

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ НАГРЕВЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ

Ю. П. Суворов

(Москва)

Рассматривается распространение упруго-пластических волн в полубесконечном стержне, ненагруженный конец которого нагревается по линейному закону. Выбор линейного закона для температуры дает в этом случае возможность получить точное решение нелинейного уравнения теплопроводности [1, 2] и задачи о распространении волн напряжений. При этом удается выявить качественные особенности решений такого класса задач. Оказалось, что если (постоянная) скорость распространения тепла становится равной скорости распространения упругих или пластических (в случае линейного упрочнения) возмущений, то наступает «резонанс» и образуются волны сильного разрыва.

При любой скорости роста температуры на свободном конце стержня возникает волна разгрузки, скорость которой, в отличие от обычной волны разгрузки [3], стремится не к скорости звука [4], а к скорости распространения пластических напряжений, или совпадает с фронтом тепловой волны. Это объясняется тем, что при возрастании температуры с неубывающей скоростью на конце стержня волна разгрузки имеет «внутреннюю» природу: если волна разгрузки [3] возникает в результате изменений граничного режима, то возникновение термической волны разгрузки является следствием изменения наклона диаграммы напряжение — деформация (при чисто упругой диаграмме и тех же граничных условиях разгрузки не наступает).

При некотором соотношении между параметрами задачи уравнение волны разгрузки невозможно определить только из граничных условий и условий непрерывности решения всюду вместе с его первыми производными. Для отыскания скорости распространения волны разгрузки необходимо привлекать дополнительные соображения. Как и в [5], предполагается, что материал стержня обладает линейным упрочнением; механические характеристики считаются не зависящими от температуры.

§ 1. Исходную безразмерную систему уравнений в обозначениях [5] запишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} \quad (\text{уравнение теплопроводности}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial s}{\partial y} \quad (\text{уравнение движения}) \quad (1.2)$$

$$s = \frac{\partial u}{\partial y} - T \quad (\text{уравнение состояния}) \quad (1.3)$$

Начальные и граничные условия будут

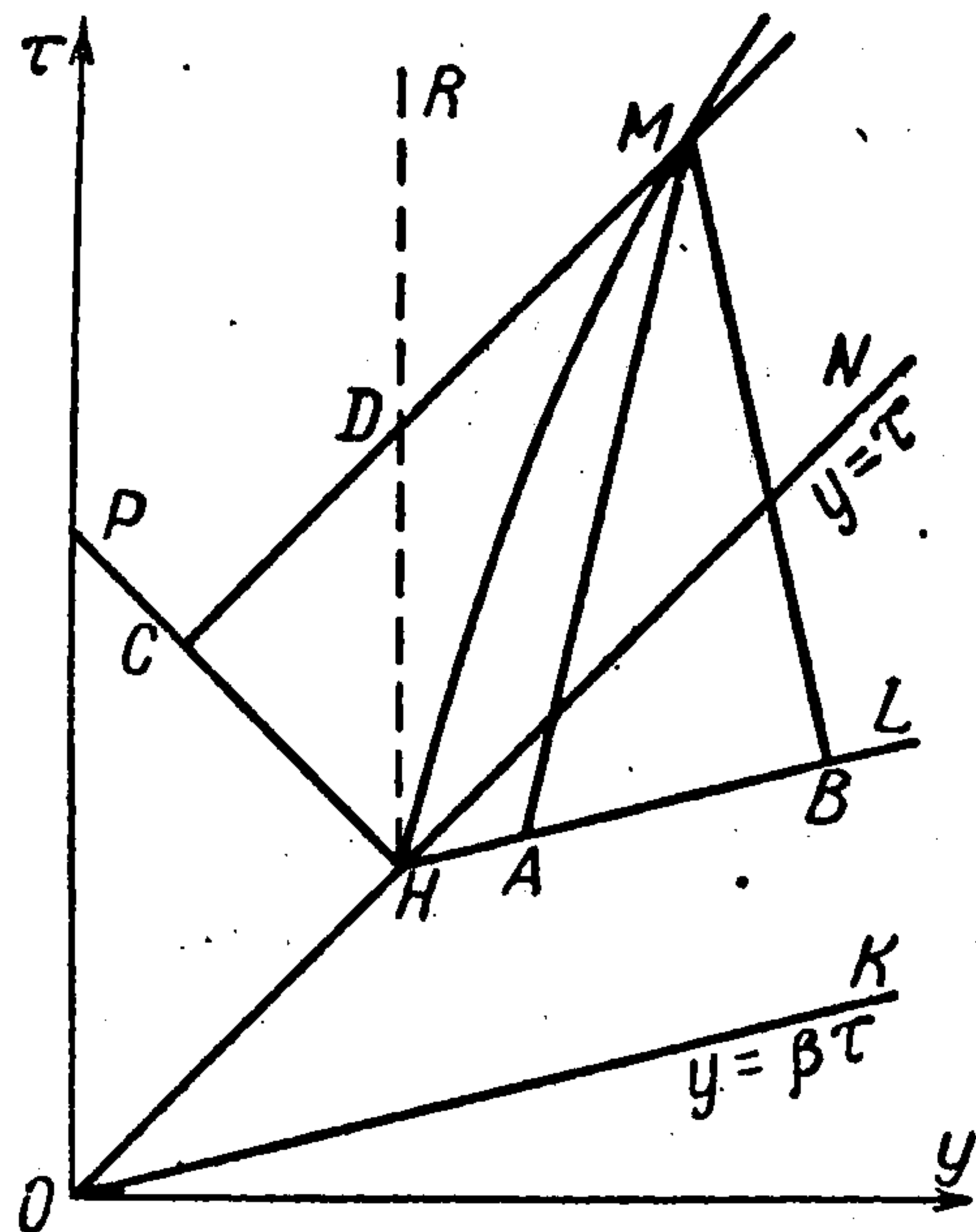
$$u(y, 0) = \frac{\partial u(y, 0)}{\partial \tau} = 0, \quad s(0, \tau) = 0, \quad T(y, 0) = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение (1.1) допускает точное решение

$$T = \begin{cases} 1/2\beta^2\tau, & -1/2\beta y & (y \leq \beta\tau) \\ 0 & & (y \geq \beta\tau) \end{cases} \quad (1.5)$$

При этом последнее из условий (1.4), очевидно, выполняется, а на свободном конце стержня  $T(0, \tau) = 1/2\beta^2\tau$ .

Рассмотрим случай  $\beta > 1$ . Решение системы (1.2), (1.3) с учетом (1.4) имеет вид (фиг. 1):



Фиг. 1

в области  $yOK$

$$u = 0$$

в области  $KON$

$$u = \frac{\beta^3}{4(\beta^2 - 1)}(y^2 + \tau^2) - \frac{\beta^2}{2(\beta^2 - 1)}y\tau - \frac{\beta}{4}y^2$$

$$s = \frac{\beta^3}{2(\beta^2 - 1)}(y - \beta\tau) \quad (1.6)$$

в области  $NO\tau$

$$u = -\frac{\beta^3}{4(\beta + 1)}(y^2 + \tau^2) + \frac{\beta^2}{2}y\tau - \frac{\beta}{4}y^2$$

$$s = -\frac{\beta^3}{2(\beta + 1)}y \quad (1.7)$$

Из (1.6) видно, что прямые  $y = \beta\tau + \text{const}$  в области  $KON$  будут линиями постоянных перемещения, скорости и напряжения.

Вдоль  $HL$

(1.8)

$$y = \beta\tau + \frac{2(1 - \beta^2)}{\beta^3}, \quad u = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3}, \quad u_\tau = \frac{1}{\beta}, \quad u_y = -\frac{1}{\beta^2}, \quad s = -1$$

(индексы  $\tau$  и  $y$  означают производные). Следовательно, решение (1.6) справедливо только в области  $KONL$ , выше  $HL$  будет пластическая зона.

Решение (1.7) справедливо в области  $OHP$ . Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что решения, соответствующего нагружению выше характеристики  $RH$ , не существует. Следовательно, возникает волна разгрузки положительного наклона  $HM$ , исходящая из точки  $H$   $(2(1 + \beta)/\beta^3, 2(1 + \beta)/\beta^3)$ .

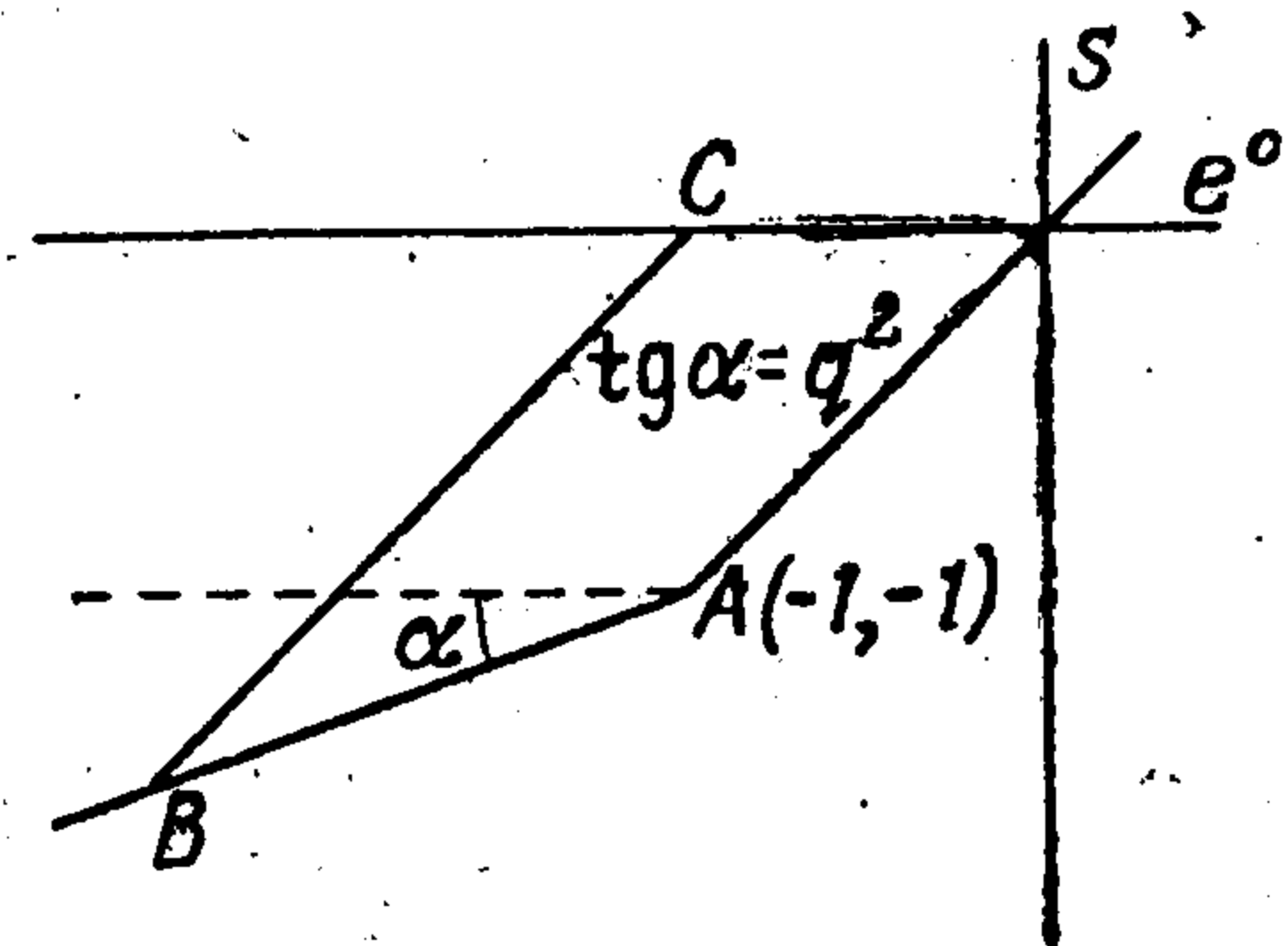
В пластической области  $MHL$  при наличии линейного упрочнения имеем при нагружении (фиг. 2)

$$u_y = e \equiv e^0 + T, \quad s = q^2 e^0 + q^2 - 1$$

$$q^2 = E_1 / E$$

где  $E_1$  — модуль упрочнения, откуда

$$s = q^2 u_y - q^2 T + q^2 - 1 \quad (1.9)$$



Фиг. 2

Из (1.2), (1.5) и (1.9) получаем уравнение движения в перемещениях

$$u_{\tau\tau} = q^2 u_{yy} + \frac{1}{2} q^2 \beta$$

Его характеристики и соотношения на них запишутся так

$$dy = \pm q d\tau, \quad du_\tau = \pm q du_y \mp \frac{1}{2} q \beta dy$$

или, после интегрирования,

$$u_\tau = \pm q u_y \pm \frac{1}{2} q \beta y + C_{1,2} \quad (1.10)$$

Обозначим  $\tau = \omega(y)$  уравнение волны разгрузки. Предположим, что ее начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$1 < \omega'(2(1 + \beta)/\beta^3) < 1/q \quad (1.11)$$

Тогда из произвольной точки  $M$  волны разгрузки, достаточно близкой к точке  $H$ , можно провести характеристику положительного наклона  $MC$  и характеристики обоих направлений  $MA$  и  $MB$  в пластической зоне, пересекающие упруго-пластическую границу  $HL$ . Вдоль последних справедливы соотношения (1.10). Отсюда, учитывая условия (1.8), в точке  $M (y, \omega (y))$  получаем

$$u_y = -\frac{q^2 \beta^2}{2(\beta^2 - q^2)} \omega (y) + \frac{q^2 \beta}{2(\beta^2 - q^2)} y - \frac{1 - q^2}{\beta^2 - q^2}, \quad u_\tau = -\beta u_y \quad (1.12)$$

Введем функцию  $f (y)$ , равную напряжению элементов стержня на заднем фронте волны разгрузки. Тогда в области  $RHM$  будет иметь место следующее уравнение состояния ( $BC$ , фиг. 2)

$$s = u_y - T + \frac{q^2 - 1}{q^2} f (y) + \frac{q^2 - 1}{q^2}$$

и уравнение движения запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{q^2 - 1}{q^2} f' (y) + \frac{1}{2} \beta$$

Вдоль характеристики  $DM$

$$du_\tau = du_y + \frac{q^2 - 1}{q^2} df (y) + \frac{1}{2} \beta dy$$

или, после интегрирования,

$$u_\tau = u_y + \frac{q^2 - 1}{q^2} f (y) + \frac{1}{2} \beta y + C_3 \quad (1.13)$$

В области  $\tau PHR$  справедливы уравнения (1.2) и (1.3), и вдоль  $CD$  будем иметь

$$u_\tau = u_y + \frac{1}{2} \beta y + C_4, \quad C_4 = \frac{\beta^2 (2\beta + 1)}{2(\beta + 1)} (y - \tau) \quad (1.14)$$

Очевидно,  $f (2(1 + \beta) / \beta^3) = -1$ . Требуя непрерывности  $u_\tau$  и  $u_y$  в точке  $D$ , из сравнения (1.14) с (1.13) находим

$$C_3 = C_4 + (q^2 - 1) / q^2$$

Таким образом, в точке  $M (y, \omega (y))$  на волне разгрузки имеем

$$u_\tau = u_y + \frac{q^2 - 1}{q^2} f (y) + \frac{1}{2} \beta y + \frac{\beta^2 (2\beta + 1)}{2(\beta + 1)} [y - \omega (y)] + \frac{q^2 - 1}{q^2} \quad (1.15)$$

Кроме того,  $s (y, \omega (y)) = f (y)$ , или

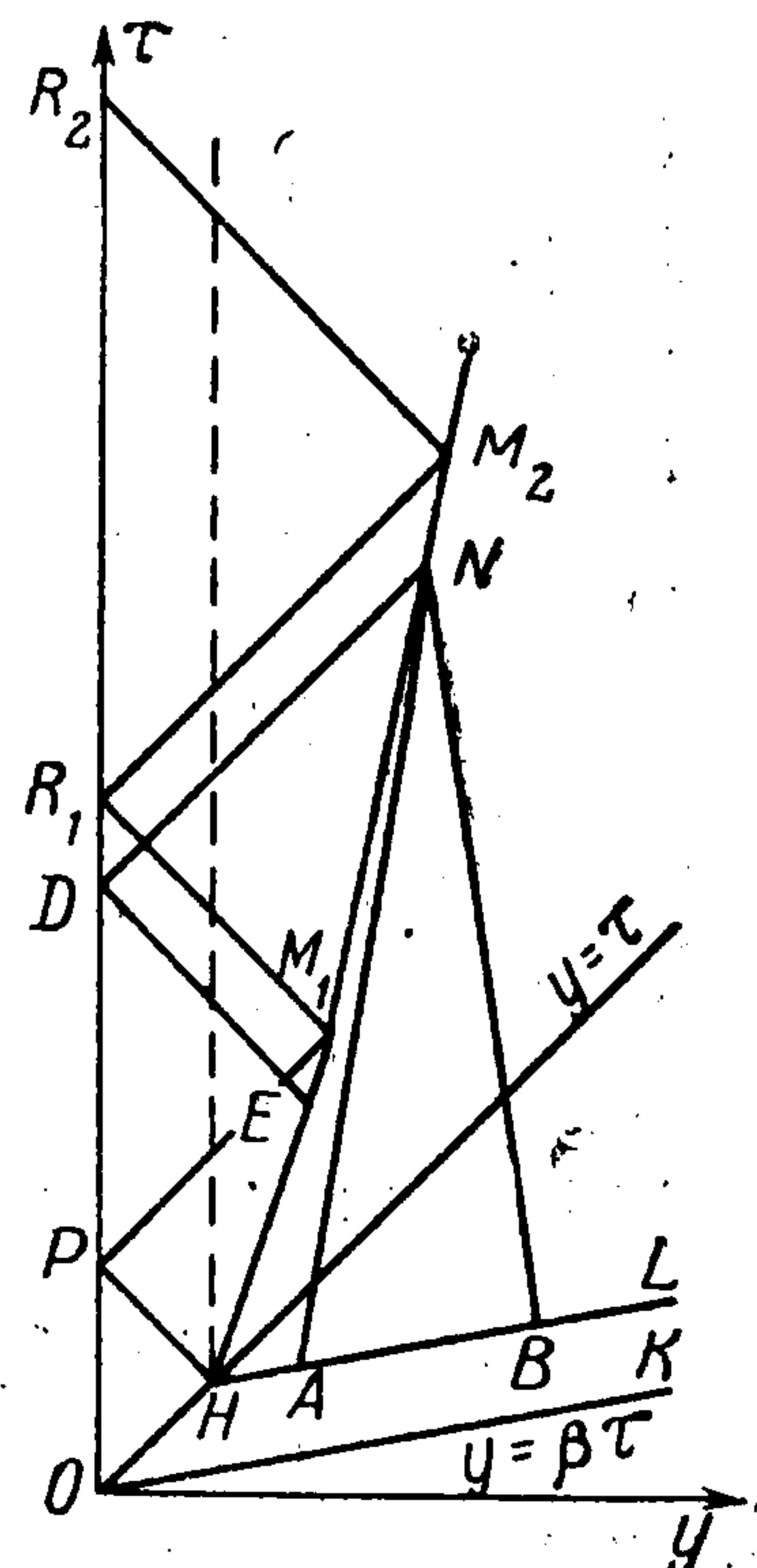
$$u_y = f (y) / q^2 + \beta^2 \omega (y) / 2 - \beta y / 2 + (1 - q^2) / q^2 \quad (1.16)$$

Исключая из (1.12), (1.15) и (1.16)  $u_\tau$ ,  $u_y$  и  $f (y)$ , получаем уравнение начального участка волны разгрузки в виде прямой

$$\tau = \xi_1 y + \eta_1, \quad \xi_1 = \frac{q^2 + 2\beta + 1}{2q^2 + q^2 \beta + \beta}, \quad \eta_1 = -\frac{2(1 - q^2)(1 + \beta)^2}{\beta^3(2q^2 + q^2 \beta + \beta)} \quad (1.17)$$

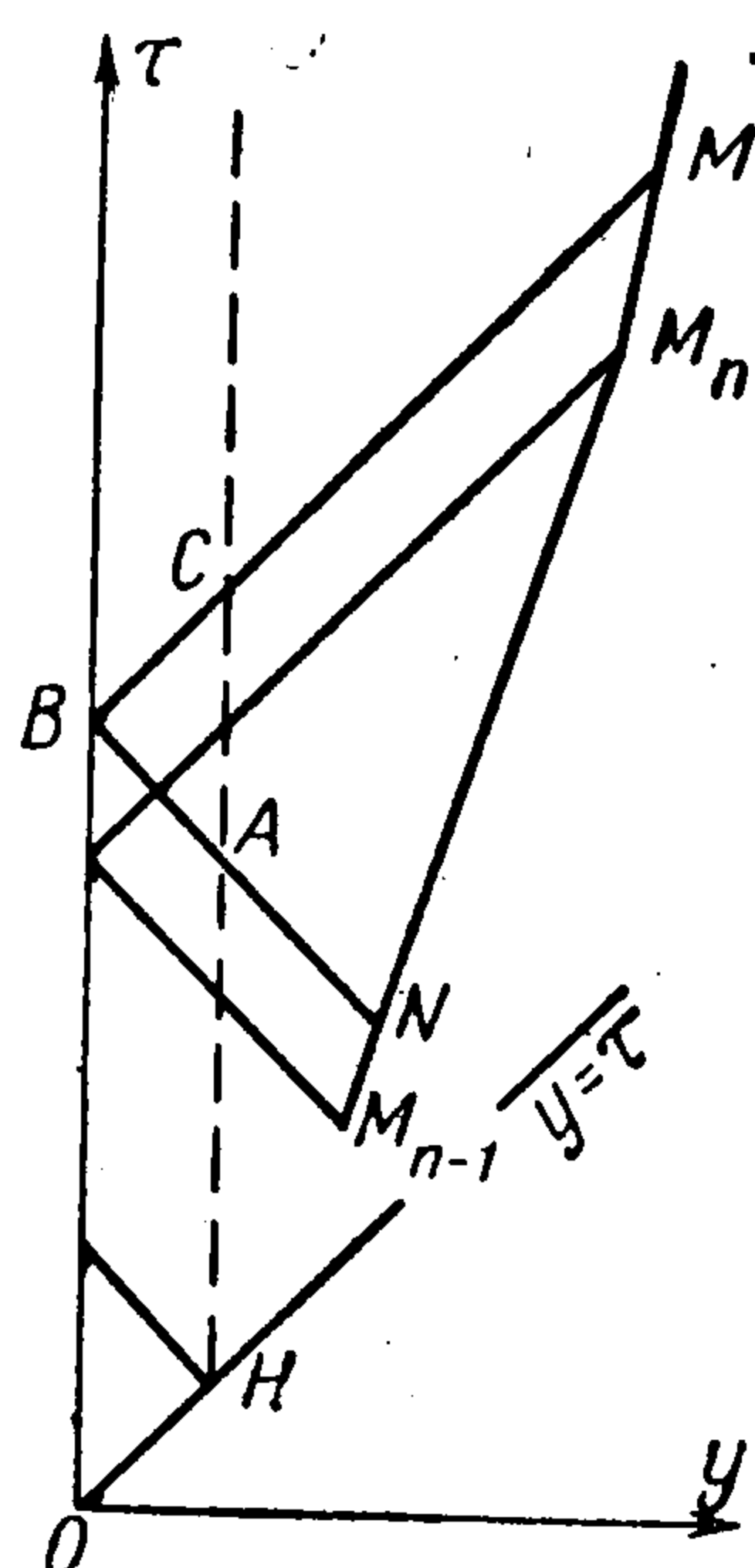
При этом условия (1.11) выполняются при любых  $0 \leq q < 1$ .

Это решение справедливо до тех пор, пока пересекаются характеристики  $MC$  и  $RH$ , т. е. до точки  $M_1$  (фиг. 3).



Фиг. 3

Аналогично предыдущему, рассматривая характеристики  $NA$ ,  $NB$ ,  $ND$  и  $DE$ , получаем, что следующий участок волны разгрузки  $M_1M_2$  есть отрезок прямой с угловым коэффициентом  $\xi_2$ , большим, чем  $\xi_1$ ,



Фиг. 4

$$\tau = \xi_2 y + \eta_2$$

$$\xi_2 = \frac{q^4 + 6q^2 + q^2\beta + 4\beta + 1}{4q^4 + q^2\beta + 4q^2 + 6q^2\beta + \beta}$$

$$\eta_2 = -\frac{2(1-q^2)(-q^2 + 4q^2\beta + q^2\beta^2 + \beta^2 + 4\beta + 1)}{\beta^3(4q^4 + q^2\beta + 4q^2 + 6q^2\beta + \beta)}$$

причем (1.18)

$$\xi_2 = \frac{\xi_1(1+q^2) + 2}{2q^2\xi_1 + q^2 + 1}, \quad \eta_2 = \frac{(1-q^2)(\beta^2\eta_1 - 4\xi_1 - 4)}{\beta^2(2q^2\xi_1 + q^2 + 1)}$$

За точкой  $M_2$  получим  $\tau = \xi_3 y + \eta_3$ ,  $\xi_3 > \xi_2$ , и т.д. Таким образом, волна разгрузки представляет собой ломаную линию. Коэффициенты ее отдельных отрезков связаны между собой рекуррентными соотношениями (1.19)

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n(1+q^2) + 2}{2q^2\xi_n + q^2 + 1}, \quad \eta_{n+1} = \frac{(1-q^2)(\beta^2\eta_n - 4\xi_n - 4)}{\beta^2(2q^2\xi_n + q^2 + 1)}$$

которые, учитывая (1.18), докажем методом полной математической индукции. Рассмотрим произвольную точку  $M(y, \tau)$  на  $(n+1)$ -м участке волны разгрузки (фиг. 4) и характеристики  $MB$  и  $BN$ . Из (1.12) в точке

$$N\left(\frac{\tau - y}{\xi_n + 1} - \frac{\eta_n}{\xi_n + 1}, \frac{\xi_n(\tau - y)}{\xi_n + 1} + \frac{\eta_n}{\xi_n + 1}\right)$$

имеем

$$u_y = \frac{q^2\beta(1-\beta\xi_n)(\tau - y)}{2(\beta^2 - q^2)(\xi_n + 1)} - \frac{q^2\beta(1+\beta)\eta_n}{2(\beta^2 - q^2)(\xi_n + 1)} - \frac{1-q^2}{\beta^2 - q^2}, \quad u_\tau = -\beta u_y$$

Вдоль  $NA$

$$u_\tau = -u_y - \beta y / 2 + (1 - q^2) f(y) / q^2 + C_1$$

$$C_1 = \frac{\beta^2[(\beta^2 - q^2\beta^2 + q^2\beta - q^2)\xi_n + q^2(\beta - 1)]}{2(\beta^2 - q^2)(\xi_n + 1)}(\tau - y) + \frac{(1 - q^2)\beta^4\eta_n}{2(\beta^2 - q^2)(\xi_n + 1)} + \frac{(1 - q^2)(\beta^2 - q^2\beta^2 + q^2\beta - q^2)}{q^2(\beta^2 - q^2)}$$

Вдоль  $AB$

$$u_\tau = -u_y - 1/2\beta y + C_2, \quad C_2 = C_1 - (1 - q^2) / q^2$$

В точке  $B$ , принимая во внимание граничное условие  $s(0, \tau) = 0$ , будем иметь

$$u_y = 1/2\beta^2(\tau - y), \quad u_\tau = -1/2\beta^2(\tau - y) + C_2$$

И далее, вдоль  $BC$

$$u_\tau = u_y + 1/2\beta y + C_3, \quad C_3 = -\beta^2(\tau - y) + C_2$$

вдоль  $CM$

$$u_\tau = u_y + 1/2\beta y + \frac{q^2 - 1}{q^2} f(y) + C_4, \quad C_4 = C_3 + \frac{q^2 - 1}{q^2} \quad (1.20)$$

Присоединяя сюда соотношения (1.12) и (1.16), которые справедливы в точке  $M$  при условии

$$1 < \xi_{n+1} < 1/q \quad (1.21)$$

и исключая  $u_y$ ,  $u_\tau$  и  $f(y)$ , получаем

$$\tau = \frac{\xi_n(1+q^2)+2}{2q^2\xi_n+q^2+1}y + \frac{(1-q^2)(\beta^2\xi_n-4\xi_n-4)}{\beta^2(2q^2\xi_n+q^2+1)}$$

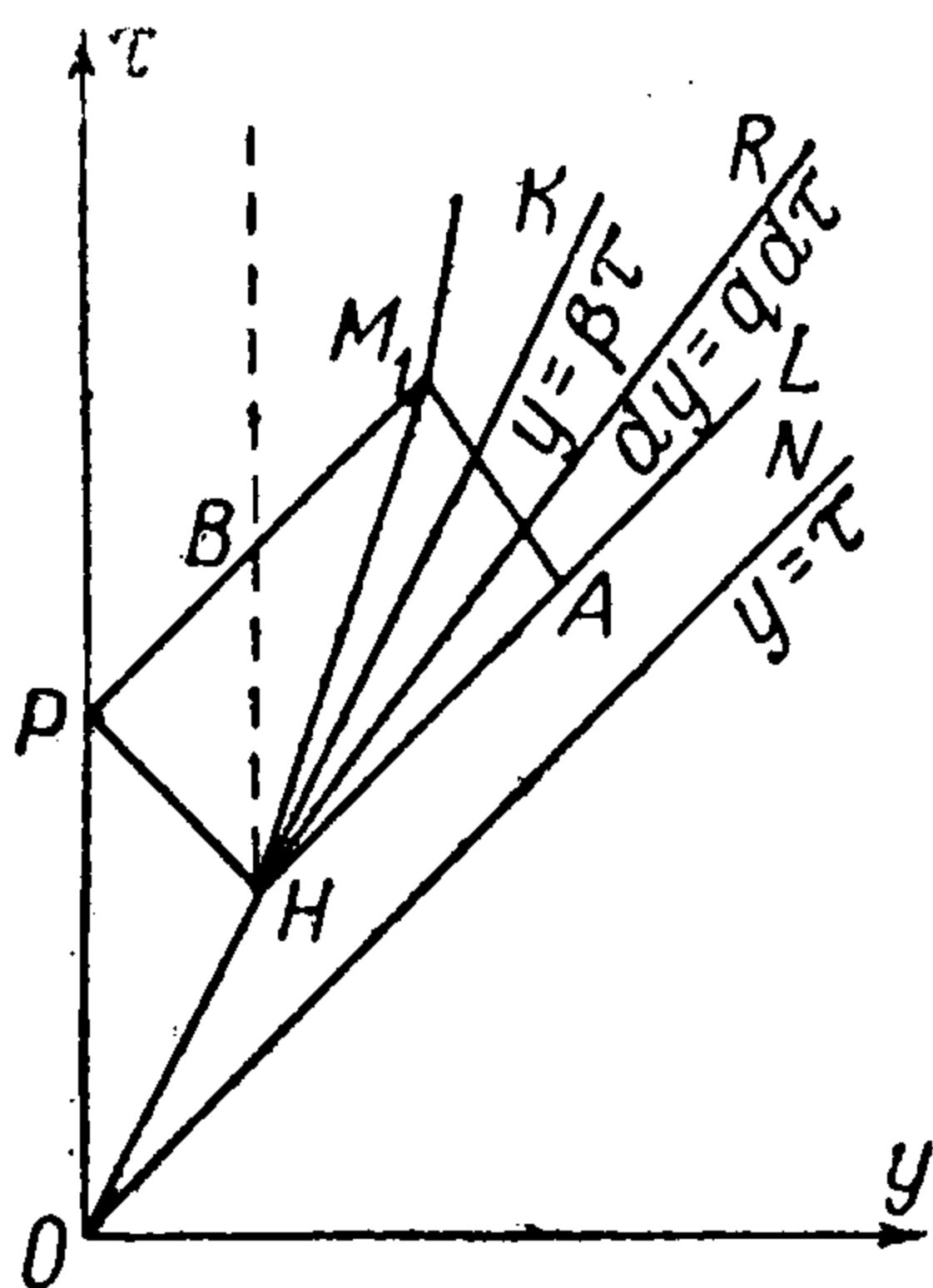
Отсюда следуют формулы (1.19). Условия (1.21) выполняются для любых  $n$  и  $0 \leq q < 1$ .

Угловые коэффициенты  $\xi_n$  образуют возрастающую последовательность, предел которой равен  $\xi_0 = 1/q$ . Уравнение асимптоты волны разгрузки имеет вид

$$\tau = \frac{1}{q}y - \frac{4(1-q^2)}{q\beta^2(q\beta^2+q-\beta^2+1)} \quad (1.22)$$

График изменения напряжения во времени в сечениях стержня представляет собой, очевидно, также ломаные линии, вид которых схематически показан на фиг. 5. После прохождения волны разгрузки напряжение начинает падать, асимптотически приближаясь к нулю, причем в характеристических треугольниках  $PM_1R_1$ ,  $R_1M_2R_2$  и т. д. (фиг. 3), примыкающих к оси  $O\tau$ , оно остается постоянным во времени.

При  $q \rightarrow 1$  построенное решение переходит в решение (1.6), (1.7). В этом случае разгрузки не наступает, а волна разгрузки  $\tau = \omega(y)$  становится «волной нейтрального нагружения»  $\tau = y$ , на которой напряжение в любом сечении стержня достигает максимального (по модулю) значения и далее остается постоянным.



Фиг. 6

§ 2. Если в полученном решении перейти к пределу при  $\beta \rightarrow 1$ , т. е. если скорость распространения тепла в стержне станет равной скорости распространения упругих возмущений, то наступит «резонанс», и прямая  $\tau = y$  будет волной сильного разрыва. Скачок напряжения равен

$$[s] \equiv s(y, y+0) - s(y, y-0) = \begin{cases} -1/4y & (y \leq 4) \\ -1 & (y \geq 4) \end{cases} \quad (2.1)$$

Случай  $\beta < 1$ . Учитывая начальные и граничные условия (1.4), имеем решение, всюду непрерывное вместе с первыми производными (фиг. 6): область  $yON$

$$u = 0$$

область  $NOK$

$$u = \frac{\beta^4}{4(1-\beta^2)}(y-\tau)^2, \quad s = \frac{\beta^4}{2(1-\beta^2)}(y-\tau) \quad (2.2)$$

область  $KO\tau$

$$u = -\frac{\beta^3}{4(1+\beta)}(y^2 + \tau^2) + \frac{1}{2}\beta^2y\tau - \frac{1}{4}\beta y^2, \quad s = -\frac{\beta^3y}{2(1+\beta)} \quad (2.3)$$

Заметим, что формулы (2.3) совпадают с (1.7). Решение (2.2) справедливо только в области  $NOHL$ . Вдоль  $HL$

$$y = \tau - 2(1 - \beta^2) / \beta^4, \quad u = (1 - \beta^2) / \beta^4, \quad u_\tau = 1, \quad u_y = s = -1 \quad (2.4)$$

Выше  $HL$  будет пластическая зона.

Решение (2.3) справедливо в треугольнике  $OHP$ . Вдоль  $HP$

$$y = -\tau + 2(1 + \beta)^2 / \beta^4 \quad (2.5)$$

$$u = -\frac{\beta(4\beta^2 + 3\beta + 1)}{4(1 + \beta)} \tau^2 + \frac{(1 + \beta)(2\beta^2 + \beta + 1)}{\beta^3} \tau - \frac{(1 + \beta)^3(\beta^2 + \beta + 1)}{\beta^7}$$

$$u_\tau = -\frac{\beta^2(2\beta + 1)}{2(\beta + 1)} \tau + \frac{(1 + \beta)^2}{\beta^2}, \quad u_y = \frac{\beta(2\beta^2 + 2\beta + 1)}{2(\beta + 1)} \tau - \frac{(1 + \beta)(\beta^2 + \beta + 1)}{\beta^3}$$

Аналогично предыдущему, строим уравнение волны разгрузки, исходящей из точки  $H$  ( $2(1 + \beta) / \beta^3, 2(1 + \beta) / \beta^4$ ), в виде ломаной линии.

Уравнение ее первого участка  $HM_1$

$$\tau = \xi_1^0 y + \eta_1^0, \quad \xi_1^0 = \frac{q^2 + 2\beta + 1}{2q^2 + q^2\beta + \beta}, \quad \eta_1^0 = -\frac{4(\beta^2 - q^2)(1 + \beta)}{\beta^4(2q^2 + q^2\beta + \beta)} \quad (2.6)$$

при этом

$$f(y) = -\frac{q^2\beta^3}{2q^2 + q^2\beta + \beta} y - \frac{\beta(1 - q^2)}{2q^2 + q^2\beta + \beta} \quad (2.7)$$

Рекуррентные зависимости, аналогичные (1.19), имеют вид

$$\xi_{n+1}^0 = \frac{\xi_n^0(1 + q^2) + 2}{2q^2\xi_n^0 + q^2 + 1}, \quad \eta_{n+1}^0 = \frac{\beta^4(1 - q^2)\eta_n^0 - 4(\beta^2 - q^2)(\xi_n^0 + 1)}{\beta^4(2q^2\xi_n^0 + q^2 + 1)} \quad (2.8)$$

Последовательность угловых коэффициентов  $\{\xi_n^0\}$  совпадает с последовательностью  $\{\xi_n\}$ . Уравнение асимптоты волны разгрузки

$$\tau = y/q - 2(\beta^2 - q^2) / q^2\beta^4 \quad (2.9)$$

Полученные формулы (2.6) — (2.9) справедливы в предположении  $1/\beta < \xi_1 < 1/q$ , т. е. при  $0 \leq q < \beta$ . Переходя к пределу при  $q \rightarrow \beta$ , получим, что волна разгрузки в этом случае будет совпадать с тепловой волной  $y = \beta\tau$ . Напряжение на заднем фронте волны из (2.7) равно

$$s = -\beta^4 y / (1 + \beta)^2 - (1 - \beta) / (1 + \beta)$$

С другой стороны, в области  $LHK$  (фиг. 6), как легко проверить, решение, удовлетворяющее условиям непрерывности вдоль упруго-пластической границы  $HL$ , имеет вид

$$u = \tau - y - (1 - \beta^2) / \beta^4, \quad s = -1$$

Следовательно, при  $q = \beta$  тепловая волна будет одновременно и волной разгрузки, и волной сильного разрыва. Скачок напряжения равен

$$[s] = \begin{cases} -\beta^4 y / (1 + \beta)^2 + 2\beta / (1 + \beta) & (y \geq 2(1 + \beta) / \beta^3) \\ 0 & (y \leq 2(1 + \beta) / \beta^3) \end{cases} \quad (2.10)$$

§ 3. Пусть теперь  $\beta < q$ . Уравнение начального участка волны разгрузки естественно искать в форме прямой

$$\tau = \omega(y) = \xi y + 2(1 + \beta)(1 - \beta\xi) / \beta^4 \quad (3.1)$$

с неизвестным угловым коэффициентом  $\xi$ . Предположим, что  $\xi > 1/\beta$ . Тогда из произвольной точки  $M$  волны разгрузки (фиг. 6) можно провести

только одну характеристику  $ML$  в пластической области, пересекающуюся с упруго-пластической границей  $HL$ . Поэтому необходимо решать задачу в перемещениях.

Учитывая (2.4), в области  $LHN$  решение запишется в виде

$$u = \tau - y - (1 - \beta^2) / \beta^4, \quad u'_y = -1, \quad u_\tau = 1$$

Требую непрерывности  $u$ ,  $u_y$  и  $u_\tau$  вдоль  $HR$  и  $HK$ , в областях  $RHK$  и  $KHM$  имеем соответственно

$$u = \frac{1-q}{2q} (y + q\tau) + \varphi(y - q\tau) - \varphi\left(\frac{2(1+\beta)(\beta-q)}{\beta^4}\right) - \frac{(1+\beta)(\beta-q^2)}{q\beta^4}$$

$$u = \frac{\beta^2}{8(\beta+q)} (y + q\tau)^2 + \frac{\beta^2}{8(\beta-q)} (y - q\tau)^2 - \frac{1}{4} \beta y^2 +$$

$$+ \frac{1-q}{2q} (y + q\tau) + \varphi(y - q\tau) - \varphi\left(\frac{2(1+\beta)(\beta-q)}{\beta^4}\right) - \frac{(1+\beta)(\beta-q^2)}{q\beta^4} \quad (3.3)$$

Функция  $\varphi$  находится из очевидного соотношения на волне разгрузки  $s = f(y)$ , т. е.

$$u_y(y, \omega(y)) = \frac{1}{q^2} f(y) - \frac{1}{2} \beta (1 - \beta\xi) y + \frac{(1+\beta)(1-\beta\xi)}{\beta^2} + \frac{1-q^2}{q^2}$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{1-q\xi}{q^2} \int_{\alpha}^{A_1(x)} f(x) dx - \frac{\beta^3(1-\beta\xi)}{4(\beta^2-q^2)(1-q\xi)} x^2 +$$

$$+ \frac{(1+\beta)(1-\beta\xi)}{\beta(\beta+q)(1-q\xi)} x + \frac{(1-q)(2+q)}{2q^2} x + D$$

$$A_1(x) = \frac{x}{1-q\xi} + \frac{2q(1+\beta)(1-\beta\xi)}{\beta^4(1-q\xi)}, \quad \alpha = \frac{2(1+\beta)}{\beta^3} \quad (3.4)$$

Для областей  $MNB$  и  $BHP$  последовательно получаем задачу Коши, и решение в них запишется следующим образом:

область  $MNB$

$$u = \frac{1-q^2}{q^2} F_1(y) + \frac{(q-1)(1+\xi)}{2q} F_2(y + \tau) + \frac{(q+1)(1-\xi)}{2q} F_3(y - \tau) +$$

$$+ \frac{\xi\beta^3(1+q\xi)}{4(\beta+q)(1-\xi^2)} (y^2 + \tau^2) + \frac{\beta^2(q-q\beta\xi-q\xi^2-\beta\xi^2)}{2(\beta+q)(1-\xi^2)} y\tau - \frac{1}{4} \beta y^2 +$$

$$+ \frac{(1+\beta)(1-\beta\xi)(1+q\xi)}{\beta(\beta+q)(1-\xi^2)} y + \frac{1-q^2}{q^2} y - \frac{(1+\beta)(1-\beta\xi)(q+\xi)}{\beta(\beta+q)(1-\xi^2)} \tau -$$

$$- \frac{1-q}{q} \tau + \frac{(1+\beta)^2(1-\beta\xi)(q-\beta+\xi-q\beta\xi)}{\beta^5(\beta+q)(1-\xi^2)} - \frac{(1+\beta)(2\beta+q^2-2q-q^2\beta)}{q^2\beta^4} \quad (3.5)$$

область  $BHP$

$$u = \frac{(q-1)(1+\xi)}{2q} F_2(y + \tau) + \frac{(q+1)(1-\xi)}{2q} F_3(y - \tau) - \frac{1}{4} \beta y^2 +$$

$$+ \frac{\xi\beta^3(1-q\xi)}{4(\beta+q)(1-\xi^2)} (y^2 + \tau^2) + \frac{\beta^2(q-q\beta\xi-q\xi^2-\beta\xi^2)}{2(\beta+q)(1-\xi^2)} y\tau +$$

$$+ \frac{(1+\beta)(1-\beta\xi)(1+q\xi)}{\beta(\beta+q)(1-\xi^2)} y - \frac{(1+\beta)(1-\beta\xi)(q+\xi)}{\beta(\beta+q)(1-\xi^2)} \tau - \frac{1-q}{q} \tau +$$

$$+ \frac{(1+\beta)^2(1-\beta\xi)(q-\beta+\xi-q\beta\xi)}{\beta^5(\beta+q)(1-\xi^2)} + \frac{(1+\beta)(2-q-q\beta)}{q\beta^4} \quad (3.6)$$

Здесь

$$F_1(y) = \int_{\alpha}^y f(x) dx, \quad F_2(y + \tau) = \int_{\alpha}^{A_2} f(x) dx, \quad F_3(y - \tau) = \int_{\alpha}^{A_3} f(x) dx$$

$$A_2 = \frac{y + \tau}{1 + \xi} - \frac{2(1 + \beta)(1 - \beta\xi)}{\beta^4(1 + \xi)}, \quad A_3 = \frac{y - \tau}{1 - \xi} + \frac{2(1 + \beta)(1 - \beta\xi)}{\beta^4(1 - \xi)} \quad (3.7)$$

Требую непрерывности  $u_y$  вдоль характеристики  $HP$ , из (1.3), (1.5), (2.5), (3.6) и (3.7) находим функцию  $f(y)$

$$f(y) = \frac{q\beta^3(\beta\xi - q\beta\xi - 2\beta - q - 1)}{2(\beta + q)(1 + \beta)(1 + q)} y - \frac{\beta(1 - q)(1 + q\xi)}{(\beta + q)(1 + q)} \quad (3.8)$$

При этом  $u$  и  $u_\tau$  оказываются непрерывными вдоль  $HP$  при любом  $\xi$ .

Решая задачу в области  $MP$   $\tau$ , нетрудно убедиться в том, что и граничное условие  $s(0, \tau) = 0$  также выполняется при любом  $\xi$ .

Для определения уравнения волны разгрузки необходимо проверить еще условия нагружения и разгрузки в произвольном сечении стержня до и после прохождения волны разгрузки, т. е. (учитывая, что напряжение всюду отрицательно)

$$\frac{\partial s(y, \tau)}{\partial \tau} \leq 0 \quad (\tau \leq \omega(y)), \quad \frac{\partial s(y, \tau)}{\partial \tau} > 0 \quad (\tau > \omega(y)) \quad (3.9)$$

Из (3.3), (3.4), (3.8) и (1.9) получаем, что первое из этих условий не выполняется ни при каком  $\xi > 1/\beta$ . Предполагая, что волна разгрузки лежит ниже тепловой волны, т. е.  $\xi < 1/\beta$ , аналогично предыдущему убеждаемся в том, что нарушается второе из условий (3.9).

Таким образом, скорость волны разгрузки не может быть больше скорости распространения тепла в стержне, и при любом  $\beta < q$  волна разгрузки совпадает с фронтом тепловой волны. При этом все условия непрерывности, граничные условия и условия (3.9) выполняются.

При  $q \rightarrow 1$  решение переходит в (2.2), (2.3); разгрузки в этом случае не наступает, а ломаная линия  $\tau = \omega(y)$  становится «прямой нейтрального нагружения»  $\tau = y$ .

Из всех механических характеристик материала наиболее сильно зависящей от температуры будет предел упругости. Отметим, что полученное решение справедливо при любой зависимости предела упругости от температуры, так как упруго-пластическая граница  $HL$  (фиг. 1) в случае  $\beta > 1$  будет линией постоянной температуры, а в случае  $\beta \leq 1$  вдоль упруго-пластической границы (фиг. 6) температура равна нулю.

Поступила 21 III 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. В., К о м п а н е й ц А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. Изд. АН СССР, 1950.
2. Б а р е н б л а т т Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. Р а х м а т у л и н Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. 9, вып. 1.
4. С к о б е е в А. М. К теории волны разгрузки. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
5. С у в о р о в Ю. П. Распространение температурных напряжений в упруго-пластическом стержне. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.