

ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОЙ МАССИВНОЙ ПОЛОСЫ, ВПАЯННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Б. В. Костров
(Москва)

Плоская задача о движении жесткой массивной полосы конечной постоянной ширины и бесконечной длины, находящейся в жестком контакте с безграничной упругой средой, при падении на нее плоской упругой волны приводится к двум граничным задачам динамической теории упругости для полупространства, которые решаются методом Винера — Хопфа — Фока.

Получены формулы для компонент смещения и угла поворота полосы, содержащие для конечных моментов времени конечное число квадратур.

Аналогичная задача для полосы, лежащей на поверхности упругого полупространства, рассматривалась в работе [1]. Родственная акустическая задача аналогичным методом была рассмотрена Е. Ф. Афанасьевым [2].

1. Рассмотрим жесткую массивную полосу бесконечной длины и конечной постоянной ширины, находящуюся в жестком контакте с упругой средой, заполняющей безграничное пространство. Выберем единицы измерения длины, времени и массы так, чтобы половина ширины полосы, плотность среды и скорость поперечных волн были равны единице. Введем декартову систему координат x, y, z так, чтобы полоса была расположена вдоль оси z , так что $y = 0$, $-\infty < z < \infty$, $|x| \leq 1$.

Пусть на полосу падает плоская волна, фронт которой, параллельный краю полосы (фиг. 1), достигает его в момент времени $t = 0$. При принятых предположениях все величины не зависят от координаты z , т. е. среда находится в состоянии плоской деформации. При $t \leq 0$, полоса покоится, а полный вектор смещения среды с компонентами u_n, v_n совпадает с вектором смещения в падающей волне

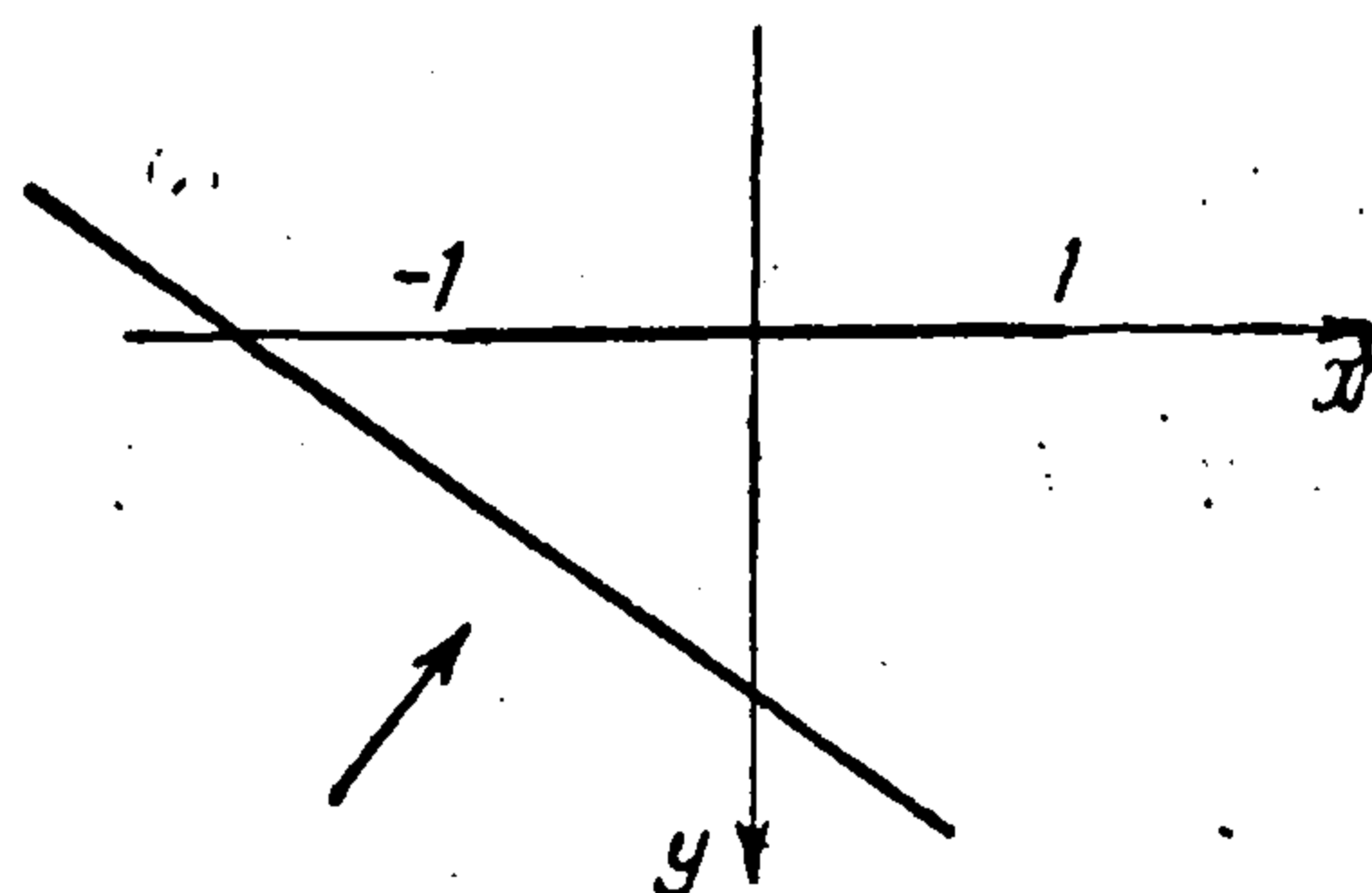
$$\begin{aligned} u_n(x, y, t) &= u_i(t - \vartheta(x + 1) + \delta y) \\ v_n(x, y, t) &= v_i(t - \vartheta(x + 1) + \delta y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

при $t \leq 0$

Функции u_i и v_i удовлетворяют условиям

$$u_i(\tau) = v_i(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad (1.2)$$

Если фиксировать тип падающей волны (продольная или поперечная), можно получить соотношения, связывающие функции u_i и v_i , а также величины ϑ и δ . Однако в дальнейшем это не потребуется. Заметим только, что при падении поперечной волны $\vartheta \leq 1$, а при падении продольной волны $\vartheta \leq \gamma$, где γ — обратная величина скорости продольных волн ($\gamma < 1$).



Фиг. 1

При $t > 0$ движение упругой среды описываем выражениями

$$\begin{aligned} u_n(x, y, t) &= u_i(t - \vartheta(x + 1) + \delta y) + u(x, y, t) \\ v_n(x, y, t) &= v_i(t - \vartheta(x + 1) + \delta y) + v(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где u и v — компоненты смещения в возмущении, обусловленном присутствием полосы. Из (1.1) и (1.3) следуют нулевые начальные условия для функций u и v .

При $t > 0$ полоса приходит в движение, описание которого и представляет цель работы. Так как полоса недеформируема, ее движение можно описать смещением центра тяжести с компонентами $u_0(t)$ и $v_0(t)$ и углом поворота $\alpha(t)$. Уравнения движения полосы имеют вид

$$mu_0'' = R_x(t), \quad mv_0'' = R_y(t), \quad J\alpha'' = M(t) \quad (1.4)$$

Здесь m — масса, J — момент инерции единицы длины полосы, $R_x(t)$ и $R_y(t)$ — компоненты равнодействующей, а $M(t)$ — момент усилий, действующих на единицу длины полосы. В силу жесткого контакта полосы со средой имеем

$$R_x(t) = \int_{-1}^1 [\tau_{xy}] dx, \quad R_y(t) = \int_{-1}^1 [\sigma_{yy}] dx, \quad M(t) = \int_{-1}^1 [\sigma_{yy}] (x - x_0) dx \quad (1.5)$$

где x_0 — координата центра тяжести полосы в положении равновесия, а

$$\begin{aligned} [\tau_{xy}] &= \tau_{xy}(x, +0, t) - \tau_{xy}(x, -0, t) \\ [\sigma_{yy}] &= \sigma_{yy}(x, +0, t) - \sigma_{yy}(x, -0, t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

суть скачки компонентов напряжения на полосе. Если бы полоса предполагалась однородной, следовало бы положить $x_0 = 0$, $J = 1/3 m$.

Уравнений (1.4) еще недостаточно для определения движения полосы, так как их правые части (1.5) в свою очередь зависят от этого движения.

Для выяснения этой зависимости будем пока считать величины $u_0(t)$, $v_0(t)$, $\alpha(t)$ заданными функциями времени.

Тогда из условия жесткого контакта полосы со средой получим

$$u_n = u_0(t), \quad v_n = v_0(t) + (x - x_0)\alpha(t) \quad \text{при } y = 0, |x| \leq 1 \quad (1.7)$$

Вместе с (1.3) это дает граничные условия для u и v

$$\begin{aligned} u &= u_0(t) - u_i(t - (x + 1)\vartheta) \\ v &= v_0(t) - v_i(t - (x + 1)\vartheta) + (x - x_0)\alpha(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (y = 0) \\ (|x| \leq 1) \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

Уравнения движения среды в нашей системе единиц имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Как известно, эти уравнения удовлетворяются выражениями

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.10)$$

где $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ суть потенциалы продольных и поперечных волн, удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Теперь, следуя Мауэ [2], представим вектор смещения (u, v) в виде суммы двух слагаемых — симметричного и антисимметричного относительно плоскости $y = 0$

$$u = u_{(1)} + u_{(2)}, \quad v = v_{(1)} + v_{(2)} \quad (1.12)$$

При этом $u_{(1)}, v_{(2)}, \sigma_{(1)}, \tau_{(2)}, \varphi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ будут четными, а $u_{(2)}, v_{(1)}, \sigma_{(2)}, \tau_{(1)}, \varphi_{(2)}$ и $\psi_{(1)}$ — нечетными функциями y . Здесь и в дальнейшем опускаем индексы xu и yu у компонентов напряжений.

Компоненты смещения должны быть непрерывны всюду при $y = 0$ (как функции y), а компоненты напряжения — вне полосы. Отсюда следует

$$\begin{aligned} u_{(2)} = v_{(1)} = 0 & \quad \text{при } y = 0, -\infty < x < \infty \\ \tau_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0 & \quad \text{при } y = 0, |x| > 1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Вместо (1.6) получим

$$[\sigma_{yy}] = 2\sigma_{(2)}(x, +0, t), \quad [\tau_{xy}] = 2\tau_{(1)}(x, +0, t) \quad (1.14)$$

Симметричная и антисимметричная части поля порознь удовлетворяют уравнениям движения. Граничные условия для них также устанавливаются независимо, и поэтому они определяются независимо друг от друга. При этом можно разыскивать их только в полупространстве $y \geq 0$, так как в полупространство $y < 0$ они продолжают при помощи указанных свойств четности. Из (1.8) и (1.13) вытекают граничные условия

$$\begin{aligned} u_{(1)} = u_0(t) - u_i(t - (x+1)\vartheta) & \quad \text{при } y = 0, |x| \leq 1 \\ v_{(1)} = 0 & \quad \text{при } y = 0, -\infty < x < \infty, \quad \tau_{(1)} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > 1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} v_{(2)} = v_0(t) + (x - x_0)\alpha(t - v_i(t) - (x+1)\vartheta) & \quad \text{при } y = 0, |x| \leq 1 \\ u_{(2)} = 0 & \quad \text{при } y = 0, -\infty < x < \infty, \quad \sigma_{(2)} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > 1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для дальнейшего потребуются еще выражения напряжений через потенциалы

$$\sigma_{(j)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_{(j)} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi_{(j)}, \quad \tau_{(j)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_{(j)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_{(j)} \quad (j = 1, 2) \quad (1.17)$$

Из-за наличия у полосы острых ребер недостаточно одних граничных и начальных условий для однозначного определения решения. Дополнительное условие, так называемое «условие на ребре» (см., например, работу [3]), сформулируем следующим образом: потребуем, чтобы в окрестности ребер смещения были ограничены, а напряжения росли не быстрее, чем обратная величина квадратного корня из расстояния от ребра.

Таким образом, приходим к двум независимым граничным задачам для полупространства со смешанными граничными условиями, заданными на трех частях границы, для определения симметричной и антисимметричной частей решения.

2. Произведем двукратное преобразование Лапласа по x и t

$$\begin{aligned} \varphi(q, y, p) &= \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-qx - pt) \varphi(x, y, t) dx \\ \varphi(x, y, t) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} dp \int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} \exp(qx + pt) \varphi(q, y, p) dq \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $c > 0$, а c' таково, что путь интегрирования по q лежит в полосе регулярности $\varphi(q, y, p)$ как функции q , и аналогичные преобразования от остальных величин. При этом изображения будем обозначать теми же буквами, что и оригиналы, делая различие, где это необходимо, только в аргументах. Будем рассматривать также однократное преобразование по t . Например,

$$v_0(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v_0(t) dt, \quad v_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{pt} v_0(p) dp \quad (2.2)$$

Применение преобразования (2.1) к волновым уравнениям (1.11) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(q, y, p)}{\partial y^2} - (\gamma^2 p^2 - q^2) \varphi(q, y, p) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi(q, y, p)}{\partial y^2} - (p^2 - q^2) \psi(q, y, p) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решения этих уравнений, согласующиеся с нулевыми начальными условиями, следует выбрать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(q, y, p) &= \varphi(q, p) \exp(-\sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} y) \\ \psi(q, y, p) &= \psi(q, p) \exp(-\sqrt{p^2 - q^2} y) \end{aligned} \quad (y > 0) \quad (2.4)$$

Входящие сюда квадратные корни должны быть так униформизованы, чтобы

$$\operatorname{Re} \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \geq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{p^2 - q^2} \geq 0 \quad (2.5)$$

причем достаточно, чтобы эти условия выполнялись в следующей полосе: $-\gamma \operatorname{Re} p < \operatorname{Re} q < \gamma \operatorname{Re} p$. Для этого проведем в комплексной плоскости q разрезы вдоль лучей $q = \pm ps$, где s — действительно и $\gamma \leq s < \infty$.

Изображения граничных значений смещений и напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_{(j)}(q, 0, p) &= u_{(j)}^+(q, p) e^{-q} + u_{(j)}^-(q, p) e^q + u_{(j)}^{\circ}(q, p) \\ v_{(j)}(q, 0, p) &= v_{(j)}^+(q, p) e^{-q} + v_{(j)}^-(q, p) e^q + v_{(j)}^{\circ}(q, p) \\ \tau_{(j)}(q, 0, p) &= \tau_{(j)}^+(q, p) e^{-q} + \tau_{(j)}^-(q, p) e^q + \tau_{(j)}^{\circ}(q, p) \\ \sigma_{(j)}(q, 0, p) &= \sigma_{(j)}^+(q, p) e^{-q} + \sigma_{(j)}^-(q, p) e^q + \sigma_{(j)}^{\circ}(q, p) \end{aligned} \quad (j = 1, 2) \quad (2.6)$$

$$u_{(j)}^+(q, p) = \int_0^{\infty} e^{-q\xi} u_{(j)}(\xi + 1; 0, p) d\xi, \quad u_{(j)}^{\circ}(q, p) = \int_{-1}^1 e^{-qx} u_{(j)}(x, 0, p) dx$$

$$u_{(j)}^-(q, p) = \int_0^{\infty} e^{q\xi} u_{(j)}(-\xi - 1, 0, p) d\xi \quad (2.7)$$

и аналогично для остальных величин в (2.6).

Из граничных условий (1.15), (1.16) следует

$$\begin{aligned} v_{(1)}(q, 0, p) = \tau_{(1)}^+(q, p) = \tau_{(1)}^-(q, p) = 0 \\ u_{(2)}(q, 0, p) = \sigma_{(2)}^+(q, p) = \sigma_{(2)}^-(q, p) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Кроме того, из кинематических соображений можно заключить, что граничные значения всех величин исчезают при $t < x \cdot \min(\vartheta, \gamma)$, $x > 0$ и $t < -x\gamma$, $x < 0$. Отсюда следует, что $u_{(j)}^+$ и $v_{(j)}^+$ регулярны как функции q в полуплоскости $\operatorname{Re} q > -\min(\vartheta, \gamma) \operatorname{Re} p$, а $u_{(j)}^-$ и $v_{(j)}^-$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} q < \gamma \operatorname{Re} p$. Величины $\sigma_{(j)}^\circ$, $\tau_{(j)}^\circ$, $u_{(j)}^\circ$ и $v_{(j)}^\circ$, очевидно, суть целые функции от q .

Из условия на ребре обычным способом (см. [4]) получаем

$$\begin{aligned} u_{(1)}^+(q, p) = O(|q|^{-1}), \quad v_{(2)}^+(q, p) = O(|q|^{-1}) \\ e^{-q\sigma_{(2)}^\circ}(q, p) = O(|q|^{-1/2}), \quad e^{-q\tau_{(1)}^\circ}(q, p) = O(|q|^{-1/2}) \quad \text{при } |q| \rightarrow \infty \operatorname{Re} q > 0 \\ u_{(1)}^-(q, p) = O(|q|^{-1}), \quad v_{(2)}^-(q, p) = O(|q|^{-1}) \\ e^{q\sigma_{(2)}^\circ}(q, p) = O(|q|^{-1/2}), \quad e^{q\tau_{(1)}^\circ}(q, p) = O(|q|^{-1/2}) \quad \text{при } |q| \rightarrow \infty \operatorname{Re} q < 0 \end{aligned}$$

Кроме того, из граничных условий (1.15), (1.16) следует

$$\begin{aligned} u_{(1)}^\circ(q, p) = -\frac{2u_i(p) \operatorname{sh}(q + \vartheta p) e^{-\vartheta p}}{q + \vartheta p} + \frac{2 \operatorname{sh} q u_0(p)}{q} \\ v_{(2)}^\circ(q, p) = -\frac{2v_i(p) \operatorname{sh}(q + \vartheta p) e^{-\vartheta p}}{q + \vartheta p} + \\ + \frac{2 \operatorname{sh} q [v_0(p) - x_0 \alpha(p)]}{q} + 2 \left(\frac{\operatorname{sh} q}{q^2} - \frac{\operatorname{ch} q}{q} \right) \alpha(p) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (1.10) и (1.17) имеем

$$\begin{aligned} u_{(j)}(q, y, p) = q\varphi_{(j)}(q, y, p) - \sqrt{p^2 - q^2} \psi_{(j)}(q, y, p) \\ v_{(j)}(q, y, p) = -\sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \varphi_{(j)}(q, y, p) - q\psi_{(j)}(q, y, p) \quad (j=1, 2) \\ \tau_{(j)}(q, y, p) = -2q\sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \varphi_{(j)}(q, y, p) + (p^2 + 2q^2) \psi_{(j)}(q, y, p) \\ \sigma_{(j)}(q, y, p) = (p^2 - 2q^2) \varphi_{(j)}(q, y, p) + 2q\sqrt{p^2 - q^2} \psi_{(j)}(q, y, p) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отсюда при помощи (2.4), (2.6), (2.8), (2.10) получим

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}^\circ(q, p) + \frac{p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}}{q^2 + \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \sqrt{p^2 - q^2}} [e^q u_{(1)}^-(q, p) + e^{-q} u_{(1)}^+(q, p)] = \\ = \frac{2p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}}{q^2 + \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \sqrt{p^2 - q^2}} \left[\frac{u_i(p) \operatorname{sh}(q + \vartheta p) e^{-p\vartheta}}{q + \vartheta p} - \frac{u_0(p) \operatorname{sh} q}{q} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)}^\circ(q, p) + \frac{p^2 \sqrt{p^2 - q^2}}{q^2 + \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \sqrt{p^2 - q^2}} [e^q v_{(2)}^-(q, p) + e^{-q} v_{(2)}^+(q, p)] = \\ = \frac{2p^2 \sqrt{p^2 - q^2}}{q^2 + \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \sqrt{p^2 - q^2}} \left[\frac{v_i(p) \operatorname{sh}(q + \vartheta p) e^{-p\vartheta}}{q + \vartheta p} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} q [v_0(p) - x_0 \alpha(p)]}{q} + \left(\frac{\operatorname{ch} q}{q} - \frac{\operatorname{sh} q}{q^2} \right) \alpha(p) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Уравнения (2.12) и (2.13) суть обобщенные функциональные уравнения типа Винера — Хопфа, теория которых рассматривалась в работе [4]

(стр. 222—224). Введем две функции комплексного переменного s : $K_{(1)}(s)$ и $K_{(2)}(s)$, регулярные и не имеющие нулей в плоскости s , разрезанной вдоль отрезка действительной оси $\gamma \leq s < \infty$, такие, что

$$pK_{(1)}\left(\frac{q}{p}\right)K_{(1)}\left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}}{q^2 + \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \sqrt{p^2 - q^2}} \quad (2.14)$$

$$pK_{(2)}\left(\frac{q}{p}\right)K_{(2)}\left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{p^2 \sqrt{p^2 - q^2}}{q^2 + \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} \sqrt{p^2 - q^2}} \quad (2.15)$$

Эти функции равны (см. [2, 5])

$$K_{(1)}(s) = \sqrt{\frac{2(\gamma - s)}{1 + \gamma^2}} e^{g(s)}, \quad K_{(2)}(s) = \sqrt{\frac{2(1 - s)}{1 + \gamma^2}} e^{g(s)} \quad (2.16)$$

где

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^1 \operatorname{arctg} \sqrt{(1 - \gamma^2 \zeta^{-2})(\zeta^{-2} - 1)} \frac{d\zeta}{\zeta - s} \quad (2.17)$$

причем, если s действительно и лежит в интервале $(\gamma, 1)$, интеграл понимается в смысле главного значения. При действительном s будем также пользоваться следующими обозначениями:

$$K_{(j)}(s + i0) = M_{(j)}(s) - iN_{(j)}(s) = M_{(j)}(s) - iK_{(j)}(-s)L_{(j)}(s) \quad (2.18)$$

Легко видеть, что при $s < \gamma$

$$M_{(j)}(s) = K_{(j)}(s), \quad N_{(j)}(s) = L_{(j)}(s) = 0 \quad (2.19)$$

Кроме того, в дальнейшем потребуются коэффициенты разложения $K_{(j)}(s)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$K_{(j)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{(j)n} \frac{s^n}{n!} \quad (2.20)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнений (2.12) и (2.13), в которых неизвестные функции должны обладать вышеописанными аналитическими свойствами.

3. Займемся прежде всего решением уравнения (2.13). Решение уравнения (2.12) получится после этого при помощи замены

$$K_{(1)}(s) \rightarrow K_{(2)}(s), \quad v_i(t) \rightarrow u_i(t), \quad \alpha(t) \equiv 0$$

Умножив обе части (2.13) на $[K_{(2)}(q/p)]^{-1} e^q$, можно (см. [4]), используя аналитические свойства входящих в него функций, получить соотношение

$$\begin{aligned} v_{(2)}^+(q, p) - \frac{1}{2\pi i} \left[K_{(2)}\left(-\frac{q}{p}\right) \right]^{-1} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{\exp(2q')}{q' - q} K_{(2)}\left(\frac{-q'}{p}\right) v_{(2)}^-(q', p) dq' = \\ = -\frac{\exp(-2p\vartheta)}{q + \vartheta p} v_i(p) + \frac{v_0(p) + (1 - x_0)\alpha(p)}{q} + \frac{\alpha(p)}{q^2} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \left[K_{(2)}\left(-\frac{q}{p}\right) \right]^{-1} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{\exp(2q')}{q' - q} \left\{ \frac{-v_i(p)}{q' + \vartheta p} + \right. \\ \left. + \frac{v_0(p) - (1 + x_0)\alpha(p)}{q'} + \frac{\alpha(p)}{q'^2} \right\} K_{(2)}\left(-\frac{q'}{p}\right) dq' \quad (0 < c < \operatorname{Re} q < \infty) \quad (3.1) \end{aligned}$$

Точно так же, умножив (2.13) на $[K_{(2)}(-q/p)]^{-1}e^{-q}$, получим

$$\begin{aligned}
 v_{(2)}^-(q, p) + \frac{1}{2\pi i} \left[K_{(2)}\left(\frac{q}{p}\right) \right]^{-1} \int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} \frac{\exp(-2q')}{q'-q} K_{(2)}\left(\frac{q'}{p}\right) v_{(2)}^+(q', p) dq' = \\
 = \frac{v_i(p)}{q + \vartheta p} \left[\frac{K_{(2)}(q/p) - K_{(2)}(-\vartheta)}{K_{(2)}(q/p)} \right] + \frac{(1+x_0)\alpha(p) - v_0(p)}{q} - \frac{\alpha(p)}{q^2} + \\
 + \frac{k_{(2)0}[v_0(p) - (1+x_0)\alpha(p)] + p^{-1}k_{(2)1}\alpha(p)}{qK_{(2)}(q/p)} + \frac{k_{(2)0}\alpha(p)}{q^2K_{(2)}(q/p)} - \\
 - \frac{1}{2\pi i} \left[K_{(2)}\left(\frac{q}{p}\right) \right]^{-1} \int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} \frac{\exp(-2q')}{q'-q} \left\{ \frac{\exp(-2p\vartheta)}{q'+p\vartheta} v_i(p) - \right. \\
 \left. - \frac{v_0(p) + (1-x_0)\alpha(p)}{q'} - \frac{\alpha(p)}{q'^2} \right\} K_{(2)}\left(\frac{q'}{p}\right) dq' \quad (-\infty < \operatorname{Re} q < c' < \gamma) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Заменим в (3.1) q' на $-q'$. Деформируя контуры интегрирования в получившемся уравнении и в уравнении (3.2) в правой полуплоскости q' , приведем входящие в них интегралы к интегралам по берегам разрезов. Полагая в уравнении, получающемся из (3.1), $q = ps$, $q' = p\zeta$, а в уравнении, получающемся из (3.2), $q = -ps$, $q' = p\zeta$, получим систему двух интегральных уравнений Фредгольма, которая распадается на два независимых уравнения относительно суммы и разности неизвестных функций. Итерируя эти уравнения, получаем формальное решение в виде рядов Неймана, при помощи которого легко находим выражения для $v_{(2)}^+(p, q)$ и $v_{(2)}^-(p, q)$, и из (2.13) получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{(2)}^\circ(q, p) \equiv \sigma_{(2)}(q, 0, p) = -K_{(2)}\left(\frac{q}{p}\right) e^{-q} \times \\
 \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \cdots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(2)k}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) F_{(2)k}(\zeta_1; p, \vartheta) \frac{d\zeta_1 \dots d\zeta_k}{\zeta_k - qp^{-1}} + \right. \\
 \left. + F_{(2)0}\left(\frac{q}{p}, p, \vartheta\right) \right\} - K_{(2)}\left(-\frac{q}{p}\right) e^q \times \\
 \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \cdots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(2)k}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) F_{(2)k+1}(\zeta_1, p, \vartheta) \frac{d\zeta_1 \dots d\zeta_k}{\zeta_k + qp^{-1}} + \right. \\
 \left. + F_{(2)1}\left(-\frac{q}{p}, p, \vartheta\right) \right\} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Pi_{(2)k} = \frac{L_{(2)}(\zeta_1)}{\pi^k} \prod_{j=2}^k \frac{L_{(2)}(\zeta_j)}{\zeta_j + \zeta_{j-1}} \exp\left(-2p \sum_{l=1}^k \zeta_l\right) \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (3.4)$$

$$\Pi_{(2)1} = \frac{L_{(2)}(\zeta_1)}{\pi} \exp(-2p\zeta_1)$$

$$\begin{aligned}
 F_{(2)k}(\zeta, p, \vartheta) = \frac{M_{(2)}((-1)^k \vartheta) \exp\{-p\vartheta [1 + (-1)^k]\} v_i(p)}{\zeta + (-1)^k \vartheta} - \\
 - \frac{k_{(2)0}[v_0(p) - x_0\alpha(p) + (-1)^k\alpha(p)]}{\zeta} + \frac{(-1)^k k_{(2)1}\alpha(p)}{p\zeta} - \frac{(-1)^k k_{(2)0}\alpha(p)}{p\zeta^2}
 \end{aligned}$$

Исследование сходимости рядов в (3.3) затруднительно, однако, произведя обратные преобразования Лапласа, увидим, что для конечных моментов времени оригиналы, соответствующие всем членам этих рядов, начиная с некоторого номера (зависящего от t), исчезают, т. е. ряд превращается в конечную сумму. Можно проверить, что сумма оставшихся членов в выражении для $\sigma_{(2)}(x, 0, t)$ и соответствующих выражениях для $v_{(2)}(x, 0, t)$ удовлетворяет граничным условиям.

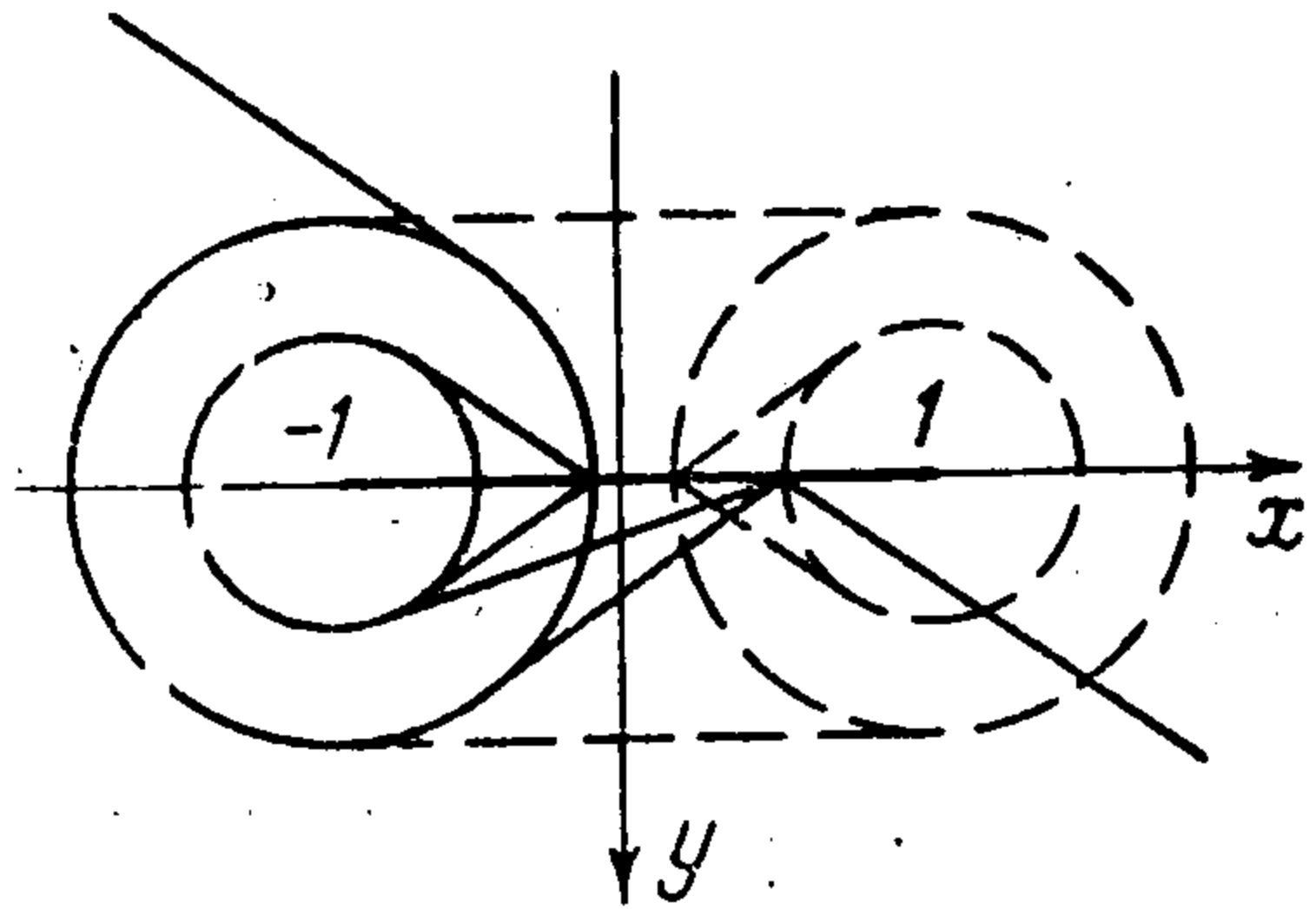
Чтобы получить выражение для $\tau_{(1)}^\circ(p, q)$, нужно заменить в (3.3) и (3.4) $K_{(2)}$ на $K_{(1)}$ и $L_{(2)}$ на $L_{(1)}$ и положить

$$\alpha(p) \equiv 0, \quad v_i(p) \equiv u_i(p), \quad v_0(p) \equiv u_0(p)$$

4. Из (1.4), (1.14), (2.1) и (2.2) следует

$$\begin{aligned} R_x(p) &= 2 \lim_{q \rightarrow 0} \tau_{(1)}^\circ(q, p) \\ R_y(p) &= 2 \lim_{q \rightarrow 0} \sigma_{(2)}^\circ(q, p) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$M(p) = -2 \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \sigma_{(2)}^\circ(q, p) - R_y(p) x_0$$



Фиг. 2

Из соотношения (3.3) легко получаем

$$R_x(p) = -2k_{(1)0} \times \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \dots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(1)k}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \frac{F_{(1)0}(\zeta_1, p, \vartheta) + F_{(1)1}(\zeta_1, p, \vartheta)}{\zeta_k} d\zeta_1 \dots d\zeta_k + \right. \\ &\left. + \frac{u_i(p) M_{(1)}(\lambda) \exp[-p(\vartheta + \lambda)]}{\vartheta} \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} + 2(pk_{(1)0} - k_{(1)1})u_0(p) \right\} \end{aligned}$$

$$R_y(p) = -2k_{(2)0} \times \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \dots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(2)k}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \frac{F_{(2)0}(\zeta_1, p, \vartheta) + F_{(2)1}(\zeta_1, p, \vartheta)}{\zeta_k} d\zeta_1 \dots d\zeta_k + \right. \\ &\left. + \frac{v_i(p) M_{(2)}(\lambda) \exp[-p(\vartheta + \lambda)]}{\vartheta} \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} + 2(pk_{(2)0} - k_{(2)1})[v_0(p) - x_0\alpha(p)] \right\} \end{aligned}$$

$$M(p) = -2p^{-1}k_{(2)0} \times \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} &\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{\gamma}^{\infty} \dots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(2)k}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \frac{F_{(2)0}(\zeta_1, p, \vartheta) - F_{(2)1}(\zeta_1, p, \vartheta)}{\zeta_k} d\zeta_1 \dots d\zeta_k + \\ &\quad + \frac{2v_i(p) [\lambda k_{(2)1} - (1 + \lambda p)k_{(2)0}] M_{(2)}(\lambda)}{p\vartheta^2} e^{-p(\vartheta + \lambda)} \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} + \\ &\quad + \frac{4^{(3/2)k_{(2)1} k_{(2)2} - 1/2 k_{(2)0} k_{(2)3} - 3pk_{(2)1}^2 + 3p^2 k_{(2)0} k_{(2)1} - p^3 k_{(2)0}^2} \alpha(p)}{3p^2} - x_0 R_y(p) \end{aligned}$$

Применяя преобразование Лапласа по времени к уравнениям (1.4) и подставляя в полученные уравнения выражения (4.2), (4.3), (4.4),

находим по правилам операционного исчисления выражения для $u_0(t)$, $v_0(t)$, $\alpha(t)$, которые после преобразований можно представить в виде

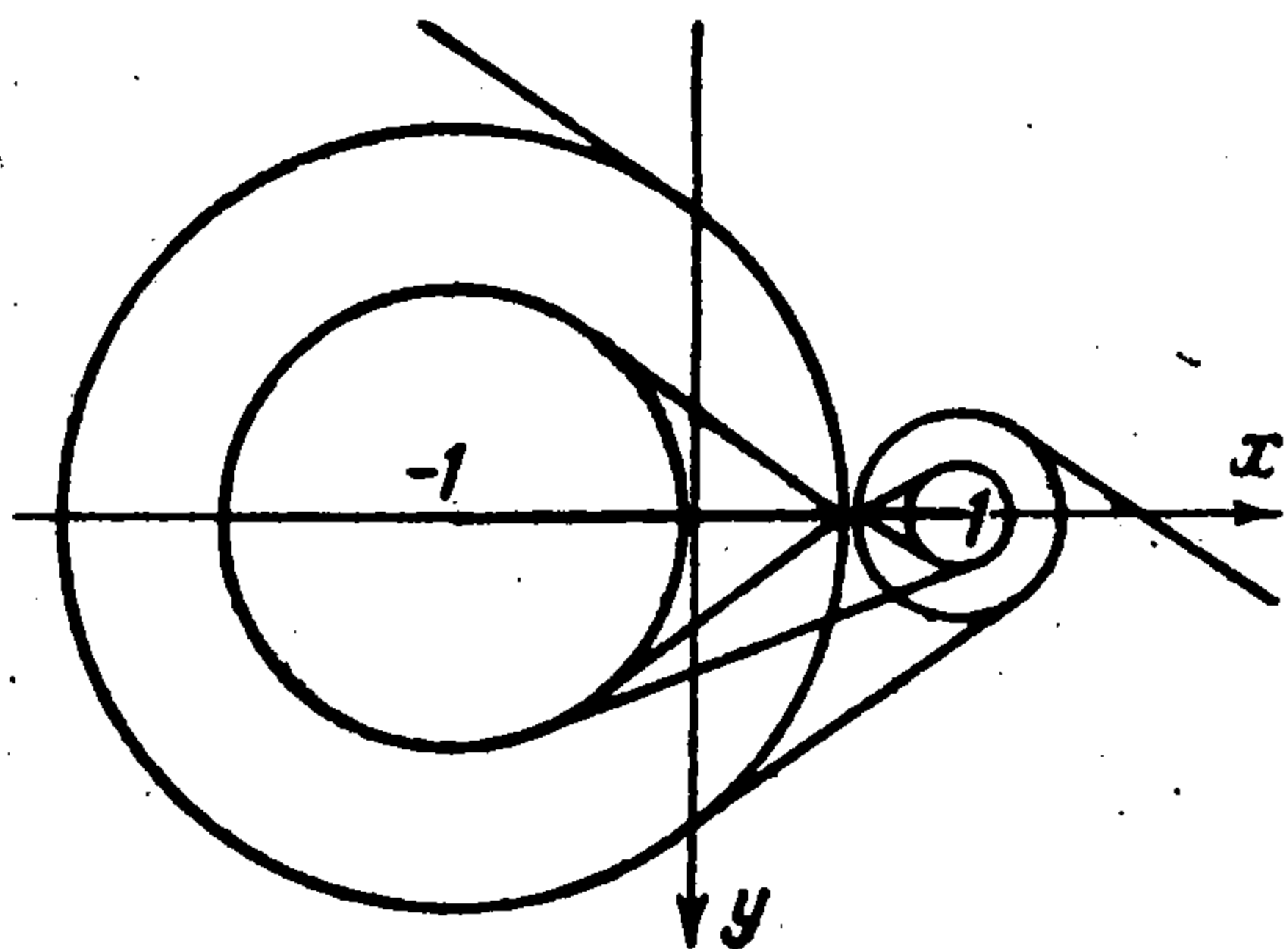
$$u_0(t) = \sum_{j=1}^2 a_j e^{\mu_j t} * R_{(1)}(t) \quad (4.5)$$

$$v_0(t) = \sum_{j=1}^6 e^{\nu_j t} * [b_j R_{(2)}(t) + x_0 c_j M_j(t)] \quad (4.6)$$

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^6 e^{\nu_j t} * [x_0 d_j R_{(2)}(t) + e_j M_j(t)] \quad (4.7)$$

Здесь знак * означает свертку

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (4.8)$$



Фиг. 3

Величины $R_{(1)}(t)$, $R_{(2)}(t)$ и $M_j(t)$ определяются выражениями

$$R_{(1)} = \frac{k_{(1)0} [M_{(1)}(\lambda) \delta(t) + \frac{1}{2} \lambda k_{(1)0} S_{(1)11}(t-2\gamma, \lambda)]}{\vartheta} * u_j(t - \vartheta - \lambda) \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} + k_{(1)0}^2 S_{(1)11}(t, 0) * u_0(t - 2\gamma) \quad (4.9)$$

$$R_{(2)} = \frac{k_{(2)0} [M_{(2)}(\lambda) \delta(t) + \frac{1}{2} \lambda k_{(2)0} S_{(2)11}(t-2\gamma, \lambda)]}{\vartheta} * v_i(t - \vartheta - \lambda) \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} + k_{(2)0}^2 [v_0(t - 2\gamma) - x_0 \alpha(t - 2\gamma)] * S_{(2)11}(t, 0) \quad (4.10)$$

$$M_j = \vartheta^{-2} \nu_j \left\{ M_{(2)}(\lambda) [\lambda k_{(2)1} - (1 + \nu_j) k_{(2)0}] \delta(t) + \frac{1}{2} \nu_j k_{(2)0}^2 S_{(2)12}(t-2\gamma, \lambda) \right\} * v_i(t - \vartheta - \lambda) \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} - \nu_j k_{(2)0} [(k_{(2)0} \nu_j - k_{(2)1}) S_{(2)12}(t, 0) + k_{(2)0} S_{(2)22}(t, 0)] * \alpha(t - 2\gamma) \quad (4.11)$$

Функции $S_{(j)ln}(t, \lambda)$ равны

$$S_{(j)ln}(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(n-1)k} S_{(j)kln}(t - 2k\gamma, \lambda) \quad (j=1, 2) \quad (4.12)$$

где

$$S_{(j)kln}(t, \lambda) = \quad (4.13)$$

$$= \int_0^{1/2t} d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \dots \int_0^{\tau_2} P_{(j)k}(\tau_1, \tau_2, \dots, t) (\tau_1 + \gamma + \lambda)^{-l} (1/2t - \tau_k + \gamma)^{-n} d\tau_1 \quad (k \neq 0, 1)$$

$$P_{(j)k}(\tau_1, \tau_2, \dots, t) = \frac{L_{(j)}(\tau_1 + \gamma) L_{(j)}(1/2t - \tau_k + \gamma)}{\pi^{k+1} (1/2t + \tau_{k-1} + 2\gamma)} \prod_{l=2}^k \frac{L_{(j)}(\tau_l - \tau_{l-1} + \gamma)}{(\tau_l - \tau_{l-1} + 2\gamma)} \quad (4.14)$$

$$P_{(j)1}(\tau_1, t) = \frac{L_{(j)}(\tau_1 + \gamma) L_{(j)}(1/2t - \tau_1 + \gamma)}{\pi^2 (1/2t + 2\gamma)} \quad (4.15)$$

$$S_{(j)0ln} = \frac{L_{(j)}(1/2t + \gamma)}{\pi (1/2t + \gamma + \lambda)^l (1/2t + \gamma)^n}$$

Кроме того, полагаем

$$S_{(j) k l n}(\tau, \lambda) \equiv 0 \quad \text{при } \tau < 0 \quad (4.16)$$

Величины μ_j и ν_j суть корни характеристических уравнений

$$\Delta_{(1)}(\mu) \equiv m\mu^2 + A_{(1)}\mu + B_{(1)} = 0 \quad (4.17)$$

$$\Delta_{(2)}(\nu) \equiv \Delta_{(2)1}(\nu) \Delta_{(2)2}(\nu) - x_0^2 (A_{(2)}\nu + B_{(2)})^2 \nu^2 = 0 \quad (4.18)$$

Здесь

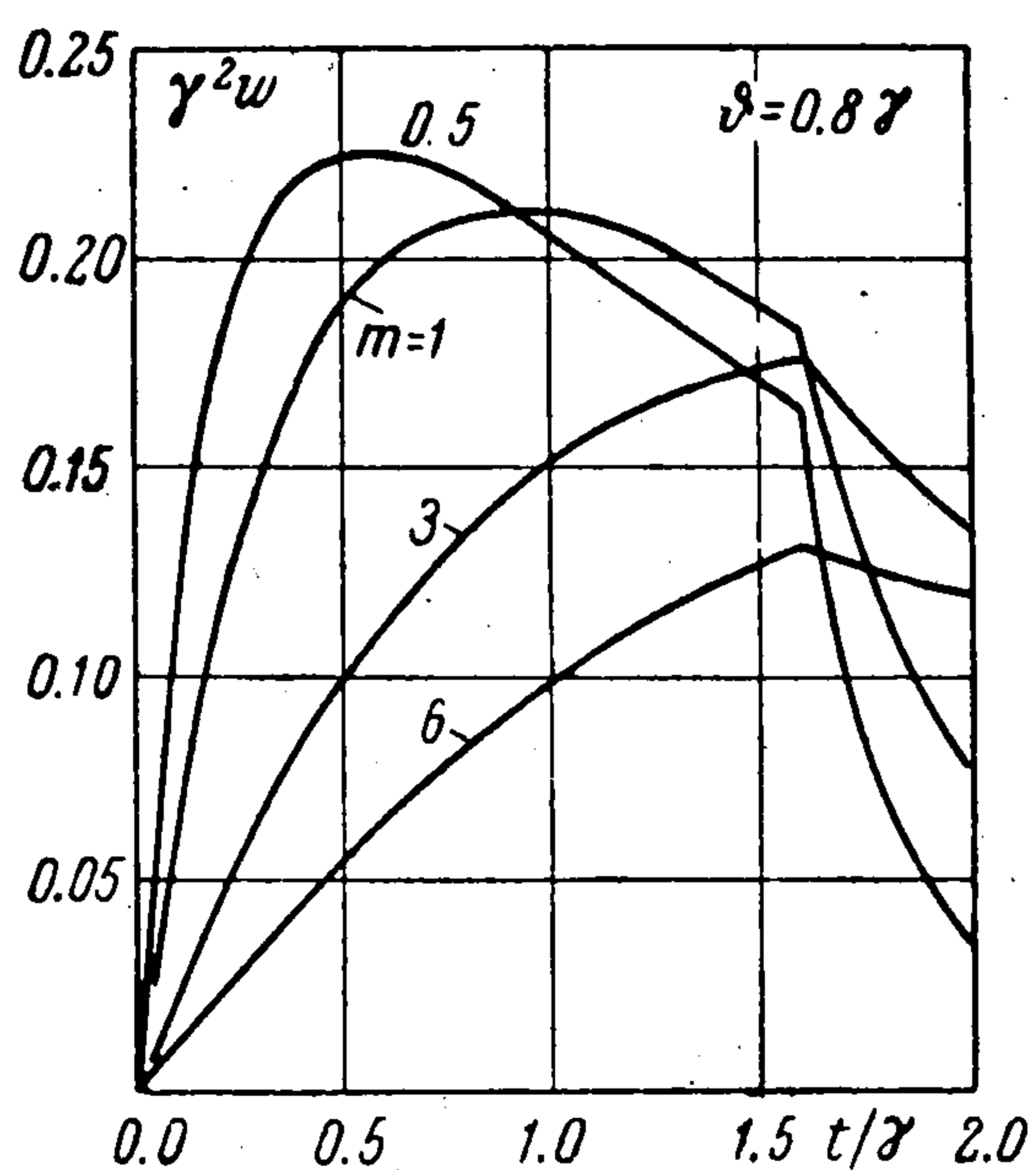
$$\Delta_{(2)1} \equiv m\nu^2 + A_{(2)}\nu + B_{(2)} \quad (4.19)$$

$$\Delta_{(2)2} \equiv J\nu^4 + (1/3 + x_0^2) A_{(2)}\nu^3 + B_{(2)}\nu^2 (1 + x_0^2) + C_{(2)}\nu + D_{(2)}$$

$$A_{(j)} = 4k_{(j)0}^2, \quad B_{(j)} = -4k_{(j)0}k_{(j)1} \quad (j = 1, 2)$$

$$C_{(2)} = 4k_{(2)1}^2, \quad D_{(2)} = 2(1/3 k_{(2)0}k_{(2)3} - k_{(2)1}k_{(2)2})$$

Коэффициенты a_j, b_j, c_j, d_j, e_j определяются следующими формулами:



Фиг. 4

$$a_j = \frac{2}{\Delta'_{(1)}(\mu_j)}, \quad b_j = \frac{2\Delta_{(2)2}(\nu_j)}{\Delta'_{(2)}(\nu_j)}$$

$$c_j = \frac{2\delta_j(A_{(2)}\nu_j + B_{(2)})}{\Delta_{(2)}(\nu_j)} \quad (4.20)$$

$$d_j = -\frac{2m\nu_j^4}{\Delta'_{(2)}(\nu_j)}, \quad e_j = \frac{2\Delta_{(2)1}(\nu_j)}{\Delta'_{(2)}(\nu_j)}$$

где штрих означает производную.

Выражения (3.5) — (4.7) представляют собой рекуррентные соотношения, определяющие $u_0(t)$, $v_0(t)$ и $\alpha(t)$ для любого t , так как их правые части содержат значения неизвестных функций от аргумента, запаздывающего не менее чем на 2γ .

В силу (4.16) выражения (4.12) суть конечные суммы, число членов которых (связанных с многократно дифрагированными на краях полосы волнами) зависит от времени и равно целой части $t/2\gamma$.

5. Для численной интерпретации полученного решения необходимо прежде всего вычислить функции $K_{(j)}(-s)$, $M_{(j)}(s)$, $N_{(j)}(s)$ при действительном и положительном s . Все эти функции при помощи элементарных операций выражаются через функцию $g(-s)$. Последняя не выражается через табулированные функции. Результаты вычислений $g(-s)$ по формуле (2.17) при помощи численного интегрирования с точностью до 10^{-4} для случая $\gamma = 1/\sqrt{3}$ приведены в таблице; приводим также значения постоянных

$$K_{(1)0} = 1.000, \quad K_{(1)1} = -0.7688, \quad K_{(1)2} = -0.6410, \quad K_{(1)3} = -0.6828$$

$$K_{(2)0} = 1.3161, \quad K_{(2)1} = -0.5301, \quad K_{(2)2} = -0.0921, \quad K_{(2)3} = 0.4497$$

При $t < 2\gamma$, когда имеются только однократно дифрагированные волны, формулы (4.9) — (4.11) приобретают особенно простой вид. При

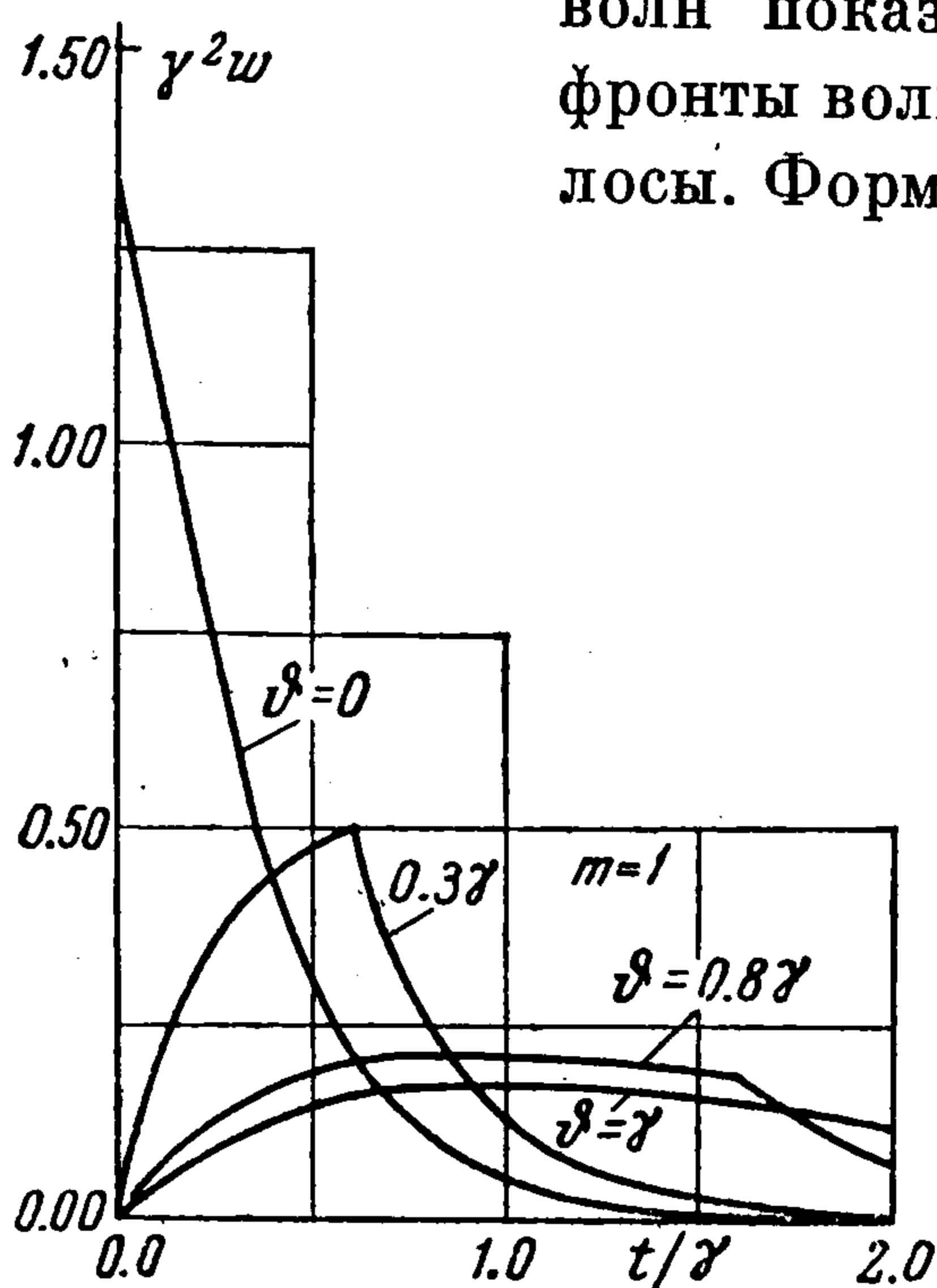
этом следует различать два случая: $t < 2\vartheta$ и $2\vartheta < t < 2\gamma$. В первом случае фронт падающей волны еще не дошел до правого края полосы. Расположение фронтов образовавшихся к этому времени волн показано на фиг. 2. Пунктирными линиями даны фронты волн, образовавшихся вследствие движения полосы. Формулы (4.9) — (4.11) в этом случае имеют вид

$$R_{(1)}(t) = \vartheta^{-1} k_{(1)0} K_{(1)}(-\vartheta) u_i(t) \quad (5.1)$$

$$R_{(2)}(t) = \vartheta^{-1} k_{(2)0} K_{(2)}(-\vartheta) v_i(t) \quad (5.2)$$

$$M_j(t) = \vartheta^{-2} v_j [\vartheta k_{(2)1} + (1 + v_j) k_{(2)0}] K_{(2)}(-\vartheta) v_i(t), \quad (5.3)$$

При $2\vartheta < t < 2\gamma$ появляются волны, дифрагированные на правом крае полосы. Фронты образовавшихся к этому времени волн показаны на фиг. 3. Фронты волн, связанных с движением полосы, опущены, чтобы не загромождать чертежа. Волнам, дифрагированным на правом крае полосы, соответствует появление дополнительных слагаемых в формулах



Фиг. 5

(4.9) — (4.11), которые приобретают следующий вид:

$$R_{(1)}(t) = \vartheta^{-1} k_{(1)0} K_{(1)}(-\vartheta) u_i(t) - \vartheta^{-1} k_{(1)0} M_{(1)}(\vartheta) u_i(t - 2\vartheta) \quad (5.4)$$

$$R_{(2)}(t) = \vartheta^{-1} k_{(2)0} K_{(2)}(-\vartheta) v_i(t) - \vartheta^{-1} k_{(2)0} M_{(2)}(\vartheta) v_i(t - 2\vartheta) \quad (5.5)$$

$$M_j(t) = \vartheta^{-2} [k_{(2)1}\vartheta + (1 + v_j) k_{(2)0}] v_j K_{(2)}(-\vartheta) v_i(t) + \vartheta^{-2} [k_{(2)1}\vartheta - (1 + v_j) k_{(2)0}] v_j M_{(2)}(\vartheta) v_i(t - 2\vartheta) \quad (5.6)$$

В качестве иллюстрации приведем графики зависимости абсолютной величины ускорения полосы, равной $\sqrt{u_0'^2 + v_0'^2}$ (точки означают диффе-

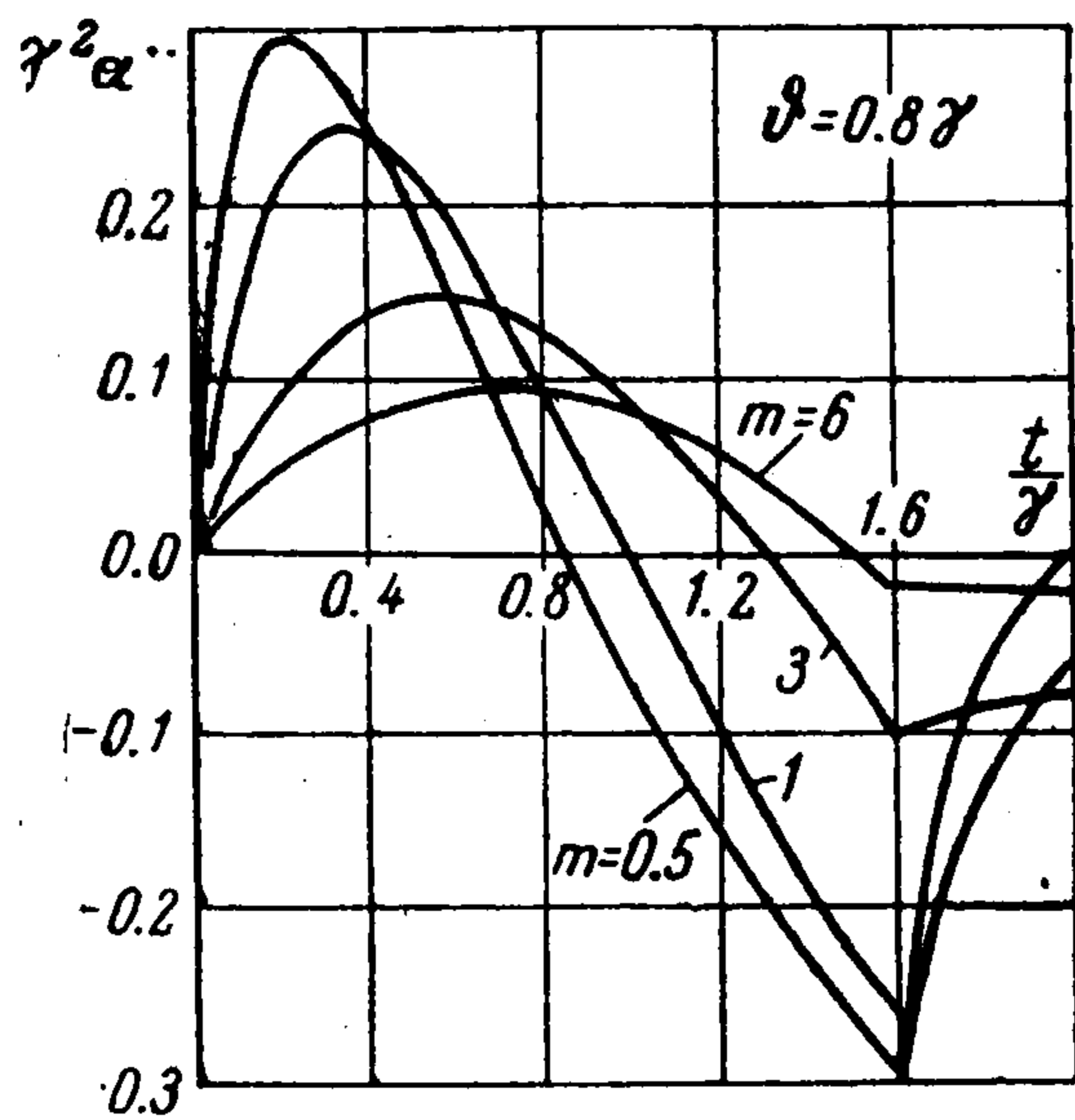
Таблица 1

$s\gamma^{-1}$	$g(-s)$	$s\gamma^{-1}$	$g(-s)$	$s\gamma^{-1}$	$g(-s)$
0.0	0.0719	2.0	0.0282	4.0	0.0176
		2.1	0.0274	4.1	0.0173
0.2	0.0622	2.2	0.0266	4.2	0.0170
		2.3	0.0259	4.3	0.0167
0.4	0.0548	2.4	0.0252	4.4	0.0164
		2.5	0.0245	4.5	0.0161
0.6	0.0490	2.6	0.0239	4.6	0.0158
		2.7	0.0233	4.7	0.0155
0.8	0.0444	2.8	0.0227	4.8	0.0153
		2.9	0.0222	4.9	0.0150
1.0	0.0405	3.0	0.0217	5.0	0.0148
1.1	0.0388	3.1	0.0212	5.1	0.0145
1.2	0.0373	3.2	0.0207	5.2	0.0143
1.3	0.0358	3.3	0.0202	5.3	0.0141
1.4	0.0345	3.4	0.0198	5.4	0.0139
1.5	0.0333	3.5	0.0194	5.5	0.0137
1.6	0.0321	3.6	0.0190	5.6	0.0135
1.7	0.0311	3.7	0.0186	5.7	0.0133
1.8	0.0301	3.8	0.0183	5.8	0.0131
1.9	0.0291	3.9	0.0179	5.9	0.0129
				6.0	0.0128

ренцирование по времени) и ее углового ускорения от времени для случая падения продольной волны, в которой напряжение на площадках, параллельных фронту, постоянно и равно единице. В этом случае

$$u_i(t) = \vartheta t, \quad v_i(t) = -\sqrt{\gamma^2 - \vartheta^2} t \quad \text{при } t > 0 \quad (5.7)$$

При этом полагаем $\gamma = 1/\sqrt{3}$, а полосу считаем однородной. Фиг. 4 иллюстрирует зависимость величины ускорения $W = \sqrt{u_0''^2 + v_0''^2}$ от времени t для значений массы полосы $m = 0.5, 1.0, 3.0, 6.0$. Прежде всего



Фиг. 6

замечаем, что при $t = 2\vartheta$ графики имеют излом, связанный с началом дифракции на правом крае полосы. Далее, характерной особенностью этих кривых является наличие при малых значениях массы полосы максимума, который с ростом массы смещается вправо, и при достаточно больших ее значениях исчезает. На фиг. 5 показана зависимость величины ускорения полосы от угла падения (косинус угла падения равен в нашем случае $\vartheta\gamma^{-1}$) и времени при фиксированной массе. Наибольшее ускорение полоса приобретает при нормальном падении волны ($\vartheta = 0$) в момент

$t = 0$. При всех других значениях ϑ ускорение в начальный момент равно нулю и достигает тем меньших значений, чем больше ϑ .

На фиг. 6 показана зависимость углового ускорения полосы от времени и массы.

Автор признателен Н. В. Зволинскому за внимание к работе.

Поступила 1 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Флитман Л. М. О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
2. Афанасьев Е. Ф. Дифракция нестационарной волны давления на подвижной пластине. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
3. Мауе А. В. Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene. ZAMM, 1953, Bd. 33 (1).
4. Мауе А. В. Über die Kantenbedingung in der Beugungstheorie elastischer Wellen. Z. Naturforsch., 1952, Bd. 7a, S. 387—389.
5. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, 1962.
6. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.