

## ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ КАК ЗАДАЧА С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Мильтон Ван Дейк

(Стенфорд, США)

Метод склеенных асимптотических разложений, недавно развитый для задач с сингулярными возмущениями, применен для решения задачи обтекания плоского нестреловидного несущего крыла большого относительного удлинения. Метод приводит к упрощенному варианту теории несущей линии Прандтля, причем решение интегрального уравнения заменяется квадратурами. В общем виде вычислено следующее приближение.

Общий метод применен к рассмотрению частных случаев заостренного, линзовидного, эллиптического и прямоугольного крыльев в плаве; в тех случаях, где это было возможно, проводилось сравнение с результатами предыдущих исследований.

Описаны дополнительные неравномерности на краях и других нарушениях непрерывности и намечены методы для их ликвидации.

Задача теории возмущений называется сингулярной, если непосредственное разложение не применимо в некоторой части интересующей нас области поля. Таковую неравномерность можно предвидеть в гидродинамике, когда задача содержит две характерные длины и рассматривается аппроксимация, соответствующая малым значениям их отношения.

Прототипом задач с сингулярными возмущениями служит теория пограничного слоя Прандтля, если рассматривать ее как первое приближение, соответствующее малым значениям отношения «вязкой длины»  $\nu / V$  к некоторому характерному геометрическому размеру.

Систематический метод расчета более высоких приближений в таких задачах был развит в Калифорнийском технологическом институте Лагерстромом, Каплуном и Коулом [1, 2]. Этот метод склеенных асимптотических разложений был применен затем к различным вязким течениям.

В недавних работах, выполненных в Стенфордском университете, мы применили этот метод к некоторым течениям идеальной жидкости. Якура [3] исследовал энтропийный слой, получающийся при слабом затуплении заостренного тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью. Автору известна неопубликованная работа Мансона (Munson), в которой проводится исследование вихревого слоя на конусе под углом атаки в сверхзвуковом потоке.

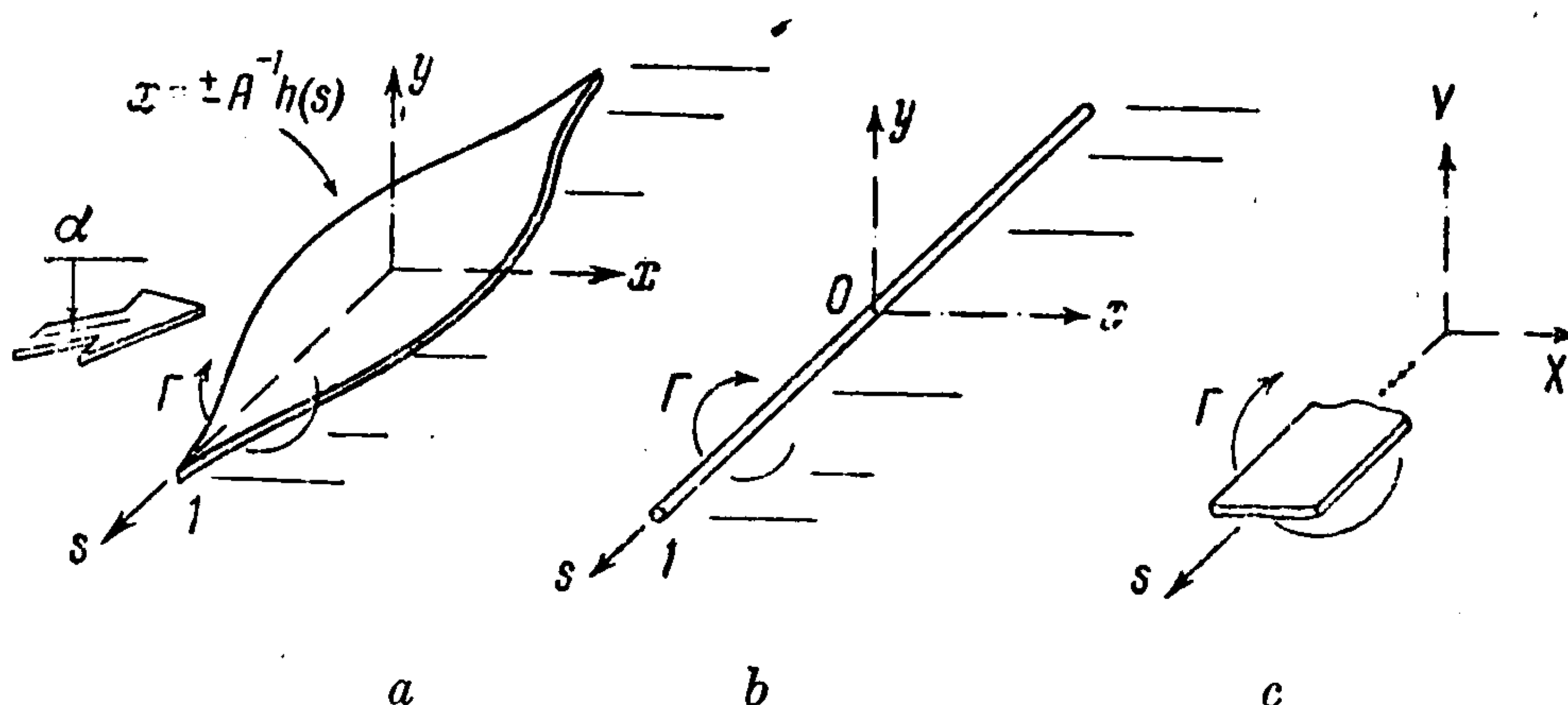
В настоящей работе проведен пересмотр классической теории крыла большого удлинения в дозвуковом потоке.

В противоположность теории пограничного слоя, лишь недавно было понято, что теория несущей линии, также развитая Прандтлем, представляет собой задачу с сингулярными возмущениями. Она дает асимптотическое решение для бесконечно малого отношения хорды к размаху.

Роль этих двух различных характерных длин была выяснена Фридрихсом [4], который получил заново интегральное уравнение Прандтля в работе, бывшей одним из первых приложений метода склеенных разложений.

В настоящей работе будет показано, как систематическое использование метода упрощает этот результат, сводя его к квадратурам, и дает возможность получения следующих приближений.

1. Склеенные асимптотические разложения. Рассмотрим для простоты плоское крыло нулевой толщины, форма которого в плане симметрична как в направлении размаха крыла, так и в направлении хорды (фиг. 1а); предположим также, что угол атаки крыла  $\alpha$  настолько мал, что существенны только линейные члены. Выберем скорость набегающего потока на бесконечности и полуразмах крыла соответственно в качестве единиц измерения скорости и длины. Пусть крыло располагается в плоскости  $y = 0$ ; набегающий поток наклонен к этой плоскости снизу.



Фиг. 1 а, b, с

Удобно описывать форму крыла в плане функциональной зависимостью вида  $x = \pm A^{-1} h(s)$ , где  $A$  — удлинение,  $s$  — координата, отсчитываемая в направлении размаха крыла, а полухорда  $h$  представляет собой величину порядка единицы. Предположим пока, что функция  $h(s)$  обладает нужным для дальнейшего числом непрерывных производных, — следствия, вытекающие из отказа от этого ограничения на затупленных краях, будут рассмотрены позднее.

Полная система уравнений для определения потенциала скорости  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{ss} = 0 \quad (\text{уравнение движения}) \quad (1.1.1)$$

$$\Phi_y = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| \leq A^{-1} h(s), |s| \leq 1 \quad (\text{условие касания}) \quad (1.1.2)$$

$$\Phi \sim x + \alpha y \quad (\text{условие вверх по течению}) \quad (1.1.3)$$

$$|\Phi_x|, |\Phi_y|, |\Phi_s| < \infty \quad \text{при } y = 0, x = A^{-1} h(s), |s| < 1 \quad (1.1.4)$$

(условие Кутта — Жуковского)

1.1. Внешний предел. Пусть теперь удлинение  $A$  стремится к бесконечности при фиксированных  $x, y, s$ . Назовем этот процесс внешним предельным переходом, а величины  $x, y, s, \Phi$  — внешними переменными, поскольку наибольший размер используется в качестве характерной длины. Крыло при этом предельном переходе стягивается в линию (фиг. 1б); на этой линии сконцентрированы все особенности, которые могут быть использованы для представления течения вокруг этой линии.

Ясно, что при таком предельном переходе возмущения, создаваемые крылом, стремятся к нулю как  $A^{-1}$ . Таким образом, внешний предел представляет собой просто однородный поток. Если мы сохраним малые возмущения порядка  $A^{-1}$ , то представляется правдоподобным (и на самом

деле будет подтверждено ниже путем склеивания), что полная система особенностей аппроксимируется присоединенным линейным вихрем с неизвестной переменной циркуляцией

$$\Gamma(s; A) \sim A^{-1} \gamma_2(s) \quad (1.2)$$

С переменностью по размаху циркуляции связано существование свободных вихрей, которые сходят вниз по потоку приблизительно в направлении свободного потока. Однако при малых углах атаки  $\alpha$  можно считать, что вихри лежат в плоскости крыла  $y = 0$ .

Это и есть известная вихревая система прандтлевской теории несущей линии. Соответствующий потенциал скорости представляется в виде

$$\psi \sim x + \alpha y + \frac{1}{4x} A^{-1} \int_{-1}^1 \frac{y \gamma_2(\sigma)}{y^2 + (s - \sigma)^2} \left[ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (s - \sigma)^2}} \right] d\sigma \quad (4.3)$$

1.2. *Внутренний предел.* К сожалению, теперь уже слишком поздно определять интенсивность присоединенных вихрей  $\gamma_2$ . Ее можно было бы определить, подчиняя течение условию Кутта — Жуковского на задней кромке; однако подобные детали утрачиваются при внешнем предельном переходе. Для того чтобы эту деталь восстановить, изменим величину координат, отнеся их не к полуразмаху, а к некоторой характерной хорде. Соответственным образом изменится и величина потенциала скоростей, так что значения всех переменных вблизи крыла будут иметь порядок единицы. Введем, таким образом, внутренние переменные, обозначаемые заглавными буквами, полагая

$$\varphi = A^{-1} \Phi(X, Y, s), \quad X = Ax, \quad Y = Ay \quad (1.4)$$

Тогда полная система уравнений (1.1) примет вид

$$\Phi_{XX} + \Phi_{YY} + A^{-2} \Phi_{ss} = 0 \quad (1.5.1)$$

$$\Phi_Y = 0 \quad \text{при } Y = 0, |X| \leq h(s), |s| \leq 1 \quad (1.5.2)$$

$$\Phi \sim X + \alpha Y \quad (\text{вверх по течению}) \quad (1.5.3)$$

$$|\Phi_X|, |\Phi_Y|, |\Phi_s| < \infty \quad \text{при } Y = 0, X = h(s), |s| \leq 1 \quad (1.5.4)$$

Полагая  $A = \infty$ , получим постановку задачи, соответствующую внутреннему пределу (фиг. 1с). Эта постановка задачи, очевидно, соответствует плоскому течению при обтекании плоской пластины, так что координата, отсчитываемая вдоль размаха, будет входить только параметрически в функцию  $h(s)$ . Потенциал скоростей представляется в виде

$$\Phi_1 = X + \alpha \operatorname{Im} [(Z^2 - h^2)^{1/2} - h \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (Z/h)], \quad Z = X + iY \quad (1.6)$$

Применение здесь условия на бесконечности (1.5.3) не представляется строго обоснованным, так как внутреннее решение предполагается справедливым только вблизи крыла. Однако применимость этого условия оправдывается путем склейки внутреннего и внешнего решений при помощи ограниченного принципа склейки [1]:

$m$ -членное внутреннее разложение от  $p$ -членного внешнего разложения равно  $p$ -членному внешнему разложению от  $m$ -членного внутреннего разложения (1.7)

Пока достаточно взять  $m = 1$ ,  $p = 1$ , однако на следующей ступени потребуется взять  $m = 1$ ,  $p = 2$ . Поэтому мы вычислим сразу же двучленное внешнее разложение внутреннего предела. Это получается, если записать  $\varphi = A^{-1}\Phi_1$  в терминах внешних переменных, разложить в ряд при больших  $A$  и удержать главные и вторые члены:

$$\left( \begin{array}{l} \text{двучленное внешнее разложение} \\ \text{одночленного внутреннего разложения} \end{array} \right) \quad \varphi = (x + \alpha y) - \frac{\alpha h(s)}{A} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (1.8)$$

Первый член обосновывает использование условия на бесконечности. Второй член представляет собой плоский потенциал, обусловленный вихрем в начале координат с циркуляцией

$$\Gamma = \Gamma_\infty = 2\pi\alpha A^{-1}h(s) \quad (1.9)$$

1.3. *Второе приближение.* Для дальнейшего формального продвижения следовало бы искать решение внешних уравнений, внутренний предел которых выражается в виде (1.8). Однако такое решение было уже построено на основе физических соображений — это потенциал несущей линии, определяемый выражением (1.3). Остается только определить вихрь  $\gamma_2$ , входящий в это выражение, склеивая с внутренним пределом. Результат становится физически очевидным, если исходить из того факта, что циркуляция по любым двум кривым, охватывающим одни и те же вихревые линии, одинакова (фиг. 1). Поэтому соотношения (1.2) и (1.9) можно приравнять, и получаем

$$\gamma_2(s) = 2\pi\alpha h(s) \quad (1.10)$$

Подстановка этого выражения в соотношение (1.3) дает двучленное внешнее разложение

$$\varphi \sim (x + \alpha y) + \frac{\alpha}{2A} \int_{-1}^1 \frac{yh(\sigma)}{y^2 + (s - \sigma)^2} \left[ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (s - \sigma)^2}} \right] d\sigma \quad (1.11.1)$$

при  $A \rightarrow \infty$  и фиксированных  $x, y, s$

На следующем этапе нам потребуется двучленное внутреннее разложение этого результата. Расходящиеся интегралы ликвидируются путем дифференцирования по  $s$  и интегрирования под знаком интеграла, что приводит выражение для потенциала к другому виду

$$\varphi \sim (x + \alpha y) - \frac{\alpha}{2A} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-1}^1 h(\sigma) \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{s - \sigma} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (s - \sigma)^2}}{s - \sigma} \right] d\sigma \quad (1.11.2)$$

Этот способ, который будет повторяться далее, хорошо известен из теории тонкого крыла [5]. Введение внутренних переменных и разложение дает теперь

$$\left( \begin{array}{l} \text{двучленное внутреннее разложение} \\ \text{двучленного внешнего разложения} \end{array} \right) \quad \varphi = \frac{1}{A} \left[ X + \alpha Y - \alpha h(s) \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} \right] - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{A^2} Y \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \quad (1.12)$$

По обычным причинам берется главное значение сингулярного интеграла по Коши. Первый член совпадает с (1.8), что подтверждает наши критические соображения о склейке.

Возвратимся теперь к внутреннему разложению и будем искать второе приближение. Уравнение (1.5.1) должно было дать поправку, имеющую относительный порядок малости  $A^{-2}$ , однако склейка с (1.12) показывает, что появляется еще член относительного порядка  $A^{-1}$ . Поэтому сделаем внутреннее разложение

$$\varphi \sim A^{-1} \Phi_1(X, Y, s) + A^{-2} \Phi_2(X, Y, s) + \dots \quad (1.13)$$

при  $A \rightarrow \infty$  и фиксированных  $X, Y, s$

Подстановка в полную систему уравнений (1.5) показывает, что  $\Phi_2$ , как и  $\Phi_1$ , удовлетворяет уравнению Лапласа в плоскости  $XU$  при граничном условии непротекания жидкости через поверхность крыла. Склеивая с (1.12), получаем, как показывают коэффициенты при  $Y$ , что  $\Phi_2$  представляет собой просто результат некоторого уменьшения угла атаки в решении для плоской пластинки (1.6) от его геометрического значения  $\alpha$  до некоторого эффективного значения  $\alpha_e$ , где

$$\frac{\alpha_e}{\alpha} = 1 - \frac{1}{2A} \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \quad (1.14)$$

Это соотношение представляет собой известный результат теории несущей линии [6]: система вихрей, сходящих с задней кромки, индуцирует вблизи крыла скорости скоса, постоянные вдоль хорды в каждом сечении, перпендикулярном размаху крыла и действующие в направлении уменьшения кажущегося угла атаки этого сечения. Угол скоса мал сравнительно с геометрическим углом атаки; это позволяет изложенным методом привести вычисления к квадратурам, а не к решению интегрального уравнения.

Двучленное внутреннее разложение определяется соотношением (1.6), в котором  $\alpha$  заменяется на  $\alpha_e$ , определяемое соотношением (1.14)

$$\varphi \sim \frac{X}{A} + \frac{\alpha}{A} \left[ 1 - \frac{1}{2A} \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \right] \text{Im} \left[ (Z^2 - h^2)^{1/2} - h \text{Arch} \left( \frac{Z}{h} \right) \right] \quad (1.15)$$

2.4°. *Третье внешнее приближение.* Прежде чем сравнивать наше решение с классической теорией, найдем следующее приближение. Вводя внешние переменные в (1.15) и разлагая, получаем

$$\begin{aligned} \varphi = x + \alpha \left( 1 - \frac{1}{2A} \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \right) \times \\ \times \left[ y - \frac{h(s)}{A} \text{arc tg} \frac{y}{x} \right] + \frac{\alpha}{2A^2} h^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

(трехчленное внешнее разложение  
двучленного-внутреннего разложения)

Повторение предыдущих рассуждений показывает, что циркуляция присоединенных вихрей снова находится из (1.9) и определяется выражением

$$\Gamma = 2\pi\alpha A^{-1} h(s) \left[ 1 - \frac{1}{2A} \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \right] = 2\pi\alpha A^{-1} \left[ h(s) + \frac{1}{A} h_2(s) \right] \quad (1.17)$$

Здесь

$$h_2(s) = -\frac{1}{2} h(s) \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \quad (1.18)$$

Эта величина представляет собой изменение второго порядка малости полухорды фиктивного крыла, имеющего в первом приближении ту же самую подъемную силу, что и настоящее крыло во втором приближении.

В дополнение к этому изменению вихря последний член (1.16) обнаруживает появление на этой стадии следующей по порядку особенности на возмущающей линии. Эту особенность будем называть дивихрем (хотя ее и можно рассматривать как диполь с вертикальной осью), чтобы подчеркнуть, что она представляет собой производную по  $x$  от вихря, физически соответствующую первому моменту распределенной завихренности на несущей поверхности. Интенсивность дивихря составляет  $\Delta \sim A^{-2} \delta_s$

$$\delta_s(s) = \pi \alpha h^2(s) \quad (1.19)$$

Потенциал распределения дивихрей по размаху представляется производной по  $x$  от (1.3), определяющего потенциал распределения простых вихрей. Таким образом, трехчленное внешнее разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi \sim (x + \alpha y) - \frac{\alpha}{2A} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-1}^1 \left[ h(\sigma) + \frac{h_2(\sigma)}{A} \right] \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{s - \sigma} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (s - \sigma)^2}}{s - \sigma} \right] d\sigma + \frac{\alpha}{4A^2} \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-1}^1 h^2(\sigma) \frac{(s - \sigma) d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + (s - \sigma)^2}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Как и раньше, здесь расходящиеся интегралы во внутреннем разложении среди членов порядка  $A^{-2}$  устранены дифференцированием еще два раза по  $s$  и интегрированием под знаком интеграла. После вычислений получаем трехчленное внутреннее разложение выражения (1.20) в виде

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{трехчленное внутреннее разложение} \\ \text{трехчленного внешнего разложения} \end{array} \right) \varphi = \frac{1}{A} \left[ X + \alpha \left\{ Y - h(s) \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} h^2(s) \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right\} \right] + \frac{\alpha}{2A^2} \left[ h(s) \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} - Y \right] \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} + \\ + \frac{\log A \alpha}{2A^3} [XYh''(s) + Y(hh')'] + \frac{\alpha}{2A^3} \left[ -Y \frac{d}{ds} \int_{-1}^1 \frac{h_2(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} + \right. \\ \left. + Y \left( \log \frac{2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{1}{2} \right) (hh')' + XY \left( \log \frac{2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{3}{2} + \frac{Y}{X} \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} \right) \times \right. \\ \left. \times h''(s) + \frac{1}{2} XY \frac{d^3}{ds^3} \int_{-1}^1 h(\sigma) \operatorname{sgn}(s - \sigma) \log |s - \sigma| d\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} Y \frac{d^3}{ds^3} \int_{-1}^1 h^2(\sigma) \operatorname{sgn}(s - \sigma) \log |s - \sigma| d\sigma \right] \quad (1.21) \end{aligned}$$

Первые два члена совпадают с (1.16), подтверждая склейку.

2.5. Третье внутреннее приближение. Обратимся еще раз к внутреннему разложению для отыскания первой поправки к теории Прандтля. Дифференциальное уравнение (1.5.1) наводит на мысль, что следующий член в разложении (1.13) имеет порядок  $A^{-3}$ , однако склейка с (1.21) показывает, что здесь появляется еще и логарифмический член. Таким образом, внутреннее разложение продолжим в виде

$$\varphi \sim A^{-1} \Phi_1 + A^{-2} \Phi_2 + A^{-3} \log A \Phi_{32} + A^{-3} \Phi_{31} + \dots \quad (1.22)$$

Изменение обозначений призвано показать, что третье приближение состоит из двух членов, содержащих соответственно множители  $A^{-3} \log A$  и  $A^{-3}$ , так как для практических целей логарифм имеет порядок единицы; как обычно, логарифмический член вычислять гораздо проще, нежели его алгебраический компаньон.

Подстановка в (1.5) показывает, что  $\Phi_{32}$  удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа и условиям обращения в нуль нормальной компоненты скорости на задней кромке. Склейка с (1.21) дает недостающее граничное условие в виде

$$\Phi_{32} \sim \frac{1}{2} \alpha [Y (hh')' + XYh''] \quad (1.23)$$

Первый член в квадратных скобках, как и раньше, соответствует небольшому увеличению эффективного угла атаки. Второй член представляет кривизну линий тока в окрестности крыла, индуцированную системой вихрей, сошедших с задней кромки. Он компенсируется добавлением решения задачи теории тонкого крыла для изогнутого по параболе профиля.

Таким образом, коэффициент при логарифмическом члене будет

$$\Phi_{32} = \frac{1}{4} \alpha \operatorname{Im} [2 (hh')' \{(Z^2 - h^2)^{1/2} - h \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (Z / h)\} + h'' \{Z (Z^2 - h^2)^{1/2} - h^2 \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (Z / h)\}] \quad (1.24)$$

Подставляя (1.22) и (1.6) в (1.5.1), получим дифференциальное уравнение для коэффициента алгебраического члена

$$\Phi_{31XX} + \Phi_{31YY} = \alpha \operatorname{Im} [(hh')' (Z^2 - h^2)^{-1/2} - h^{-1} (hh')' Z (Z^2 - h^2)^{-1/2} + (hh')^2 (Z^2 - h^2)^{-3/2} - hh'^2 Z (Z^2 - h^2)^{-3/2} + h'' \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (Z / h)] \quad (1.25)$$

Введение комплексных переменных  $Z = X + iY$  и  $\bar{Z} = X - iY$  облегчает отыскание частного интеграла

$$\Phi_{31}^{(p)} = \frac{1}{4} \alpha \operatorname{Im} \bar{Z} [hh'^2 (Z^2 - h^2)^{-1/2} - h'^2 Z (Z^2 - h^2)^{-1/2} - (2h'' + h'^2 h^{-1}) (Z^2 - h^2)^{1/2} + (hh')' \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (Z / h) + h'' Z \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (Z / h)] \quad (1.26.1)$$

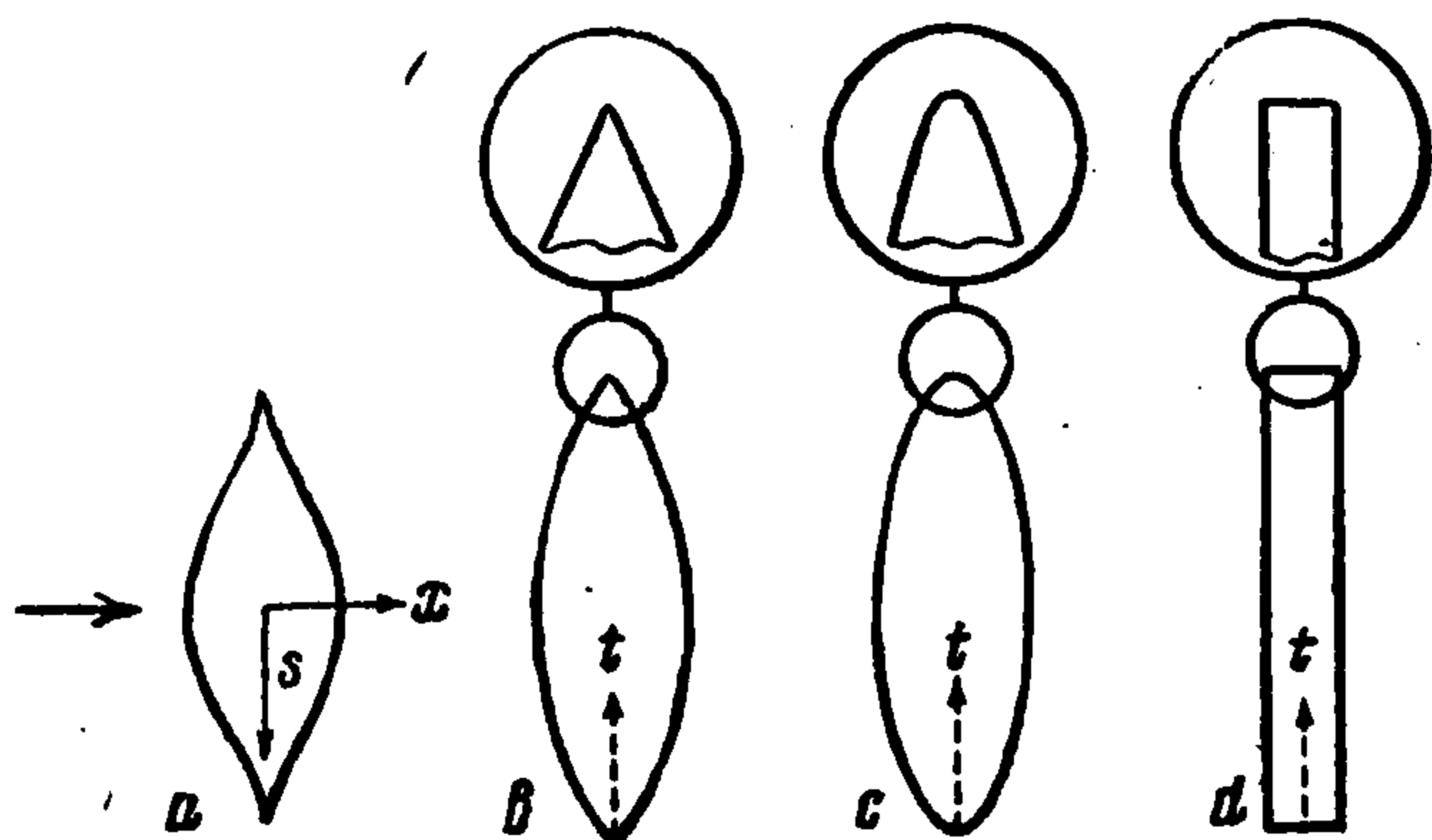
Можно непосредственно проверить, что дополнительное решение однородного уравнения, обладающее свойством касательности скорости на крыле, удовлетворяющее условию Кутта — Жуковского и допускающее склейку с последним членом в (1.21), имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{31}^{(c)} = & \frac{\alpha}{4} \operatorname{Im} \left[ \left\{ \left( \log \frac{4}{h} + \frac{3}{2} \right) h'' + \frac{1}{2} \frac{d^3}{ds^3} \int_{-1}^1 h(\sigma) \operatorname{sgn}(s - \sigma) \log |s - \sigma| d\sigma \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ Z (Z^2 - h^2)^{1/2} - h^2 \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{Z}{h} \right\} + \left\{ -2 \frac{d}{ds} \int_{-1}^1 \frac{h_2(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} + \left( 2 \log \frac{4}{h} + 1 \right) (hh')' - \right. \\ & \left. \left. - h'^2 + \frac{1}{2} \frac{d^3}{ds^3} \int_{-1}^1 h^2(\sigma) \operatorname{sgn}(s - \sigma) \log |s - \sigma| d\sigma \right\} \{(Z^2 - h^2)^{1/2} - \right. \\ & \left. \left. - h \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{Z}{h} \right\} - h'' Z^2 \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{Z}{h} - (hh')' Z \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{Z}{h} + h \left( 2hh'' + \frac{3}{2} h'^2 \right) \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{Z}{h} \right] \end{aligned}$$

2.6. Третье приближение для циркуляции и подъемной силы. Циркуляция  $\Gamma$  равна  $2\pi i$ , умноженному на коэффициент при  $\log(x^2 + y^2)^{1/2}$  или при  $\text{Ar ch}(Z/h)$  в разложении для  $\varphi$ . Таким образом, соотношения (1.22), (1.15), (1.24), (1.26.1) и (1.26.2) дают

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = & 1 - \frac{1}{2A} \int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s-\sigma} + \frac{\log A}{4A^2} (2h'^2 + 3hh'') + \\ & + \frac{1}{4A^2} \left[ \left( 2 \log \frac{4}{h} - \frac{3}{2} \right) h'^2 + \left( 3 \log \frac{4}{h} + \frac{1}{2} \right) hh'' - \right. \\ & - 2 \frac{d}{ds} \int_{-1}^1 \frac{h_2(\sigma) d\sigma}{s-\sigma} + \frac{1}{2} h \frac{d^3}{ds^3} \int_{-1}^1 h(\sigma) \text{sgn}(s-\sigma) \log |s-\sigma| d\sigma + \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{d^3}{ds^3} \int_{-1}^1 h^2(\sigma) \text{sgn}(s-\sigma) \log |s-\sigma| d\sigma \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь  $\Gamma_\infty$  — значение циркуляции, получающееся по двумерной теории и определяемое (1.9). Таблица значений первого из двух интегралов дана в [7]. Два последних интеграла удобно вычисляются как конечные части (f.p.) расходящихся интегралов



Фиг. 2 a, b, c, d

и определяемое (1.9). Таблица значений первого из двух интегралов дана в [7]. Два последних интеграла удобно вычисляются как конечные части (f.p.) расходящихся интегралов

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{-1}^1 g(\sigma) \text{sgn}(s-\sigma) \log |s-\sigma| d\sigma = \\ = \text{f.p.} \left[ \int_0^{1+s} \frac{g(s-\sigma)}{\sigma} d\sigma + \int_0^{1-s} \frac{g(s-\sigma)}{\sigma} d\sigma \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подъемная сила связана с циркуляцией законом Кутта — Жуковского. Поэтому наклон кривой подъемной силы связан с (1.27) соотношением

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \int_0^1 h(s) \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} ds \quad (1.29)$$

2. Приложение к одному семейству форм крыла в плане. Покажем полезность проведенного выше формального анализа, применив его к семейству форм крыла в плане, приведенному на фиг. 2. Эти формы описываются соотношением

$$h(s) = k_n (1 - s^2)^{1/2 n} \quad \left( k_n = \left[ \int_0^1 (1 - s^2)^{1/2 n} ds \right]^{-1} \right) \quad (2.1.1)$$

Коэффициент удлинения  $k_n$  при  $n = 0, 1, 2, 3$  равен соответственно

$$k_0 = 1, \quad k_1 = \frac{4}{\pi}, \quad k_2 = \frac{3}{2}, \quad k_3 = \frac{16}{3\pi} \quad (2.12)$$

В случае затупленных боковых краев можно предвидеть усложнения, поэтому рассмотрим сперва наиболее гладкую форму.

2.1. Крыло заостренной формы в плане. Крыло с заостренными краями, изображенное на фиг. 2a, описывается соотношением

$$h(s) = \frac{16}{3\pi} (1 - s^2)^{3/2} \quad (2.2)$$

Уравнение (1.27) для циркуляции присоединенных вихрей дает

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\Gamma_{\infty}} = & 1 - 4A^{-1}(1 - 2s^2) - \frac{64}{\pi^2} A^{-2} \log A (1 - s^2) (1 - 4s^2) \times \\ & \times \frac{64}{3\pi^2} A^{-2} \left[ (1 - s^2) \left\{ (1 - 2s^2) \log 2 - 2(1 - 5s^2) \log(1 - s^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3(1 - 4s^2) \log \frac{3\pi}{4(1 - s^2)^{3/2}} - \frac{1}{2}(1 + 7s^2) + 2(1 - s^2)^{1/2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (1 - s \arcsin s) \right\} + 4(1 - 16s^2 - 5s^4) + \frac{x^2}{8}(9 - 48s^2 + 40s^4) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта форма крыла в плане является настолько гладкой, что никаких осложнений от влияния краев не возникает, и формула (2.3) остается применимой вдоль всего размаха.

2.2. Крыло линзовидной формы в плане. Для линзовидного крыла, изображенного на фиг. 2b и описываемого соотношением

$$h(s) = \frac{3}{2}(1 - s^2) \quad (2.4)$$

циркуляция определяется соотношением

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\Gamma_{\infty}} = & 1 - \frac{3}{2A} \left( 2 - s \log \frac{1+s}{1-s} \right) - \frac{9}{8} \frac{\log A}{A^2} (3 - 7s^2) - \frac{9}{8A^2} \left[ \frac{1}{2}(1 - 3s^2) \times \right. \\ & \left. \times \left( \log^2 \frac{1+s}{1-s} - \pi^2 \right) + (3 - 7s^2) \log \frac{8}{3\sqrt{1-s^2}} + 2s(3 - s^2) \log \frac{1+s}{1-s} - \frac{35}{6} + \frac{31}{2}s^2 \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Этот результат не будет равномерно применимым. Он становится неприменимым в экспоненциально малой области вокруг краев, где логарифм становится настолько большим, что каждый член уже имеет порядок единицы. Трудность возникает вследствие того, что течение вблизи кромок не становится двумерным, как бы велико ни было  $A$ . Однако возникающая особенность настолько слаба, что выражение (1.29) по-прежнему дает правильный наклон кривой подъемной силы

$$\begin{aligned} \frac{dC_L}{d\alpha} = & 2\pi \left[ 1 - \frac{9}{4} A^{-1} - \frac{9}{5} A^{-2} \log A + \left( \frac{3}{20} x^2 - \frac{9}{5} \log \frac{8}{3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{27}{8} \log 2 - \frac{408}{25} \right) A^{-2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Неравномерность приближения можно исправить, строя третье разложение, применимое в непосредственной окрестности краев, и склеивая его с внутренним разложением. Однако результаты расчетов по этому методу можно получить и не проводя эти расчеты во всех деталях. Область неравномерности экспоненциально мала, поэтому область вблизи края должна быть увеличена настолько, чтобы с точностью до любого порядка она представлялась бесконечным несущим треугольником (фиг. 2b). В этой задаче не существует характерной длины. Поэтому потенциал должен быть однородной функцией пространственных координат: в сферических полярных координатах он должен выражаться так

$$\Phi_{\text{tip}} \sim r^q f(\theta, \psi) \quad (2.7.1)$$

Показатель  $q$  стремится к единице в пределе при  $A \rightarrow \infty$ , когда угол при вершине треугольника стремится к нулю; для конечных  $A$

$$q = 1 - \frac{c_1}{A} + \frac{c_2}{A^2} + \dots \quad (2.7.2)$$

Циркуляция пропорциональна на единицу меньшей степени расстояния вдоль размаха от края

$$\Gamma_{\text{tip}} \propto t^{q-1} = s^{(q-1) \log t} \sim 1 - \left( \frac{c_1}{A} - \frac{c_2}{A^2} \right) \log t + \frac{1}{2} \left( \frac{c_1^2}{A^2} + \dots \right) \log^2 t + \dots \quad (2.8)$$

Последнее разложение, справедливое только вдали от края, можно использовать для склейки с внутренним решением. Внося  $t = 1 \pm s$  в (2.5), получаем

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} \sim 1 - \frac{3}{2A} \log t + \frac{9}{8} \frac{1}{A^2} [\log^2 t + 2(1 - \log 2) \log t] \quad (2.9)$$

Сравнение с (2.8) показывает, что  $c_1/A = 3/2A$  (отношение корневой хорды к размаху) и  $c_2 = 9(1 - \log 2)/4$ . Таким образом, выраже-

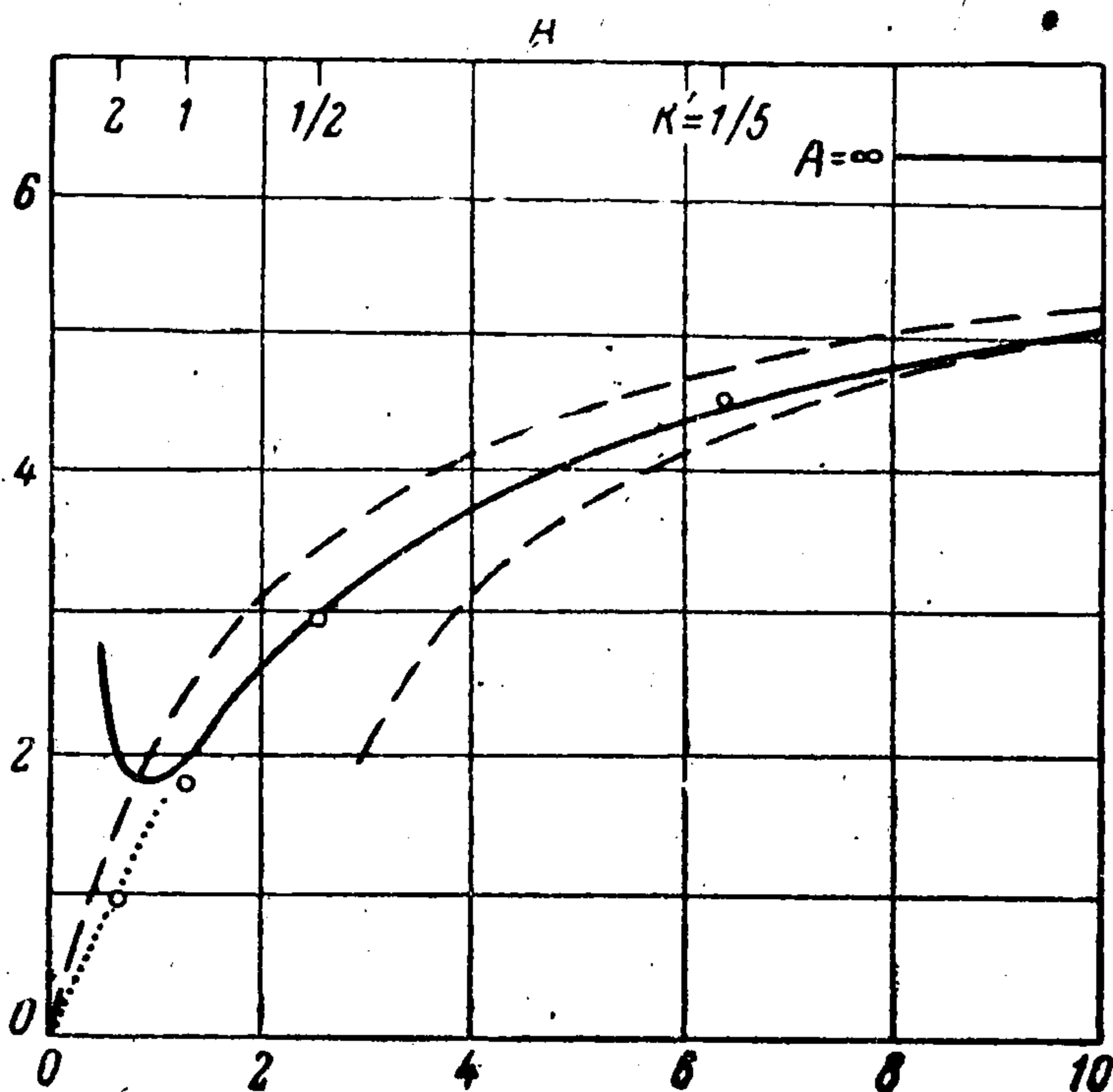
ние для циркуляции становится равномерно применимым, если выделить множитель

$$(1 - s^2)^{-c_1/A + c_2/A^2 + \dots}$$

который обуславливает все логарифмически сингулярные члены. Эта поправка по идее аналогична сделанной в работе [8] для заостренных плоских крыльев и тел вращения.

2.3. Крыло эллиптической формы в плане. Для эллиптического крыла, изображенного на фиг. 2 с и определяемого соотношением

$$h(s) = \frac{4}{\pi} (1 - s^2)^{1/2} \quad (2.10)$$



Фиг. 3

циркуляция определяется соотношением

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = 1 - \frac{2}{A} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\log A}{A^2} \frac{3 - 2s^2}{1 - s^2} + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{A^2} \left[ \frac{5}{2} + \pi^2 - \log(1 - s^2) + \frac{\log 2}{1 - s^2} - \frac{3 - 2s^2}{1 - s^2} \log \frac{\pi}{\sqrt{1 - s^2}} \right] \quad (2.11)$$

Этот результат, очевидно, становится неприменимым, если расстояние от края имеет порядок  $A^{-2}$ , т. е. порядок радиуса кривизны кромки. Однако циркуляция все еще продолжает оставаться интегрируемой; вычисления дают

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \left[ 1 - \frac{2}{A} - \frac{16}{\pi^2} \frac{\log A}{A^2} + \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{7}{2} + \pi^2 - 4 \log \pi \right) \frac{1}{A^2} \right] \quad (2.12)$$

Два первых члена представляют собой разложение известного результата Прандтля для случая эллиптического крыла

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{2\pi}{1 + 2/A} \quad (2.13)$$

Эта форма обладает тем преимуществом, что при  $A = 0$  она обращается в нуль, хотя и превосходит вдвое правильный наклон, даваемый тео-

рией тонкого крыла. Фиг. 3 показывает, что введенное двучленное представление становится более точным при  $A > 5$ .

Можно привести полученное третье приближение к форме, аналогичной прандтлевской. Если также заменить удлинение на отношение  $k'$  малой оси к большой оси, полагая  $k' = 4 / \pi A$ , то выражение (2.12) примет более простой вид

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \left[ 1 + \frac{1}{2} \pi k' + \left( \log \frac{4}{k'} - \frac{7}{8} \right) k'^2 \right]^{-1} \quad (2.14)$$

Кринес [9] извлек асимптотический результат такого типа из развитой им теории несущей поверхности. Однако вместо нашего коэффициента  $1/2$  во втором члене в квадратных скобках он получил  $63/128$ , а вместо  $7/8$  в третьем члене —  $7/4$ . Его коэффициент  $63/128$  не может быть правильным вследствие несовпадения с результатом Прандтля;  $7/4$  представляется просто опiskой, так как наша поправка уменьшает ошибку сравнительно с точными расчетами самого Кринеса, основанными на развитой им теории несущей поверхности (фиг. 3) от 13 до 1 процента при  $k' = 1/2$ . Даже для круглого крыла (2.14) отличается от точного результата только на 12 процентов. Неравномерную применимость решения вблизи края снова можно исправить, если построить дополнительное разложение для этой области. Течение вблизи края, в первом приближении, сводится к задаче о полубесконечном параболическом крыле (фиг. 2c). Эта привлекательная задача теории потенциала до сих пор не имеет решения.

3.4. Крыло прямоугольной формы в плане. Прямоугольное крыло, изображенное на фиг. 2d, лучше всего описывается соотношением

$$h(s) = H(1 - s^2) \quad (2.15)$$

где  $H$  — ступенчатая функция Хевисайда, производная от которой равна дельта-функции Дирака. Иными словами, нужно сделать замену

$$\int_{-1}^1 \frac{h'(\sigma) d\sigma}{s - \sigma} \rightarrow \frac{d}{ds} \int_{-1}^1 \frac{h(\sigma) d\sigma}{s - \sigma}$$

Первые два члена (1.27) дают

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = 1 - \frac{1}{A} \frac{1}{1 - s^2} \quad (2.16)$$

Однако последующие члены содержат функции с особенностями и расходящиеся интегралы; им нельзя придать определенный смысл. Очевидно, полученное решение становится неприменимым на расстояниях от края, имеющих порядок длины хорды. Циркуляция вблизи края ведет себя следующим образом

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} \sim 1 - \frac{c}{4t} + \dots \quad (2.17)$$

где  $c$  — хорда, а  $t$  — расстояние от края. Это выражение нельзя проинтегрировать для получения подъемной силы.

Эти недостатки можно исправить, изолировав край (фиг. 2d) и решив задачу о несущей полубесконечной прямоугольной полосе. Стюартсон [10] сделал это в рамках прандтлевской теории несущей линии.

Вдали от края решение ведет себя следующим образом

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{\infty}} \sim 1 - \frac{c}{4t} + \left(\frac{c}{4t}\right)^2 \left(\log \frac{4c}{t} + \gamma\right) + \dots \quad (\gamma = 0.5772\dots) \quad (2.18)$$

что согласуется с (2.17). Стюартсон использовал полученный им результат для вычисления подъемной силы конечного прямоугольного крыла. Быть может, некоторые детали полученных им результатов изменятся при рассмотрении крыла как несущей поверхности.

Проведенное выше исследование непосредственно обобщается на дозвуковые течения сжимаемой жидкости путем использования известного правила подобия Гетерта, что связано с предположенной линейностью задачи. Анализ нелинейных эффектов потребует существенного дополнительного исследования.

Было бы весьма интересно обобщить решение на случай хорошо известной задачи о стреловидном крыле. (Начало такому исследованию было положено в 1955 г. работой Циолковского [11], выполненной под руководством Фридрихса). Здесь можно ожидать неравномерности приближения в месте корневого соединения, где метод склеенных асимптотических разложений потребовал бы решения задачи о бесконечном V-образном крыле, выполненного в рамках теории несущей поверхности. Аналогичные неравномерности появятся и при других нарушениях непрерывности формы крыла в плане, при рассмотрении отклоненных элеронов и т. д.

Теория несущего крыла конечного размаха является поистине настоящим кладом неравномерностей. Можно учесть толщину крыла, рассматривая сечение крыла в приближении теории тонкого крыла. Это приведет к появлению новых неравномерностей на передней и задней кромках, которые можно скорректировать, привлекая новые локальные разложения [8]. Наконец, решение перестает быть применимым далеко вниз по потоку, где вихревая пелена начинает закручиваться [12].

Внимание автора к рассмотренной задаче было привлечено в ходе дискуссий с М. Ландалем и К. О. Фридрихсом. Автор обязан стимулирующими дискуссиями также Н. Ротту, И. Флюгте-Лотту и Д. Спенсу.

Поступила 20 IX 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplan S. a. Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier — Stokes solutions for small Reynolds number. Low Reynolds number flow past a circular cylinder. Note on the preceding two papers. J. Math. Mech., 1957, v. 5, 6.
2. Lagerstrom P. A., Cole J. D. Examples illustrating expansion procedures for the Navier — Stokes equations. J. Rat. Mech. Anal., 1955, 6, 4, 817—882.
3. Yakura J. K. Theory of entropy layers and nose bluntness in hypersonic flow, in Hypersonic flow research (F. Riddell, ed.), Academic, New York, 1960, 421—470.
4. Friedrichs K. O. Special topics in fluid dynamics. New York Univ., 1953.
5. Heaslet M. A. a. Lomax H. The calculations of pressure on slender airplanes in subsonic flow. U. S. N. A. C. A. Tech. Note 2900, 1953; Rept. 1185, 1954.
6. Prandtl L. Tragflügeltheorie. 1. Mitteilung, in Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Keiser Wilhelm Inst. f. Strömungsforschung, Göttingen, 1927.
7. Van Dyke M. D. Second-order subsonic airfoil-sections theory and its practical application. U. S. N. A. C. A. Tech. Note 3390, 1955; also Rept. 1274, 1956.
8. Van Dyke M. D. Subsonic edges in thin-wing and slender body theory. U. S. N. A. C. A. Tech. Note 3343, 1954.
9. Krienes K. Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Z. angew. Math. und Mech., 1940, 2, 20, 65—85; English transl., N. A. C. A. Tech. Memo, 971.
10. Stewartson K. A note on lifting line theory. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1960, 1, 13, 49—56.
11. Ciolkowski S. I. The swept-back wing. Ph. D. diss., New York Univ., 1955; Univ. Microfilms No. 24, 694, Ann. Arbor.
12. Stern M. The rolling up of a vortex sheet. Ph. D. diss., New York Univ., 1954; Univ. Microfilms No. 22, 971.