронизации вибраторов:

$$\psi_s'' + \frac{\beta_0}{\omega}\psi_s' = \mu\Phi(\psi_s, x'', y'', \tau) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

$$x'' + \frac{c}{M\omega^2}x = \frac{M^\circ}{M} r\cos\tau - \frac{m}{M} R \sum_{s=1}^{k} [\cos(\tau + \psi_s)]'' - \mu\frac{\beta^*}{M\omega}x'$$

$$y'' + \frac{c}{M\omega^2}y = -\frac{M^\circ}{M} r\sin\tau + \frac{m}{M} R \sum_{s=1}^{k} [\sin(\tau + \psi_s)]'' - \mu\frac{\beta^*}{M\omega}y' \tag{1.8}$$

Здесь

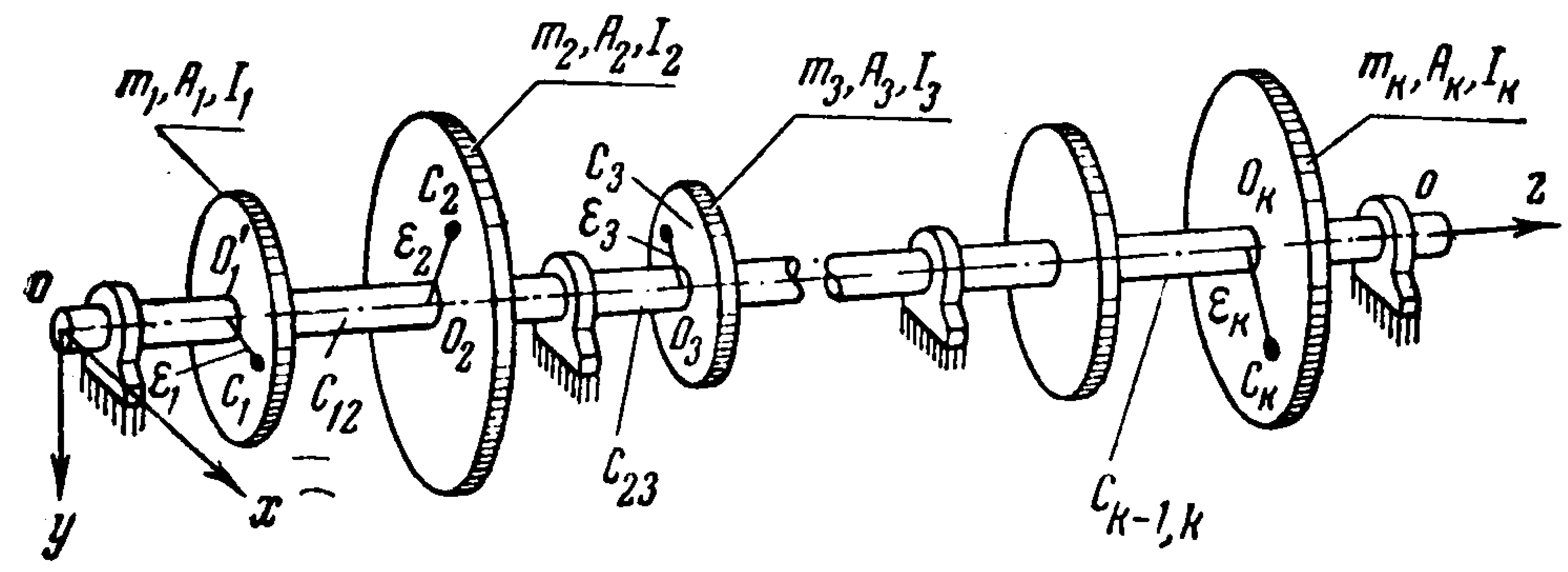
$$\mu\Phi = \frac{1}{R}[x''\sin(\tau + \psi_s) + y''\cos(\tau + \psi_s)], \qquad \mu\beta^* = \beta \tag{1.9}$$

причем величину μ по-прежнему можно рассматривать как малый параметр; последнее, очевидно, отвечает предположению о малости отклонений центра диска x и y по сравнению с радиусом R, а также о малости коэффициента $\beta / M\omega$, характеризующего силы сопротивления колебаниям диска.

Задача сводится таким образом к выяснению условий существования и устойчивости периодических (с периодом 2π) решений уравнений (1.8), причем особый интерес представляют решения, в которых $x \approx y \approx 0$.

3. *Изгибно-крутильные колебания вращающегося вала с неуравновешенными дисками.* Рассмотрим систему, состоящую из многоопорного вала с произвольным числом k статически неуравновешенных дисков (фиг. 4*а*). Будем считать, что вал в процессе движения может совершать не только изгибные, но и крутильные колебания, т. е. жесткости на кручение отдельных участков вала предположим конечными. Опоры вала могут быть как жесткими, так и упругими, с неодинаковыми жесткостями в различных направлениях. Некоторые из дисков могут представлять роторы двигателей, приводящих вал во вращение.

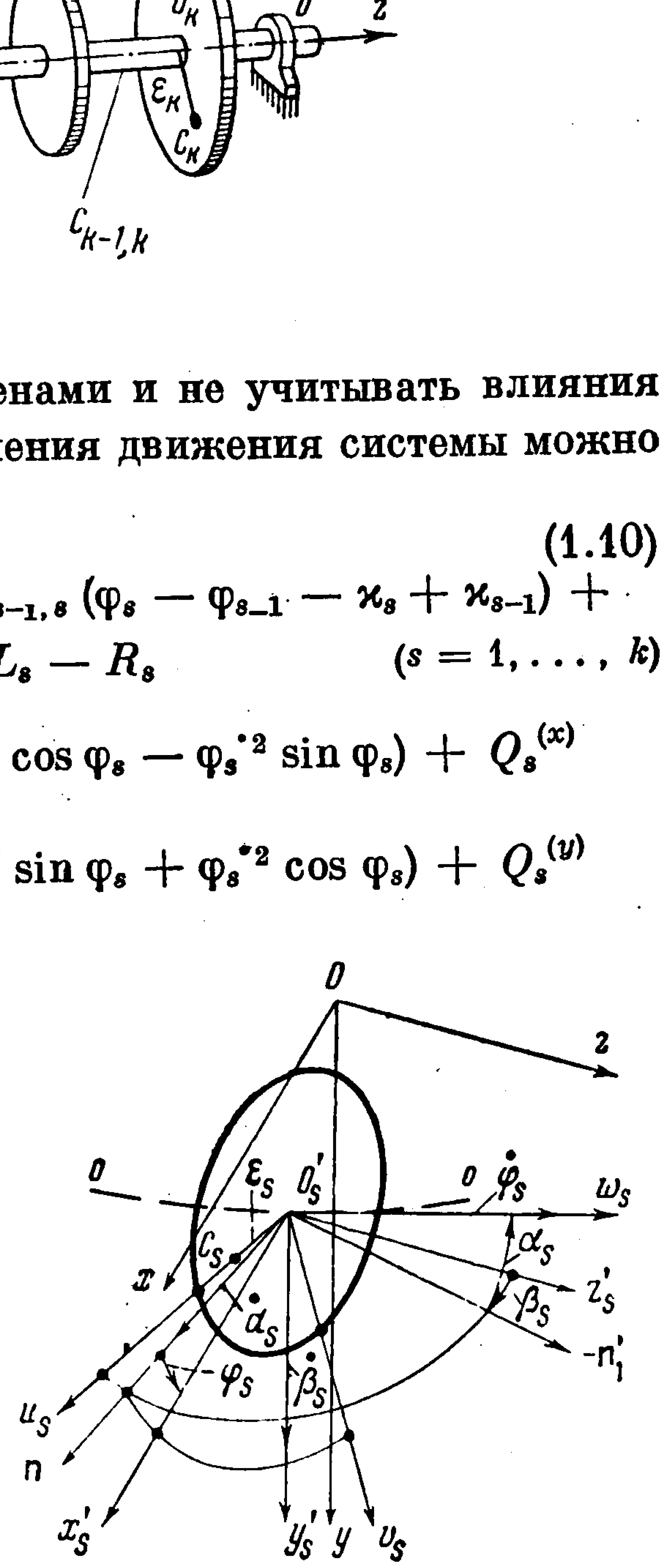
Пусть $Oxyz$ — неподвижная система прямоугольных координат, ось z которой направлена вдоль оси подшипников вала. Малые колебания каждого диска определяются декартовыми координатами x_s и y_s точки пересечения плоскостей дисков с осью вала oo, а также двумя эйлеровыми углами α_s и β_s, выбранными в соответствии с фиг. 4б. Поворот каждого диска определяется углом собственного вращения φ_s.



Фиг. 4 *а*

Если пренебречь гироскопическими членами и не учитывать влияния силы тяжести, то дифференциальные уравнения движения системы можно представить в форме

$$
\begin{aligned}
I_s\ddot{\varphi}_s &= m_s\varepsilon_s(\ddot{x}_s\cos\varphi_s + \ddot{y}_s\sin\varphi_s) - c_{s-1,s}(\varphi_s - \varphi_{s-1} - \varkappa_s + \varkappa_{s-1}) + \\
&+ c_{s,s+1}(\varphi_{s+1} - \varphi_s - \varkappa_{s+1} + \varkappa_s) + L_s - R_s \qquad (s = 1, \ldots, k) \\
m_s\ddot{x}_s &+ \sum_{j=1}^{k}\left(c_{sj}^{(x)}x_j + c_{sj}^{(x\alpha)}\alpha_j\right) = m_s\varepsilon_s(\ddot{\varphi}_s\cos\varphi_s - \dot{\varphi}_s^2\sin\varphi_s) + Q_s^{(x)} \\
m_s\ddot{y}_s &+ \sum_{j=1}^{k}\left(c_{sj}^{(y)}y_j + c_{sj}^{(y\beta)}\beta_j\right) = m_s\varepsilon_s(\ddot{\varphi}_s\sin\varphi_s + \dot{\varphi}_s^2\cos\varphi_s) + Q_s^{(y)} \\
A_s\ddot{\alpha}_s &+ \sum_{j=1}^{k}\left(c_{sj}^{(\alpha)}\alpha_j + c_{sj}^{(x\alpha)}x_j\right) = Q_s^{(\alpha)} \\
A_s\ddot{\beta}_s &+ \sum_{j=1}^{k}\left(c_{sj}^{(\beta)}\beta_j + c_{sj}^{(y\beta)}y_j\right) = Q_s^{(\beta)}
\end{aligned}
\qquad (1.10)
$$



Фиг. 4 *б*

Здесь m_s, ε_s, A_s и I_s — соответственно масса, эксцентриситет, экваториальный и полярный моменты инерции s-го диска; $c_{s,s+1}$ — жесткость на кручение участка вала между s-м и $s+1$-м диском, причем $c_{01} = c_{k,k+1} = 0$;

$$c_{sj}^{(x)},\ c_{sj}^{(y)},\ c_{sj}^{(\alpha)},\ c_{sj}^{(\beta)},\ c_{sj}^{(x\alpha)},\ c_{sj}^{(x\beta)}$$

— соответствующие жесткости вала на изгиб, с учетом податливости опор; $\varkappa_s$ — значения углов φ_s, при которых упругие крутящие моменты в пролетах вала равны нулю; эти углы, определенные с точностью до постоянного поворота $\varkappa_0$, характеризуют направления векторов-эксцентриситетов $\varepsilon_s = O_s'C_s$ дисков при нескрученном вале; $Q_s^{(x)}$, $Q_s^{(y)}$, $Q_s^{(\alpha)}$ и $Q_s^{(\beta)}$ — силы и моменты внутреннего и внешнего сопротивлений колебаниям вала, которые могут зависеть от всех обобщенных координат и скоростей системы, причем координаты φ_s и скорости $\dot{\varphi}_s$ входят в выражения для Q только в виде разностей $\varphi_s - \varphi_j$ и $\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_j$; L_s и R_s — соответственно вращающие моменты двигателей и моменты сил сопротивления вращению; обычно достаточно предполагать, что эти моменты есть функции $\varphi_s - \varphi_j$, $\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_j$ и $\dot{\varphi}_s$, а также, быть может, периодические функции φ_s с периодом 2π.

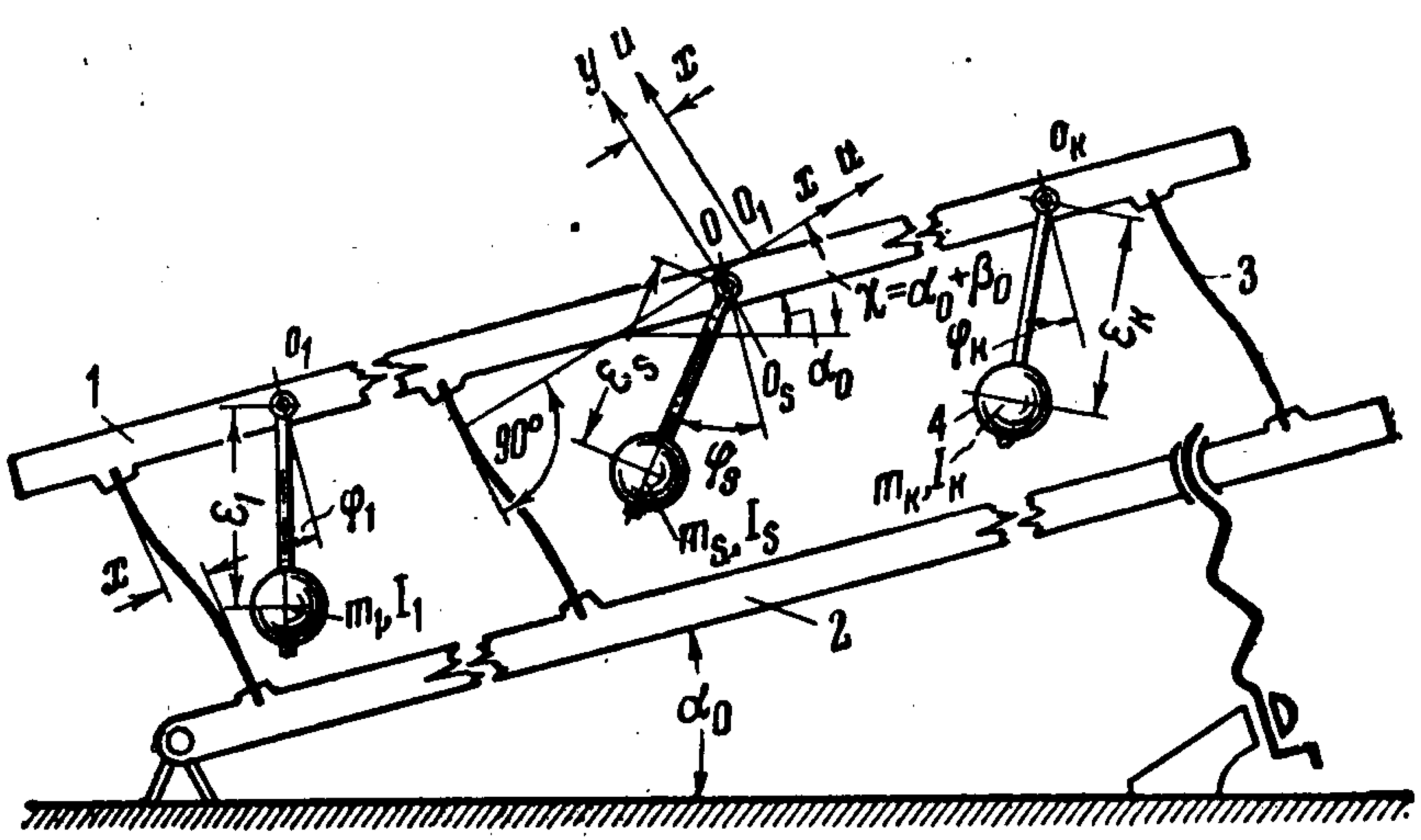
Задача состоит в установлении условий существования и устойчивости, а также в вычислении с той или иной степенью точности синхронных движений системы, т. е. движений вида

$$\varphi_s = \omega t + \psi_s(\omega t), \quad x_s = x_s(\omega t), \quad y_s = y_s(\omega t)$$
$$\alpha_s = \alpha_s(\omega t), \quad \beta_s = \beta_s(\omega t) \qquad (1.11)$$

Здесь ψ_s, x_s, y_s, α_s и β_s — периодические функции времени с периодом $2\pi/\omega$. При этом, как и в задаче о синхронизации вибраторов, значение синхронной частоты ω, вообще говоря, заранее не известно и должно быть определено в ходе решения задачи. По-прежнему преобразование к переменным ψ_s и переход к безразмерному времени $\tau = \omega t$ приводят задачу к исследованию периодических (с периодом 2π) решений системы нелинейных уравнений, правые части которых есть периодические функции τ того же периода.

Нетрудно видеть также, что и в данном случае вполне естественным является введение малого параметра.

4. *Самосинхронизация маятниковых часов, висящих на подвижном основании (задача Гюйгенса).* Как уже отмечалось, явление синхронизации динамических систем, по-видимому, впервые было экспериментально обнаружено Х. Гюйгенсом именно на примере самосинхронизации и фазировки хода двух маятниковых часов, висевших на одной легкой балке. Если ограничиться моделью часового хода с одной степенью свободы и предполагать, что часы висят на упруго опертой жесткой платформе, имеющей одну степень свободы (фиг. 5), то уравнения движения системы в точности совпадут с уравнениями



Фиг. 5

(1.1) задачи о самосинхронизации вибраторов. В задаче о часах изменятся лишь конкретные выражения для движущих моментов L_s и моментов сопротивления R_s; эти моменты при оговоренных выше предположениях следует считать зависящими от углов поворота маятников φ_s и скоростей $\varphi_s^{\cdot}$. Дифференциальные уравнения движения системы часы — платформа запишутся в виде

$$\varphi_s^{\cdot\cdot} + \Omega_s^2\varphi_s = \frac{1}{I_s}\left[m_s\varepsilon_s x^{\cdot\cdot}\cos\chi + L_s(\varphi_s^{\cdot}, \varphi_s) - R_s(\varphi_s^{\cdot}, \varphi_s)\right]$$
$$Mx^{\cdot\cdot} + k_x x^{\cdot} + c_x x = \sum_{s=1}^{k} m_s\varepsilon_s\varphi_s^{\cdot\cdot}\cos\chi \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (1.12)$$

где, в отличие от задачи о вибраторах, углы поворота маятников отсчитываются от вертикали и считаются малыми. Через $\Omega_s = \sqrt{m_s g\varepsilon_s / I_s}$

обозначены частоты малых свободных колебаний маятников при условии, что точки подвеса их неподвижны («парциальные частоты» колебаний).

Задача заключается в выяснении условий существования и устойчивости периодических колебаний маятников с общей частотой ω, имеющих место, несмотря на возможное различие парциальных частот Ω_s отдельных маятников, моментов инерции I_s и моментов L_s и R_s. Иными словами, речь идет об исследовании условий существования и устойчивости периодических решений уравнений (1.12) с заранее неизвестным периодом $T = 2\pi / \omega$, подлежащим определению в процессе решения задачи. Представляет интерес также вычисление (хотя бы приближенное) самих периодических решений.

Исходя из наблюдений Гюйгенса, можно ожидать, что синхронизация часов возможна лишь при условии, когда парциальные частоты Ω_s мало отличаются одна от другой. Учитывая это обстоятельство, а также соображения о возможных порядках малости отдельных величин, естественно ввести в систему (1.12) малый параметр μ, представив ее в форме

$$\begin{gathered} \varphi_s^{\cdot\cdot} + \Omega_s^2\varphi_s = \mu\Phi_s^* (\varphi_s^{\cdot}, \varphi_s, x^{\cdot\cdot}) \qquad (s = 1, \ldots, k) \\ Mx^{\cdot\cdot} + c_x x = \sum_{s=1}^{k} m_s \varepsilon_s \varphi_s^{\cdot\cdot} \cos\chi - \mu k_x^* x^{\cdot} \end{gathered} \tag{1.13}$$

где

$$\mu\Phi_s^* (\varphi_s^{\cdot}, \varphi_s, x^{\cdot\cdot}) = \Omega^2\chi_s\varphi_s + \frac{1}{I_s} [m_s\varepsilon_s x^{\cdot\cdot} \cos\chi + L_s (\varphi_s^{\cdot}, \varphi_s) - R_s (\varphi_s^{\cdot}, \varphi_s)]$$

$$k_x = \mu k_x^*, \qquad \Omega_s^2 = \Omega^2 (1 - \chi_s) \tag{1.14}$$

причем за Ω можно принять либо одно из Ω_s, либо какое-нибудь среднее от Ω_s.

Заметим, что при $\mu = 0$ первые k уравнений становятся независимыми, и система (1.13) допускает семейство периодических решений периода $2\pi / \omega$, зависящее от $2k$ произвольных постоянных. При этом характеристическое уравнение порождающей системы имеет по крайней мере k-кратный корень $\rho = \exp(2\pi i \Omega)$ и k-кратный корень $\rho = \exp(-2\pi i \Omega)$. Вследствие независимости первых k уравнений при $\mu = 0$ этим корням, как и выше, отвечают простые элементарные делители.

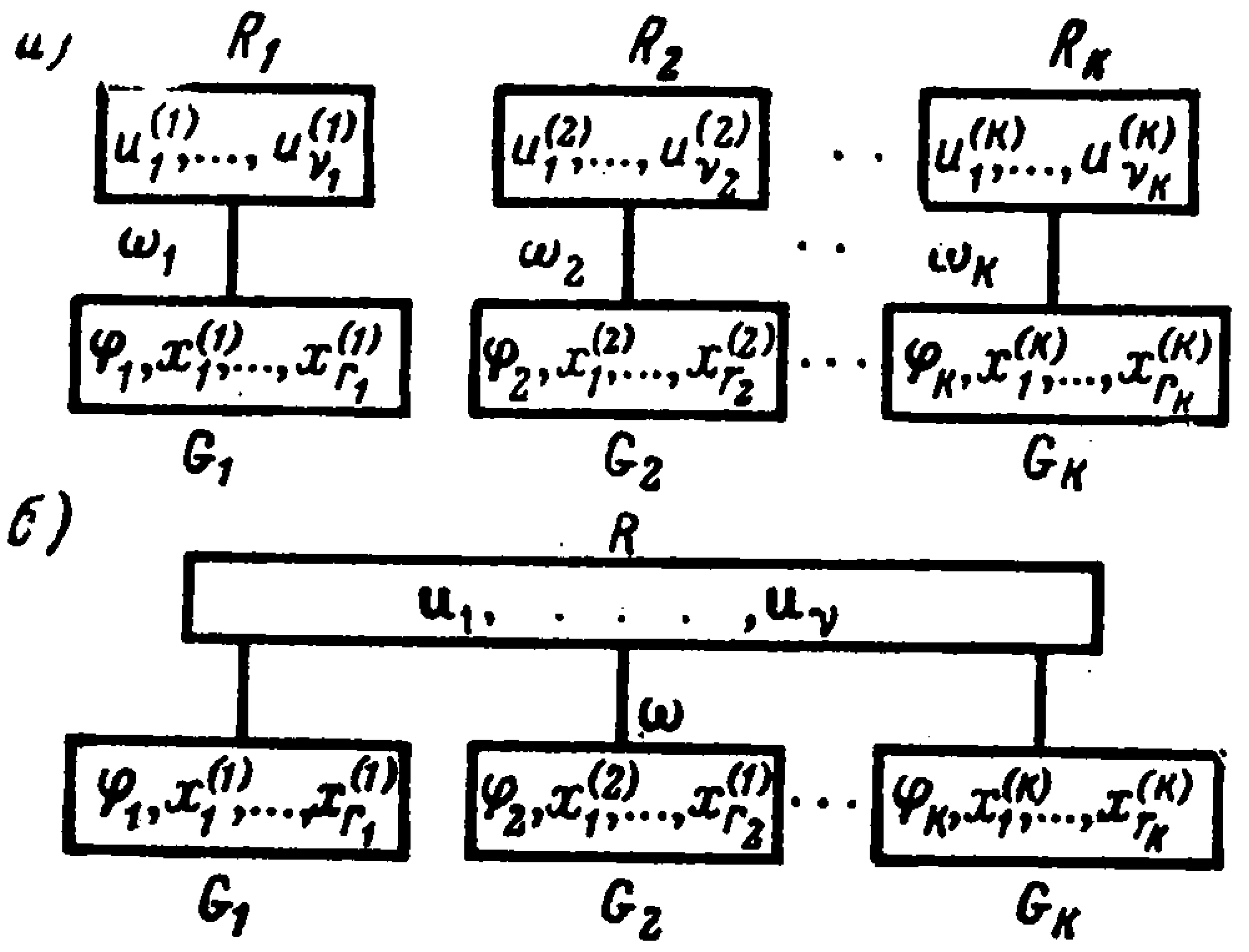
5. *Синхронизация при параллельной работе электрических машин.* Рассмотрим постановку задачи о параллельной работе некоторого числа k генераторов на общую нагрузку. Состояние s-го генератора характеризуется одной «вращательной» координатой — углом поворота ротора по отношению к статору φ_s, а также совокупностью «колебательных» фазовых координат $x_1^{(s)}, \ldots, x_{r_s}^{(s)}$, которыми могут быть как электрические, так и механические величины.

Пусть сначала каждый генератор работает на независимые нагрузки R_s, состояние которых характеризуется фазовыми координатами $u_1^{(s)}, \ldots, u_{\nu_s}^{(s)}$ (фиг. 6*а*). Тогда будем иметь k независимых автономных систем, в которых при определенных условиях устанавливаются движения вида

$$\varphi_s = \omega_s t + \psi_s (\omega_s t), \qquad x_j^{(s)} = x_j^{(s)} (\omega_s t), \qquad u_\rho^{(s)} = u_\rho^{(s)} (\omega_s t) \tag{1.15}$$

$$(j = 1, \ldots, r_s;\ \rho = 1, \ldots, \nu_s;\ s = 1, \ldots, k)$$

где ψ_s, $x_j^{(s)}$, $u_\rho^{(s)}$ — периодические функции времени t с периодом $2\pi / \omega_s$, а каждое из ω_s — постоянная, которую можно назвать парциальной частотой генератора, отвечающей данной нагрузке R_s. Вследствие неодинаковости нагрузок, неточностей изготовления, а также из-за неидеальности регуляторов, частоты ω_s для различных генераторов, вообще говоря, будут различными.



Фиг. 6

Предположим теперь, что все генераторы включены параллельно для работы на общую нагрузку R, состояние которой характеризуется фазовыми координатами $u_1, \ldots, u_\nu$ (фиг. 6*б*). Тогда задача заключается в установлении условий, при которых, несмотря на возможное различие парциальных частот ω_s, в объединенной системе устанавливается режим с общей синхронной частотой ω. Иными словами, и в данном случае речь идет о выяснении условий существования и устойчивости движений совокупной системы вида:

$$\varphi_s = \omega t + \psi_s(\omega t), \qquad x_j^{(s)} = x_j^{(s)}(\omega t), \qquad u_\rho = u_\rho(\omega t) \qquad (1.16)$$
$$(j = 1, \ldots, r_s;\ \rho = 1, \ldots, \nu;\ s = 1, \ldots, k)$$

где ψ_s, $x_j^{(s)}$ и u_ρ — периодические функции t с общим периодом $2\pi / \omega$, а ω — постоянная, которая точно заранее неизвестна. Иными словами и здесь возникает задача о синхронизации [1].

Здесь не приводятся дифференциальные уравнения движения рассматриваемых систем; в общем случае они столь сложны, что само составление их представляет нетривиальную задачу. Для различных практически интересных случаев эти уравнения, написанные, как правило, для функций ψ_s, $x_j^{(s)}$ и u_ρ, приводятся, например, в работах [16–18].

В указанных переменных задача о параллельной работе электрических синхронных машин, как и все рассмотренные выше задачи о синхронизации, приводится к исследованию условий существования и устойчивости периодических решений некоторой системы дифференциальных уравнений, правые части которых также есть периодические функции времени того же периода.

6. *Синхронизация ламповых генераторов.* Проблема синхронизации ламповых генераторов имеет большое значение в радиотехнике и телевидении. Приведем в качестве примера постановку задачи о самосинхронизации генераторов типа «осцилляторов Ван-дер-Поля» в предположении, что генераторы связаны между собой индуктивно.

Дифференциальные уравнения движения системы будут иметь вид

$$\ddot{x}_s + \Omega_s^2 x_s = \mu\left[a_s(1 - x_s^2)\dot{x}_s + \sum_{j=1}^{k} b_{sj}\ddot{x}_j\right] \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (1.17)$$

---

[1] Заметим, что термин «синхронизация» в электротехнике часто употребляется в ином смысле, нежели в настоящей работе.

Здесь $\Omega_s > 0$, $\mu > 0$, $a_s > 0$ — постоянные. При $b_{sj} = 0$ уравнения (1.17) обращаются в k независимых нелинейных уравнений, известных под названием уравнений Ван-дер-Поля. Такие уравнения допускают периодическое решение периода $T_s = 2\pi\,[1 + \delta(\mu)] / \Omega_s$, где $\delta(0) = 0$; поэтому в случае отсутствия связи между генераторами ($b_{sj} = 0$) каждый из них в установившемся режиме генерирует колебания, частоты которых $\omega_s(\mu) = \Omega_s / [1 + \delta_s(\mu)]$, вообще говоря, различны; эти частоты можно назвать парциальными частотами колебаний генераторов.

Основным в рассматриваемой задаче о синхронизации по-прежнему будет установление условий, при которых все связанные генераторы работают с общей частотой ω (заранее неизвестной), несмотря на возможное различие парциальных частот $\omega_s(\mu)$. Иными словами, речь опять идет об отыскании условий существования и устойчивости периодических решений системы (1.17).

Если частоты $\Omega_s = \omega_s(0)$ мало отличаются одна от другой, так что можно положить $\Omega_s^2 = \Omega^2(1 - \mu\chi_s)$, то уравнения (1.17) приводятся к виду

$$x_s^{\cdot\cdot} + \Omega^2 x_s = \mu\Phi_s(x_s^{\cdot}, x_s;\, x_1^{\cdot\cdot}, \ldots, x_k^{\cdot\cdot}) \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (1.18)$$

где

$$\mu\Phi_s(x_s^{\cdot}, x_s;\, x_1^{\cdot\cdot}, \ldots, x_k^{\cdot\cdot}) = \mu\left[a_s(1 - x_s^2)\,x_s^{\cdot} + \chi_s\Omega^2 x_s + \sum_{j=1}^{k} b_{sj} x_j^{\cdot\cdot}\right] \qquad (1.19)$$

Уравнения (1.18) представляют квазилинейную автономную систему, аналогичную первым k уравнениям (1.13) задачи Гюйгенса. По-прежнему порождающая система для (1.18) допускает периодическое решение периода $2\pi / \Omega$, зависящее от $2k$ произвольных постоянных, а характеристическое уравнение этой системы имеет два k-кратных корня $\rho = \exp(\pm 2\pi_i\Omega)$ с простыми элементарными делителями.

§ 2. Общая постановка задачи о синхронизации. В общей форме задача о синхронизации динамических систем может быть сформулирована следующим образом.

Рассмотрим некоторое число k динамических объектов, связанных в единую систему (фиг. 7). Пусть движение s-го объекта определяется r_s-мерным вектором $\mathbf{x}^{(s)} = [x_1^{(s)}, \ldots, x_{r_s}^{(s)}]$ $(s = 1, \ldots, k)$, компоненты которого $x_j^{(s)}$ будут координатами объекта в фазовом пространстве системы.

Движение системы в целом определяется как совокупностью введенных выше векторов $\mathbf{x}^{(s)}$, так и ν-мерным вектором $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_\nu]$, характеризующим связи между объектами. Таким образом, фазовое пространство системы имеет $l = r_1 + \ldots + r_k + \nu$ измерений.

Пусть движение рассматриваемой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\mathbf{x}^{\cdot(s)} = \mathbf{X}^{(s)}(\mathbf{x}^{(s)}) + \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}) \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (2.1)$$

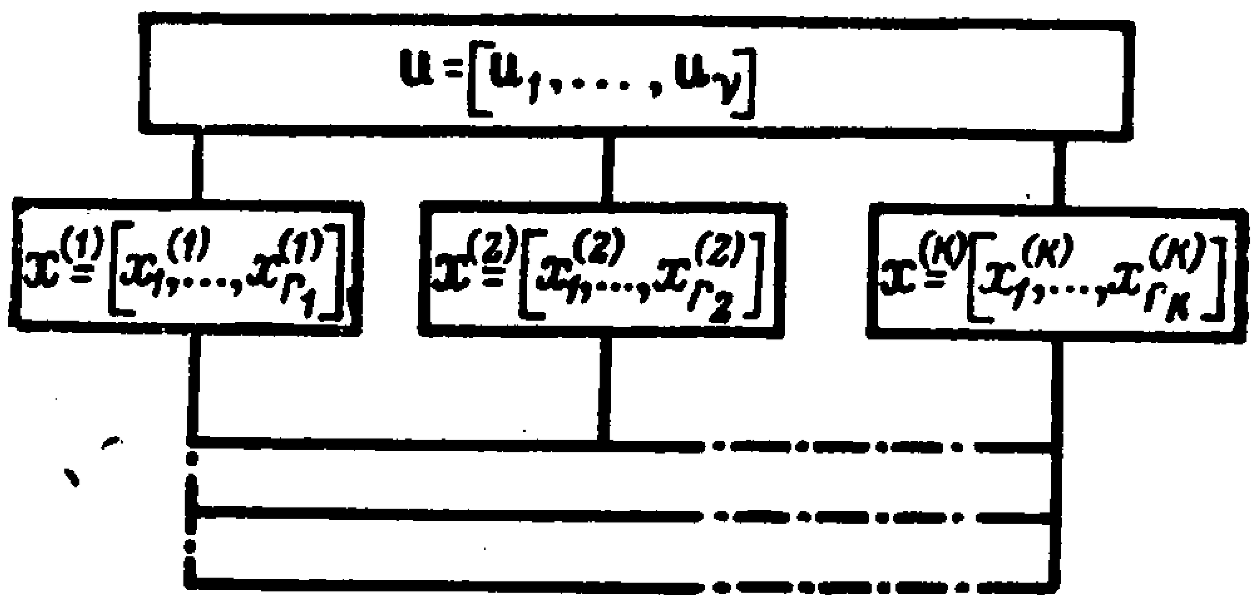
$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u})$$

где

$$\mathbf{X}^{(s)} = [X_1^{(s)}, \ldots, X_{r_s}^{(s)}],\ \mathbf{F}^{(s)} = [F_1^{(s)}, \ldots, F_{r_s}^{(s)}],\ \mathbf{U} = [U_1, \ldots, U_\nu]$$

— соответственно r_s и ν-мерные вектор-функции, удовлетворяющие весьма общим требованиям, при которых система (2.1) будет динамической, и некоторому специальному требованию, которое будет указано ниже. Вектор-функции $\mathbf{F}_s$ и $\mathbf{U}$, характеризующие связи между отдельными объектами, назовем функциями связей.

Из структурной системы схемы, представленной на фиг. 7, а также из рассмотрения уравнений (2.1) видно, что каждый из объектов может быть связан со всеми прочими как непосредственно, так и через систему связи, состояние которой характеризуется фазовыми координатами u_ρ. Вместе с тем, из уравнений видно, что координаты $x_j^{(s)}$, определяющие состояние объектов, и координаты u_ρ системы связи, по существу, входят в уравнения (2.1) вполне «равноправно». Характерная для многих задач о синхронизации специфика каждой группы переменных выяснится ниже.



Фиг. 7

Под основной задачей теории синхронизации понимается установление условий существования и устойчивости решений уравнений (2.1), имеющих вид

$$x_j^{(s)} = \sigma_j^{(s)}[q_j^{(s)}\omega t + y_j^{(s)}(\omega t)] \qquad (j = 1, \ldots, r_s;\ s = 1, \ldots, k) \tag{2.2}$$
$$u_\rho = \sigma_\rho\,[q_\rho\omega t + v_\rho(\omega t)] \qquad (\rho = 1, \ldots, \nu)$$

где ω — положительная постоянная, $y_j^{(s)}(\omega t)$ и $v_\rho(\omega t)$ — периодические функции ωt с периодом 2π, $q_j^{(s)}$ и q_ρ — числа, каждое из которых может быть равно нулю или единице; в первом случае соответствующую координату $x_j^{(s)}$ или u_ρ будем условно называть колебательной, во втором случае — вращательной. Через $\sigma_j^{(s)}$ и σ_ρ обозначены числа, любое из которых может быть равно $+1$ или -1.

Решениям вида (2.2) отвечают колебательные или равномерные в среднем движения по каждой из координат с общей для всех координат частотой (линейной или угловой скоростью) ω; такие движения в дальнейшем будем называть синхронными.

Конкретизируем теперь вид правых частей уравнений (2.1). Будем предполагать, что функции $X_j^{(s)}$, $F_j^{(s)}$, U_ρ зависят от своих аргументов таким образом, что после подстановки вместо $x_j^{(s)}$ и u_ρ их значений согласно формулам (2.2) эти функции становятся периодическими функциями «безразмерного времени» $\tau = \omega t$ с периодом 2π.

Последнее условие не обязательно для существования у системы (2.1) синхронных движений, однако оно выполняется во всех известных нам конкретных задачах о синхронизации и существенно упрощает их решение; поэтому далее это условие предполагается удовлетворенным. Заметим, что для его справедливости достаточно, чтобы $X_j^{(s)}$ и U_ρ были периодическими функциями вращательных координат с периодом 2π, а также, быть может, функциями разностей $\sigma_j^{(s)}x_j^{(s)} - \sigma_n^{(m)}x_n^{(m)}$, $\sigma_j u_j - \sigma_\rho u_\rho$, $\sigma_j^{(s)}x_j^{(s)} - \sigma_\rho u_\rho$, где $x_j^{(s)}$, $x_n^{(m)}$, u_j и u_ρ — вращательные координаты.

Переходя в уравнениях (2.1) по формулам (2.2) от переменных x, u и t к переменным y, v и $\tau = \omega t$, получаем систему вида

$$\begin{gathered} \mathbf{y}'^{(s)} = \mathbf{Y}^{(s)}(\mathbf{y}^{(s)}, \tau) + \mathbf{\Phi}^{(s)}(\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{v}, \tau) \qquad (s = 1, \ldots, k) \\ \mathbf{v}' = \mathbf{V}(\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{v}, \tau) \end{gathered} \tag{2.3}$$

где, в соответствии с предположениями о характере вектор-функций $\mathbf{X}^{(s)}, \mathbf{F}^{(s)}$ и $\mathbf{U}$, функции $\mathbf{Y}^{(s)}$, $\mathbf{\Phi}^{(s)}$ и $\mathbf{V}$ будут периодическими относительно безразмерного времени τ с периодом 2π.

Таким образом, основная задача о синхронизации сводится к установлению условий существования и устойчивости периодических решений системы уравнений (2.3), имеющих период 2π.

Помимо сформулированной выше основной задачи о синхронизации, зачастую представляет также интерес решение следующих задач:

1. Реальное вычисление синхронной угловой или линейной скорости (частоты) ω, а также решений (2.2), отвечающих устойчивым синхронным движениям. Во многих случаях можно ограничиться определением средних за период 2π значений функций $\mathbf{y}^{(s)}(\omega t)$ и $\mathbf{v}(\omega t)$, т. е. величин

$$\boldsymbol{\alpha}^{(s)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{y}^{(s)}(\tau)\, d\tau, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\tau)\, d\tau \tag{2.4}$$

а также максимальных отклонений $|y_j^{(s)}(\tau) - \alpha_j^{(s)}|_{\max}$ и $|v_\rho(\tau) - \alpha_\rho|_{\max}$ от этих средних значений.

2. Выбор системы связи, при котором обеспечивается существование и устойчивость синхронного движения (2.2) заданного вида. Эта задача, которую можно назвать задачей синтеза, является в известной мере обратной по отношению к основной.

Иногда представляет интерес также решение весьма трудной задачи об определении в фазовом пространстве системы таких областей начальных значений ее координат («областей захвата»), для которых с течением времени движение неограниченно приближается к определенному синхронному движению.

Сказанное выше относилось к задаче о простой синхронизации. В ряде приложений возникает, однако, и более сложная задача о кратной синхронизации, когда речь должна идти о вращениях и колебаниях не с общей угловой скоростью (частотой), а со скоростями (частотами) типа $n_j\omega$, где n_j — целые числа, вообще говоря, различные для различных компонент векторов $\mathbf{x}^{(s)}$ и $\mathbf{u}$.

Один из наиболее важных классов задач о синхронизации образуют задачи о синхронизации автоколебательных объектов, т. е. объектов, как правило, однотипных, каждый из которых, будучи изолирован от остальных (функции связей $\mathbf{F}^{(s)}$ и $\mathbf{\Phi}^{(s)}$ соответственно в уравнениях (2.1) и (2.3) отсутствуют), при определенных условиях может совершать движения типа (2.2), характеризующиеся некоторой частотой (угловой или линейной скоростью) ω_s. Величину ω_s естественно назвать парциальной частотой (скоростью) объекта. Задача о синхронизации при этом заключается в установлении условий, при которых после объединения всех объектов в единую систему последние смогут совершать движения того же типа, но с одинаковой частотой (скоростью) ω или же с частотами (скоростями) вида $n_s\omega$.

В зависимости от характера постановки задачи о синхронизации автоколебательных объектов или систем, содержащих таковые, следует различать задачу о внутренней (автономной) синхронизации и задачу о внешней (неавтономной) синхронизации.

В первом, наиболее общем случае, к которому и относилась приведенная выше постановка задачи о синхронизации, все синхронизируемые объекты рассматриваются как равноправные элементы единой автономной динамической системы; частота синхронного движения при этом устанавливается в результате взаимодействия всех элементов системы. Правые части уравнений (2.1) в таком случае не содержат в явной форме времени t, а значение синхронной частоты ω заранее неизвестно и подлежит определению в процессе решения задачи (см. пп. 1 и 3—6 § 1).

Во втором случае предполагается, что один из синхронизируемых автоколебательных объектов значительно более мощный по сравнению со всеми остальными, и поэтому его движение считается не зависящим от характера движения прочих элементов системы. Воздействие указанного объекта на остальные элементы системы и тем самым частота (или угловая скорость) синхронного движения предполагаются наперед заданными и неизменными.

Исходная система (2.1) при таком подходе к задаче обращается в неавтономную и, благодаря этому, ее порядок понижается (см. п. 2 § 1).

Нетрудно видеть, что все рассмотренные в § 1 конкретные задачи представляют частные случаи сформулированной здесь общей задачи.

В заключение отметим, что для ряда приложений представляет интерес изучение синхронизации в системах с распределенными параметрами. В этом случае в числе уравнений (2.1) содержатся уравнения в частных производных. Естественно, что все сказанное выше может быть распространено также и на такую систему уравнений.

§ 3. Основные особенности задач о синхронизации. Дифференциальные уравнения задач о синхронизации, как правило, являются существенно нелинейными. Однако в них зачастую удается ввести малый параметр, что дает возможность воспользоваться для решения методами теории периодических решений, основы которых развиты А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым.

Можно указать две важные группы задач о синхронизации, допускающие эффективное использование метода малого параметра.

К первой группе относятся задачи о синхронизации объектов со «слабыми» взаимными связями. Именно такие задачи представляют основной прикладной интерес, ибо, с одной стороны, синхронизацию технически наиболее просто и экономично осуществлять именно посредством «слабых» связей и, с другой стороны, если все же приходится применять «сильные» связи между какими-либо объектами, то последние, как правило, после наложения таких связей можно рассматривать как единую систему, для которой задачи о синхронизации не возникает. Так, например, два механических дебалансных вибратора, валы которых связаны шестеренной передачей, с жесткими промежуточными элементами, расположенными между дебалансами и шестернями, практически образуют один двухвальный вибратор.

К категории задач о синхронизации объектов со слабыми взаимными связями может быть отнесено большинство конкретных задач о синхронизации, рассмотренных в § 1, а также и многие другие задачи.

В случае объектов со слабыми взаимными связями основные уравнения (2.1) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\cdot(s)} &= \mathbf{X}^{(s)}(\mathbf{x}^{(s)}) + \mu \mathbf{F}^{\circ(s)}(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}, \mu) \qquad (s=1, \ldots, k) \\ \mathbf{u}^{\cdot} &= \mathbf{U}^{*}(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}, \mu) \end{aligned} \tag{3.1}$$

или — в переменных $\mathbf{y}^{(s)}$, $\mathbf{v}$ и $\tau = \omega t$ — в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'^{(s)} &= \mathbf{Y}^{(s)}(\mathbf{y}^{(s)}, \tau) + \mu \Phi^{\circ(s)}(\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{v}, \tau, \mu) \qquad (s=1, \ldots, k) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{V}^{*}(\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{v}, \tau, \mu) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{F}^{\circ(s)}$, $\mathbf{U}^*$, $\Phi^{\circ(s)}$ и $\mathbf{V}^*$— вектор-функции того же класса, что и $\mathbf{F}^{(s)}$, $\mathbf{U}$, $\Phi^{(s)}$ и $\mathbf{V}$ в уравнениях (2.1) и (2.3), причем $\mathbf{F}^{\circ(s)}$, $\mathbf{U}^*$, $\Phi^{\circ(s)}$ и $\mathbf{V}^*$— также функции малого параметра μ, которые достаточно считать аналитическими по μ при $|\mu| < \mu_0$, где $\mu_0 > 0$.

Весьма распространенным классом задач являются задачи о синхронизации одинаковых или почти одинаковых объектов, слабо взаимодействующих один с другим. В этом случае функции $\mathbf{X}^{(s)}$ и $\mathbf{Y}^{(s)}$ в уравнениях (3.1) и (3.2) не зависят от индекса s.

Уравнения (3.2), к исследованию периодических решений которых в данном случае приводится решение основной задачи о синхронизации, обладают той особенностью, что в отвечающей им порождающей системе каждое из первых k уравнений будет независимым; после определения из них векторов $\mathbf{y}_0^{(s)}$ вектор $\mathbf{v}_0$ может быть найден из последнего уравнения. Это обстоятельство существенно облегчает решение порождающей системы, однако оно приводит к ряду осложнений при исследовании полной системы. Дело в том, что порождающая система в задачах о синхронизации допускает не одно, а целое семейство периодических решений

$$y_{j0}^{(s)} = y_{j0}^{(s)}(\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \qquad (j=1, \ldots, r_s;\ s=1, \ldots, k) \tag{3.3}$$

зависящее от некоторого числа p произвольных параметров α_q. При этом p равно или больше числа объектов k, что нетрудно понять: в порождающем приближении уравнения движения объектов независимы и если они допускают периодическое решение $y_{j0}(\tau)$, то в силу автономности каждого из уравнений (3.1) они, согласно (2.2), допускают также и периодические решения $y_{j0}^{(s)}(\tau + \omega\alpha_s) + q_j^{(s)}\omega\alpha_s$, где α_s — произвольные постоянные.

Известно, что наличию решений типа (3.3) у порождающей системы отвечает особый случай, когда определитель Пуанкаре обращается в нуль вместе со своими минорами до $l-p+1$-го порядка включительно [19]. В данном случае осложняется изучение не только условий существования, но и условий устойчивости периодических решений, ибо, в силу известной теоремы Пуанкаре, характеристическое уравнение для системы, отвечающей порождающей системе и порождающему решению, непременно имеет p-кратный корень, равный единице. Поэтому исходное приближение к корням характеристического уравнения еще не дает ответа на вопрос об устойчивости и необходимо рассмотреть следующее приближение.

Наличие кратных (или близких) корней у характеристического уравнения в задачах о синхронизации может быть связано не только с автономностью, но и с наличием в системе нескольких одинаковых (или почти одинаковых) объектов. Заметим также, что в системах со слабыми связями порождающие уравнения движения всех объектов независимы, поэтому характеристическое уравнение распадается не менее чем на k независимых уравнений, и элементарные делители, отвечающие каждому корню, будут простыми, если только простым будет соответствующий корень для каждого из уравнений (3.2) в отдельности.

Существует и другая категория задач о синхронизации, при решении которых удается эффективно использовать метод малого параметра. Речь идет о случаях, когда можно ограничиться исследованием синхронизации при условии, что объекты совершают движения, близкие к какому-либо известному движению.

Так, например, ряд задач о синхронизации вибраторов, об автобалансире, об изгибно-крутильных колебаниях валов, о синхронизации генераторов зачастую достаточно решить в предположении, что в синхронных движениях изменение во времени всех вращательных координат (углов поворота роторов) происходит по закону, близкому к равномерному вращению с синхронной угловой скоростью ω.

§ 4. Краткий обзор исследований по теории синхронизации динамических систем. О некоторых нерешенных задачах. 1. *Математические исследования.* Систематическое рассмотрение общего случая зависимости порождающего решения от произвольного числа p произвольных параметров α_j было начато в монографии И. Г. Малкина [19]; как указывалось в § 3, этот случай представляет особый интерес для теории синхронизации. Обобщив результат Пуанкаре [20], И. Г. Малкин установил, что периодические решения основной системы уравнений, обращающиеся при $\mu=0$ в порождающее решение, могут отвечать лишь тем значениям параметров α_j, которые удовлетворяют некоторой системе уравнений

$$P_s(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)=0 \qquad (s=1,\ldots,p) \tag{4.1}$$

Каждому простому решению $\alpha_1=\alpha_1^*$, ..., $\alpha_p=\alpha_p^*$ этой системы действительно отвечает единственное периодическое решение основной системы дифференциальных уравнений, аналитическое относительно μ и обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение.

Позднее И. Г. Малкиным [21, 22], С. Н. Шимановым [23–28], Г. А. Мерманом [29], Е. Коддингтоном и Н. Левинсоном [30], Н. Г. Булгаковым [31], И. М. Волком [32], Ю. И. Неймарком [33], В. М. Волосовым [34], Ю. И. Неймарком и Л. П. Шильниковым [35], М. З. Коловским [36], М. Я. Кушулем[37] и А. М. Родионовым [38] были получены развернутые выражения или указан конкретный способ построения функций P_s для различных типов систем дифференциальных уравнений. При этом в работах Г. А. Мермана [29], С. Н. Шиманова [23, 26] и некоторых других авторов изучены также особые случаи, когда решение уравнений (4.1) является непростым; для систем с одной и двумя степенями свободы при $p = 2$ или $p = 4$ эти случаи подробно рассмотрены А. П. Проскуряковым [39, 40] и Г. В. Плотниковой [41, 42].

Изученная нами в работе [3] задача о самосинхронизации вибраторов представляет пример конкретной технической задачи, для решения которой как раз необходимо рассмотрение случая, когда порождающее решение зависит от p произвольных параметров, а характеристическое уравнение для порождающей системы и порождающего решения имеет p-кратный корень, равный единице (с простыми элементарными делителями). В этой работе было показано, что исследование устойчивости периодических решений при достаточно малых μ может быть сведено к изучению вопроса о знаках вещественных частей корней алгебраического уравнения p-й степени (δ_{sj} — символ Кронекера)

$$\left|\frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj}\varkappa\right|_{\alpha=\alpha^*} = 0 \quad (s,\ j = 1,\ldots,p) \tag{4.2}$$

т. е. к обычной задаче Гурвица.

В статье [43] соответствующая теорема об устойчивости доказана для квазилинейных неавтономных систем. Доказательство ряда аналогичных теорем для периодических и почти периодических решений неавтономных нелинейных систем дано в монографии И. Г. Малкина [44]. Случай квазилинейных автономных систем рассмотрен в нашей заметке [63], а обобщение на почти-периодические колебания квазилинейных систем с запаздыванием дано С. Н. Шимановым [45]. Дж. А. Ноэлем [46] некоторые результаты наших статей [43, 63] получены путем несколько иных рассуждений и дополнены рядом новых теорем.

В работе [47] отмечено, что если существует функция $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, такая, что $\partial D / \partial \alpha_j = -P_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, то эта функция играет в задаче о периодических движениях ту же роль, что и потенциальная энергия в задаче о положениях равновесия: стационарным точкам функции D могут отвечать периодические решения изучаемого типа, а точкам минимума, обнаруживаемого путем анализа членов второго порядка в разложении D вблизи стационарного значения, — устойчивые периодические движения. Установлено, что в ряде случаев функция D совпадает со средним за период значением кинетического потенциала системы. Для частного случая это обстоятельство было первоначально отмечено в работе Б. П. Лаврова и автора [48].

В статье В. Ф. Бахмутского [49] показано, что путем некоторого видоизменения рассуждений метод Пуанкаре может быть успешно использован для изучения процессов установления периодических решений; обычно это делается посредством асимптотических методов [50]. При этом в работе [49] как раз рассматривается случай наличия порождающих решений типа (3.3) и устанавливается, что в исходном приближении параметры α_j могут, вообще говоря, считаться медленно меняющимися функциями времени, определяемыми из системы уравнений

$$\frac{d\alpha_s}{d\tau} = \frac{\mu}{2\pi} P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \qquad (s = 1, \ldots, p) \tag{4.3}$$

2. *Исследования по теории синхронизации отдельных классов динамических систем.* Синхронизация слабо связанных автоколебательных объектов с почти равномерными вращательными движениями рассмотрена в работе [47] и более подробно — в диссертации автора, защищенной в 1962 г. в Ленинградском политехническом

институте им. М. И. Калинина. Предполагалось, что движение системы описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&I_s\varphi_s^{\cdot\cdot} + k_s\varphi_s^{\cdot} - k_s\sigma_s\omega = \mu\Phi_s && (s = 1, \ldots, k)\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_r^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial x_r} = Q_r^{\circ} + \mu Q_r^{(1)} && (r = 1, \ldots, \nu)
\end{aligned}
\qquad (4.4)
$$

где

$$\mu\Phi_s = I_s\varphi_s^{\cdot\cdot} + k_s\varphi_s^{\cdot} - k_s\sigma_s\omega - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\varphi_s^{\cdot}} + \frac{\partial L}{\partial\varphi_s} + Q_s$$

$L = T - \Pi$ — функция Лагранжа; φ_s — вращательные, а x_r — колебательные обобщенные координаты; Q_s и $Q_r^{\circ} + \mu Q_r^{(1)} = Q_r$ — обобщенные силы; I_s, k_s и ω — положительные постоянные; $\sigma_s = \pm 1$. Считалось также, что отвечающая уравнениям (4.4) порождающая система допускает решения вида

$$
\begin{aligned}
&\varphi_s = \sigma_s(\omega t + \alpha_s) && (s = 1, \ldots, k)\\
&x_r^{\circ} = x_r^{\circ}(\omega t, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) && (r = 1, \ldots, \nu)
\end{aligned}
\qquad (4.5)
$$

где x_r° — периодические функции t с периодом $2\pi/\omega$, а α_s — постоянные.

К данному типу относятся задачи о синхронизации механических вибраторов, об автоматическом балансире, об изгибно-крутильных колебаниях валов с дисками, а также многие задачи о синхронизации электрических машин (см. § 1, пп. 1—3 и 5).

При достаточно общих предположениях относительно вида функций L и Q показано, что функции P_s, от которых, согласно сказанному выше, зависит решение вопроса о существовании и устойчивости синхронных движений, могут быть представлены в форме

$$P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{1}{k_s}\left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_s} + \frac{\omega}{2\pi}\sum_{r=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}[Q_r^{\circ}]\frac{\partial x_r^{\circ}}{\partial\alpha_s}dt + \frac{\omega\sigma_s}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[Q_s]\,dt\right\} \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (4.6)$$

где

$$\Lambda = \Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[L]\,dt$$

а квадратные скобки указывают, что заключенные в них величины вычисляются для порождающего решения.

Если, как это часто бывает, $Q_r^{\circ} = 0$ и

$$
\begin{aligned}
&L = L_0 + L_1, \qquad L_0 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}(a_{rj}x_r^{\cdot}x_j^{\cdot} - b_{rj}x_rx_j)\\
&L_1 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}d_{sj}\varphi_s^{\cdot}\varphi_j^{\cdot} + \sum_{r=1}^{\nu}f_rx_r^{\cdot} + \sum_{s=1}^{k}F_s
\end{aligned}
\qquad (4.7)
$$

где a_{rj}, b_{rj} и d_{sj} — постоянные, f_r — функции φ_j и $\varphi_j^{\cdot}$, а F_s — периодические функции φ_s с периодом 2π, то можно принять [47]

$$\Lambda = -\Lambda_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[L_0]\,dt \qquad (4.8)$$

Наконец, если в равенствах (4.6) два последних члена могут быть представлены в виде производной от некоторой функции A по α_s, а все k_s одинаковы, то существует функция D, о которой говорилось в предыдущем пункте.

В упомянутой выше диссертации автора рассмотрена также задача о синхронизации слабо связанных осцилляторов Ван-дер-Поля; для частного случая двух осцилляторов эта задача изучалась ранее иным методом Н. Минорским [51].

В работе Р. Ф. Нагаева [52] рассмотрена задача о внутренней синхронизации почти одинаковых автономных объектов под действием слабых линейных связей.

3. *Работы по теории синхронизации конкретных технических объектов.* Из конкретных проблем синхронизации наиболее подробно рассмотрена задача о совместной параллельной работе нескольких синхронных электрических машин (см. сноску на стр. 202). В числе первых исследований в этой области необходимо упомянуть работы Ф. Олендорфа и В. Петерса [53], Н. Н. Крылова и Н. Н. Боголюбова [16], П. С. Жданова и С. А. Лебедева [17], А. А. Горева [18]. Обстоятельную библиографию и характеристику современного состояния вопроса можно найти в работах [54–56].

Несмотря на наличие многочисленных исследований, в которых получен ряд существенных результатов, многие важные стороны проблемы ввиду их крайней сложности до сих пор остаются неизученными. В частности, почти не рассмотрены несимметричные режимы работы машин и вообще случаи, когда переходные процессы описываются уравнениями с периодическими коэффициентами.

Самосинхронизация двух связанных между собой релаксационных ламповых генераторов (мультивибраторов) рассматривалась А. С. Бремзеном и И. С. Файнбергом [57], причем были обнаружены режимы кратной синхронизации и показана возможность генерирования колебаний связанной системой в случае, когда каждый из генераторов в отдельности не возбуждается.

Вопросу о синхронизации ламповых генераторов родственна задача об автоколебаниях связанных контуров, один из которых самовозбуждается, а другой не возбужден. Эта задача, поставленная еще Ван-дер-Полем, впервые в достаточно строгой постановке для случая сильной связи между контурами рассматривалась А. А. Андроновым и А. А. Виттом [58], А. П. Скибарко и С. П. Стрелковым [59]. Для случая слабой связи соответствующее исследование выполнено С. В. Беллюстиным [60]. Механический аналог указанной выше системы, но с ударным возбуждением, изучен в работе Н. В. Бутенина [61], посвященной решению задачи Кельвина из теории часов. Система из нескольких сильно связанных контуров *RLC*, один из которых возбужден, рассмотрена в связи с теорией динамического триггера М. Н. Гущиным [62].

Задача Гюйгенса о самосинхронизации маятниковых часов для частного случая двух часов изучалась Н. Минорским при помощи так называемого стробоскопического метода [51]. Для любого числа часов в более строгой постановке (см. § 1, п. 4) эта задача рассмотрена нами в упомянутой выше диссертации путем использования теоремы статьи [63].

Другой цикл работ составляют исследования по теории синхронизации механических вибраторов. В работе [3] было дано объяснение явления самосинхронизации вибраторов и рассмотрен простейший случай, когда рабочий орган машины имеет всего одну степень свободы (см. § 1, п. 1). Более сложная задача — о самосинхронизации вибраторов, установленных на машине, вибрирующий орган которой может совершать произвольное плоское движение,— изучена автором в работах [4, 5]. Основы теории принудительной электрической синхронизации, а также синхронизации посредством введения упругих элементов между роторами вибраторов, рассмотрены в статьях [11, 64]. Исследования [48, 65] посвящены интегральному признаку устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов. Дальнейшие обобщения этого признака даны в докладе [47]. В работе О. Я. Шехтер [66] задача о самосинхронизации вибраторов в машине с двумя степенями свободы вибрирующего органа изучена применительно к теории установки для вибрационного погружения оболочек. Приложения теории синхронизации вибраторов к динамике дробильно-измельчительных, транспортно-технологических и некоторых других вибрационных машин рассмотрены в статьях [5, 7, 67, 68], а также в упоминавшейся диссертации автора.

В работе Б. П. Лаврова [70] изучена задача о синхронизации вибраторов, установленных на свободном твердом теле. При этом рассмотрен случай, когда среди вибраторов имеются и так называемые качающиеся вибраторы.

В монографии К. М. Рагульскиса [71] изучен ряд систем с самосинхронизирующимися вибраторами, в том числе рассмотрены для простейших случаев кратная самосинхронизация вибраторов и самосинхронизация при наличии ударов. Сложная система с ударами, колебания в которой возбуждаются двумя самосинхронизирующимися вибраторами, исследована применительно к теории щековой вибрационной дробилки Р. Ф. Нагаевым [72].

Задачи об автоматическом балансире и об изгибно-крутильных колебаниях вращающегося вала с неуравновешенными дисками, которые, согласно изложенному в § 1, могут рассматриваться как задачи о синхронизации, изучены автором в упоминавшейся выше диссертации. В иной постановке и иным методом первая из этих задач рассматривалась ранее Ф. М. Детинко [15].

Вырожденный класс задач теории синхронизации представляют так называемые проблемы захватывания, в которых речь идет по существу о принудительной внешней синхронизации одного единственного автоколебательного объекта. Работы по теории захватывания, принадлежащие Ван-дер-Полю [73], Е. Эпплтону [74], А. А. Андронову и А. А. Витту [58] и их многочисленным последователям, сыграли важную роль в развитии общей теории нелинейных колебаний.

К явлениям захватывания можно отнести и своеобразный эффект возбуждения и поддержания вращения неуравновешенного ротора посредством колебаний его оси. Этот эффект изучался Н. Н. Боголюбовым [75], затем автором [6] и позднее Д. Д. Барканом и О. Я. Шехтер [76], В. В. Гортинским [77], Т. К. Куи [78] и К. М. Рагульскисом [71]. Связь данного эффекта с явлением самосинхронизации установлена нами в работе [4].

В числе задач теории синхронизации, не получивших до сих пор достаточно полного решения, отметим задачи о синхронизации в системах с разрывными характеристиками (в частности, задачу о синхронизации вибраторов в системах с ударами); задачи о кратной синхронизации; проблему синхронизации для систем с распределенными параметрами; вопросы синхронизации (самоорганизации) биологических и других объектов, вообще говоря, нединамического характера; задачи об отыскании «областей притяжения» синхронных движений в фазовом пространстве системы; вопросы корректности перехода от рассмотрения задач об автономной (внутренней синхронизации к задачам о неавтономной (внешней) синхронизации (см. § 2).

В заключение отметим следующее. В подавляющем большинстве изученных задач о внутренней синхронизации слабо взаимодействующих автоколебательных объектов соответствующая система дифференциальных уравнений, как правило, допускает хотя бы одно устойчивое периодическое решение (т. е. синхронизация имеет место), если только достаточно малы различия между парциальными частотами или угловыми скоростями. Этот факт и является подтверждением того, что тенденция к синхронизации представляет собой общую закономерность поведения взаимосвязанных материальных объектов.

Вместе с тем иногда синхронизация имеет место, несмотря на «слабость» связей, даже при существенных различиях в парциальных частотах и других параметрах отдельных объектов [4,5].

Поступила 24 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. Пер. под ред. и с примеч. проф. К. К. Баумгарта. Изд. АН СССР, 1951, стр. 30—31.
2. Стретт Дж. В. (Лорд Релей). Теория звука. Гостехиздат, М.— Л., 1944, т. II, стр. 218—219.
3. Блехман И. И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин. Инж. сб., 1953, т. XVI.
4. Блехман И. И. О самосинхронизации механических вибраторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 6.

5. Блехман И. И. Теория самосинхронизации механических вибраторов и ее приложения. Тр. второго Всесоюзн. совещ. по основным пробл. теории машин и механизмов. Динамика машин, Машгиз, 1960.
6. Блехман И. И. Вращение неуравновешенного ротора, обусловленное гармоническими колебаниями его оси. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 8.
7. Блехман И. И., Рудин А. Д. и Рундквист А. К. Об условиях движения с обкаткой дробящих тел в вибрационных дробильно-измельчительных машинах. Обогащение руд, 1961, № 3.
8. Fagerberg B. New vibrating screen improves iron ore processing. Engng and Mining J., July, 1960.
9. Гринберг А. П. Методы ускорения заряженных частиц. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
10. Новосельский П. И., Борщевский А. Б. и Сильванович В. Н. Синхронно—синфазный привод дебалансных виброплощадок. Строительное и дорожное машиностроение, 1956, № 5.
11. Блехман И. И. Динамика привода вибрационных машин со многими синхронными механическими вибраторами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
12. Винер Н. Новые главы кибернетики. Советское радио, 1963.
13. Thearle E. L. Automatic dinamic balancers. Machine Design, 1950, vol. 22, No 9—11.
14. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. Машгиз, 1957.
15. Детинко Ф. М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
16. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. I. О колебаниях синхронных машин. II. Об устойчивости параллельной работы n синхронных машин. ОНТВУ — ЕНЕРГОВИДАВ, Харків — Київ, 1932.
17. Жданов П. С. Устойчивость электрических систем. Госэнергоиздат, 1948.
18. Горев А. А. Избранные труды по вопросам устойчивости электрических систем. Госэнергоиздат, М.—Л., 1960.
19. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
20. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris, Gauthier — Villars, 1892, vol. I; 1893, vol. II; 1899, vol. III.
21. Малкин И. Г. К теории колебаний квазилинейных систем со многими степенями свободы. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 4.
22. Малкин И. Г. О почти периодических колебаниях нелинейных неавтономных систем. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 6.
23. Шиманов С. Н. К теории квазигармонических колебаний. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 2.
24. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
25. Шиманов С. Н. Об одном способе получения условий существования периодических решений нелинейных систем. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 2.
26. Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
27. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
28. Шиманов С. Н. О почти периодических колебаниях в нелинейных системах с запаздыванием. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 6.
29. Мерман Г. А. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла. Тр. Ин-та теоретической астрономии, 1952, вып. 1.
30. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ., ИЛ, 1958.
31. Булгаков Н. Г. Колебания квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы и неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 3.
32. Волк И. М. Об одном классе автоколебательных систем. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 2.
33. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. I, II, III. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1958, № 1, 2, 5—6.
34. Волосов В. М. О решениях некоторых возмущенных систем в окрестности периодических движений. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 4.
35. Неймарк Ю. И. и Шильников Л. П. О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
36. Коловский М. З. О применении метода малого параметра для определения

разрывных периодических решений. Докл. на Межд. симпозиуме по нелинейным колебаниям, Киев, 1961.
37. Кушуль М. Я. О квазигармонических системах, близких к системам с постоянными коэффициентами, у которых чисто мнимые корни фундаментального уравнения имеют непростые элементарные делители. ПММ, 1958, т. XXII, № 4.
38. Родионов А. М. Квазилинейные системы с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
39. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
40. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
41. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы при резонансе в случае двухкратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
42. Плотникова Г. В. К построению периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.
43. Блехман И. И. К вопросу об устойчивости периодических решений квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 6.
44. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
45. Шиманов С. Н. О почти периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 1.
46. Nohel J. A. Stability of perturbed periodic motions. J. für die reine und angew. Math., 1960, B. 203, H. 1/2.
47. Блехман И. И. Интегральный критерий устойчивости периодических движений некоторых нелинейных систем и его приложения. Докл. на Межд. симпозиуме по нелинейным колебаниям, Киев, 1961, (Тр. симпозиума, т. II, 1963).
48. Блехман И. И. и Лавров Б. П. Об одном интегральном признаке устойчивости движения. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
49. Бахмутский В. Ф. К исследованию процессов установления колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
50. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колбаний. Изд. третье, Физматгиз, 1963.
51. Минорский Н. О синхронизации. Докл. на Межд. симпозиуме по нелинейным колебаниям, Киев, 1961.
52. Нагаев Р. Ф. О внутренней синхронизации почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей. ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. 2.
53. Ollendorf F., Peters W. Schwingungstabilität parallelarbeitender Synchronmaschinen. Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern., Springer 1925—1926, B. VI, S. 7—26.
54. Кимбарк Э. Синхронные машины и устойчивость электрических систем. Госэнергоиздат, М.—Л., 1960.
55. Картвелишвили Н. А. Влияние взаимодействия гидравлических, механических и электрических процессов на устойчивость работы электростанций. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 2.
56. Веников В. А. Режим и устойчивость на Международной конференции (СИГРЭ). Электрические станции, 1961, № 3.
57. Бремзен А. С. и Файнберг И. С. Анализ работы двух связанных релаксационных генераторов. Ж. техн. физ., 1941, т. XI, вып. 10.
58. Андронов А. А. и Витт А. А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. Ж. техн. физ., 1934, т. IV, вып. 1.
59. Скибарко А. П. и Стрелков С. П. Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. Ж. техн. физ., 1934, т. IV, вып. 1.
60. Беллюстин С. В. К теории двух слабо связанных контуров. Уч. зап. Горьк. гос. ун-та, 1939, вып. XII.
61. Бутенин Н. В. Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов. Ж. эксперим. и теор. физ., 1940, т. 10, вып. 11.
62. Гущин М. Н. Об устойчивости колебательных компонент в автоколебательной системе со многими степенями свободы при асинхронном соотношении частот. Вестник МГУ, сер. 3, Физика и астрономия, 1960, № 2.
63. Блехман И. И. Об устойчивости периодических решений квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 2.
64. Блехман И. И. Совместная работа нескольких синхронных механических вибраторов. Тр. Ин-та машиновед. АН СССР. Семинар по теории машин и механизмов, 1961, т. XXI, вып. 83—84.

65. Блехман И. И. Обоснование интегрального признака устойчивости движения и задачах о самосинхронизации вибраторов. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
66. Шехтер О. Я. О погружении тяжелых железобетонных оболочек. Динамика грунтов, сб. № 44, Госстройиздат, 1961.
67. Блехман И. И. О критической щели вибрационной роликовой мельницы. Обогащение руд, 1961, № 1.
68. Рундквист А. К., Блехман И. И. и Рудин А. Д. К теории критической щели инерционных дробильно-измельчительных машин. Обогащение руд, 1961, № 2.
69. Блехман И. И. Исследование режимов установления самосинхронизации механических вибраторов методом скоростной киносъемки. Науч.-техн. информац. бюл. Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, № 2. Применение специальных видов киносъемки в научных исследованиях. Л., 1960.
70. Лавров Б. П. Пространственная задача о синхронизации механических вибраторов. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.
71. Рагульскис К. М. Механизмы на вибрирующем основании (вопросы динамики и устойчивости). Изд. Ин-та энергетики и электротехники АН ЛитССР, Каунас, 1963.
72. Нагаев Р. Ф. Динамика виброударной дробилки с парой самосинхронизирующихся вибраторов. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
73. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. Связьиздат, 1935.
74. Appleton E. V. The automatic synchronization of triode oscillator. Proc. Cambridge Philos. Soc. (Math. and Phys. Sciences), 1922, vol. 21.
75. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН СССР, 1950, № 14.
76. Шехтер О. Я. Об одном примере субгармонических колебаний. Тр. Совещ. по применению вибраций при устройстве оснований сооружений и бурений скважин в строительных целях. Л., 1959.
77. Гортинский В. В. Об условиях вращения инерционного распределителя мельничных рассевов. Тр. Ин-та машиновед. АН СССР, Семинар по теории машин и механизмов, 1959, т. XVIII, вып. 72.
78. Coughey T. K. Hula-hoop: one example of heteroparametric excitation. Amer. J. Phys., 1960, vol. 28, № 2.
79. Блехман И. И. Вибрационные машины с механическими возбудителями колебаний. Применение вибротехники в горном деле. Сб. ст., Госгортехиздат, 1960.