Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ СИЛЬНОМ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. В. Вандакуров

(Ленинград)

Исследование устойчивости плазменного шнура, находящегося в периодически меняющемся в направлении оси симметрии продольном магнитном поле, представляет интерес в связи с тем, что отдельный элемент периодичности такой системы представляет собой ловушку с магнитными пробками. Наиболее опасными являются возмущения, слабо искажающие магнитное поле — желобковые неустойчивости [1-3]. Розенблют и др. [4] методом кинетического уравнения рассмотрели эффект стабилизации желобковых неустойчивостей, возникающий при достаточно большой величине ларморовского радиуса ионов. Задача об устойчивости плазмы в переменном вдоль оси системы продольном магнитном поле в работе [4] решена приближенно путем замены дестабилизирующего эффекта, связанного с кривизной магнитных силовых линий (выпуклых наружу от плазмы), соответствующим гравитационным эффектом. Робертс и Тэйлор [5] и Рудаков [6] показали, что стабилизирующий эффект Розенблюта и др. [4] может быть получен из системы уравнений магнитной гидродинамики, если в тензоре вязких напряжений учесть члены, характеризующие влияние конечной величины ларморовского радиуса ионов. Эта «магнитная вязкость» остается при отсутствии столкновений, она не приводит к диссипации энергии.

В настоящей работе задача устойчивости рассматривается методом нормальных колебаний на основе уравнений магнитной гидродинамики с учетом указанной «магнитной вязкости». Предполагается, что давление плазмы мало по сравнению с магнитным давлением и рассматриваются лишь возмущения, не искажающие магнитного поля (в первом приближении).

В §§ 1—4 исследуется устойчивость при бесконечно малом ларморовском радиусе, когда поведение плазмы можно описывать при помощи системы уравнений для одножидкостной проводящей среды. В §§ 1—2 показано, что задача приводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, коэффициентами которого являются усредненные по длине магнитной силовой линии величины, причем для полного определения последних необходимо найти решение еще одного дифференциального уравнения (при заданном распределении магнитного поля в стационарном состоянии). В § 3 рассматривается устойчивость шнура, диаметр которого много меньше длины одного элемента периодичности, а в § 4 изучается устойчивость относительно медленно нарастающих во времени желобковых неустойчивостей. Полученные в § 3, 4 результаты согласуются с выводами работ [1-3].

§ 5 посвящен исследованию устойчивости плазмы с однородными по сечению температурами ионов и электронов при учете эффектов, обусловленных большой величиной ларморовского радиуса ионов. Предполагается, что кривизна силовых линий магнитного поля является малым параметром. Решение задачи выражается в известных функциях для распределений плотности и давления, экспоненциально убывающих при удалении от оси симметрии. Показано, что возможна стабилизация желобковых неустойчивостей (за исключением некоторых возмущений $m = 1$). Результаты расчетов находятся в соответствии с приближенными вычислениями работы [4].

1. Основные уравнения в случае малого ларморовского радиуса ионов. Система уравнений магнитной гидродинамики, описывающая поведение одножидкостной идеально проводящей среды в магнитном поле

H, имеет вид

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0, \qquad \gamma = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление и ρ — плотность среды. Пусть в равновесном состоянии $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$, тогда из (1.1), (1.2) получим

$$\nabla p = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1.5}$$

Рассмотрим устойчивость этого состояния относительно возмущений с зависимостью от времени вида $\exp(i\omega t)$. В возмущенном состоянии полные величины будут: $p + p^*$, $\rho + \rho^*$, $\mathbf{H} + \mathbf{H}^*$, $\mathbf{v}^* = i\omega\boldsymbol{\xi}$, где звездочкой отмечены возмущения. Линеаризованная система (1.1) — (1.4) имеет вид

$$\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}^* = \mathbf{K} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{H}^* = \operatorname{rot}(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}), \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}^* = 0 \tag{1.7}$$

$$\rho^* = -\rho\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\rho, \qquad p^* = -\gamma p\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p \tag{1.8}$$

$$\mathbf{K} = 4\pi\rho\omega^2\boldsymbol{\xi} - 4\pi\nabla p^* - \mathbf{H}^*\times\operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{1.9}$$

При условии $8\pi p \ll H^2$ уравнение (1.6) можно привести к более простому виду [2]. Если не рассматривать бессиловых конфигураций, то из (1.5) следует $|\operatorname{rot}\mathbf{H}| \sim 4\pi p / r_0 H$, r_0 — характерный размер. В (1.6) член слева в H^2 / p раз больше $|\mathbf{K}|$, поэтому нужно принять в первом приближении

$$\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}^* = 0 \tag{1.10}$$

Теперь в левой части (1.6) стоит неопределенная величина и ее надо исключить. Иными словами, здесь существенны члены следующего порядка по малому параметру p / H^2 и нужно использовать условие разрешимости (1.6) [2]. Умножая (1.6) скалярно на $\mathbf{H}$, получим

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{K} = 0 \tag{1.11}$$

Далее находим

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^* = \mathbf{G} + \alpha\mathbf{H}, \qquad \mathbf{G} = \frac{1}{H^2}\mathbf{K}\times\mathbf{H} \tag{1.12}$$

$\alpha(\mathbf{r})$ — произвольная однозначная функция координат. Применяя операцию div к первому уравнению (1.12), получим

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{H}\times\mathbf{K}}{H^2}\right) = \mathbf{H}\cdot\nabla\alpha \tag{1.13}$$

Пусть s будет длиной дуги некоторой силовой линии невозмущенного магнитного поля $\mathbf{H}$. Умножая (1.13) на ds / H и интегрируя по s, получим справа разность значений α на пределах интегрирования. Будем рассматривать конфигурации с замкнутыми магнитными силовыми линиями или конфигурации, имеющие периодически повторяющуюся форму, и возмущение с тем же периодом. Тогда вдоль всей силовой линии или по длине одного элемента периодичности интеграл

$$\oint\frac{1}{H}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{H}\times\mathbf{K}}{H^2}\right)ds = 0 \tag{1.14}$$

Это уравнение несколько иным способом было выведено Кадомцевым [2] для случая, когда возмущение магнитного поля мало. Система уравнений задачи устойчивости, как следует из (1,7)—(1.11) и (1.14), имеет вид

$$\mathbf{H}^* = \operatorname{rot}(\xi \times \mathbf{H}), \qquad \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}^* = 0 \tag{1.15}$$

$$\omega^2 \rho \mathbf{H} \cdot \xi + \mathbf{H} \cdot \nabla(\gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \cdot \nabla p) - \mathbf{H}^* \cdot \nabla p = 0 \tag{1.16}$$

$$\oint \frac{1}{H} \operatorname{div} \left\{ \frac{\mathbf{H}}{H^2} \times [\omega^2 \rho \xi + \nabla(\gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \cdot \nabla p) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H}^* \times \operatorname{rot} \mathbf{H}] \right\} ds = 0 \tag{1.17}$$

2. Плазма в изменяющемся вдоль оси симметрии продольном магнитном поле. Пусть в цилиндрических координатах r, φ, z равновесное магнитное поле симметрично относительно оси z и не имеет φ-й компоненты. Можно ввести такую функцию ψ, что

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\left(\mathbf{i}_\varphi \frac{\psi}{r}\right) = -\frac{1}{r} \mathbf{i}_\varphi \times \nabla\psi, \qquad |\mathbf{i}_\varphi| = 1, \qquad (\psi)_{r=0} = 0 \tag{2.1}$$

Так как $\mathbf{H} \cdot \nabla\psi = 0$, то силовые линии лежат на поверхностях $\psi = \text{const}$, причем $2\pi\psi$ равно потоку внутри поверхности $\psi = \text{const}$. Введем криволинейные ортогональные координаты $x_1 = \psi$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = \chi$; элемент объема равен $J d\psi d\varphi d\chi$, а для коэффициентов Ламе получим [3]

$$h_1 = \frac{1}{rH}, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = JH \tag{2.2}$$

При переходе от цилиндрических координат к криволинейным можно пользоваться формулами

$$\frac{\partial r}{\partial \psi}\frac{\partial r}{\partial \chi} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial \chi} = 0$$

$$J = r\left\{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \chi}\right)^2\right]\right\}^{1/2} = \frac{r}{|\nabla\psi| \cdot |\nabla\chi|} \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{rH} = \left\{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2\right\}^{1/2} = \frac{1}{|\nabla\psi|}$$

В дальнейшем принимаем, что поле является периодичным по z с периодом $2l$. На одном элементе периодичности z, а также χ меняются от $-l$ до l. Уравнение равновесия (1.5) приводит к соотношениям [3]

$$\frac{\partial p}{\partial \chi} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{1}{4\pi J}\frac{\partial JH^2}{\partial \psi} \tag{2.4}$$

Плотность ρ будем также считать функцией от одной переменной ψ.

Рассмотрим теперь задачу устойчивости, считая, что поведение плазмы можно описывать системой уравнений одножидкостного приближения (1.1) — (1.4). Введя обозначения

$$X = rH\xi_\psi, \qquad Y = \frac{im}{r}\xi_\varphi, \qquad Z = \frac{1}{H}\xi_\chi \tag{2.5}$$

из уравнений (1.15) получим

$$H_\psi^* = \frac{1}{rJH}\frac{\partial X}{\partial \chi}, \qquad H_\varphi^* = \frac{r}{imJ}\frac{\partial Y}{\partial \chi}, \qquad H_\chi^* = -H\left(\frac{\partial X}{\partial \psi} + Y\right) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \psi} + Y - \frac{1}{m^2 JH^2}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{r^2}{J}\frac{\partial Y}{\partial \chi}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \chi}\left[JH^2\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} + Y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{1}{r^2 JH^2}\frac{\partial X}{\partial \chi}\right) = 0$$

Здесь принято, что $\xi = \xi_{(1)}(\psi, \chi)\, e^{im\varphi}$. В дальнейшем множитель $e^{im\varphi}$ опускаем.

Ограничимся изучением неустойчивостей, для которых возмущение магнитного поля $\mathbf{H}^* = 0$

$$X = X(\psi), \qquad Y = -\frac{dX}{d\psi} \tag{2.7}$$

Уравнения (2.6) удовлетворяются. Из равенства (1.16) следует

$$\gamma p \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial S}{\partial\chi}\right) + \omega^2\rho JH^2S = -\gamma p\frac{\partial^2 \ln J}{\partial\chi\partial\psi} \qquad (Z = S(\psi, \chi)X) \tag{2.8}$$

Будем рассматривать возмущения периодичные по χ с периодом $2l$. Функция S будет периодична с тем же периодом, и это обстоятельство позволяет определить произвольные постоянные при интегрировании (2.8).

Уравнение (1.17) после подстановки выражений (2.5), (2.7), (2.8) принимает вид

$$\frac{\omega^2}{m^2}\frac{d}{d\psi}\left[\langle r^2J\rangle\rho\frac{dX}{d\psi}\right] + \left\{-\omega^2\rho\left\langle\frac{J}{r^2H^2}\right\rangle + \gamma p\left\langle\frac{1}{J}\left(\frac{\partial J}{\partial\psi}\right)^2\right\rangle + \right. \tag{2.9}$$

$$\left. + \frac{dp}{d\psi}\frac{d\langle J\rangle}{d\psi} + \gamma p\left\langle\frac{\partial \ln J}{\partial\psi}\frac{\partial S}{\partial\chi}\right\rangle\right\}X = 0$$

Здесь

$$\langle A\rangle = \frac{1}{2l}\oint\frac{Ads}{JH} = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} Ad\chi \tag{2.10}$$

Функции H и J в уравнениях (2.8) и (2.9) должны удовлетворять условию равновесия (2.4). При $8\pi p \ll H^2$ они мало отличаются от соответствующего распределения при отсутствии проводящей среды. Так как в уравнениях (2.8) и (2.9) это отличие уже учтено, то нужно принять, что H и J такие, как для бессиловой конфигурации

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(JH^2) = 0 \tag{2.11}$$

Определим граничные условия для $X(\psi)$, считая, что плазменный шнур заполняет объем $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$. При $\psi = 0$ функция $X(\psi)$ должна быть ограниченной. Если при $\psi = \psi_0$ шнур опирается на стенку, то

$$(X)_{\psi=\psi_0} = 0 \tag{2.12}$$

Для находящегося в вакууме шнура граничное условие, вытекающее из непрерывности полного давления на возмущенной поверхности шнура, можно получить непосредственно из уравнения (2.9). Пусть в тонком приграничном слое $\psi_0 - \delta \leqslant \psi \leqslant \psi_0$ плотность ρ и давление p резко меняются от некоторых конечных значений до нуля. Толщину слоя считаем малой ($\delta \ll \psi_0$), тем не менее предполагаем, что условие применимости магнитогидродинамического приближения в слое не нарушается. В этом слое $dX / d\psi$ сильно меняется, а $X(\psi)$ близко к постоянной. Функции J и H и их производные по ψ ввиду (2.9) в слое будут заданными величинами. Интегрируя (2.10), получим (при $\psi_0 - \delta \leqslant \psi \leqslant \psi_0$)

$$\left\{\frac{\omega^2\rho}{m^2}\langle r^2J\rangle\frac{dX}{d\psi} + p\frac{d\langle J\rangle}{d\psi}X\right\}_{\psi=\psi_0-\delta} = 0 \tag{2.13}$$

Здесь постоянная интегрирования принята равной нулю, так как вне слоя $p = 0$, $\rho=0$. Задача свелась к нахождению ω, для которых имеются решения (2.8), (2.9), удовлетворяющие (2.12) или (2.13) и условию ограниченности X в нуле. Для неустойчивых колебаний $\omega^2 < 0$.

3. Устойчивость тонкого плазменного шнура. Рассмотрим равновесную конфигурацию, для которой характерный диаметр плазменного шнура $2r_0$ много меньше длины одного элемента периодичности $2l$. Продольное магнитное поле будет близко к однородному, а функция $\psi(r)$ приблизительно пропорциональна r^2. Будем искать решение (2.3), (2.11) в виде рядов по степеням малого параметра r_0^2 / l^2. Если формально написать

$$r = \sqrt{\psi}\,[b(\chi) + \psi b_1(\chi) + \ldots], \qquad z = \chi - \psi b_2(\chi) + \ldots$$

то из (2.3) и (2.11) получим

$$r = b\sqrt{\psi}\,[1 - {}^1/_8\psi(b'^2 + bb'')], \qquad z = \chi - {}^1/_2\psi bb' \tag{3.1}$$

$$H = 2b^{-2}(1 + {}^1/_2\psi bb''), \qquad J = {}^1/_2 b^2\ (1 - \psi bb'')$$
$$r^2 H = 2\psi\,[1 - {}^1/_4\psi(b'^2 - bb'')] \tag{3.2}$$

Здесь $\psi b'^2 \sim r^2 / l^2$ — малый параметр, отброшены величины порядка $\psi^2 b'^4$, а штрихи обозначают дифференцирование по χ.

Подставим разложения (3.1) и (3.2) в уравнения (2.9), (2.10). Из (2.9) видно, что функция S порядка $b^3 b'$, поэтому в уравнении (2.10) член с $\partial S / \partial\chi$ можно опустить. В результате получим

$$\psi\frac{d}{d\psi}\left(\psi\rho\,\frac{dX}{d\psi}\right) - m^2\rho\left\{\frac{1}{4} - \frac{3\psi\langle b^2b'^2\rangle}{\omega^2\rho\langle b^4\rangle}\frac{dp}{d\psi}\right\}X = 0 \tag{3.3}$$

Граничное условие в случае находящегося в вакууме шнура, согласно (2.13), будет

$$\left\{\rho\psi\,\frac{dX}{d\psi} + \frac{3m^2\langle b^2b'^2\rangle}{\omega^2\langle b^4\rangle}\,pX\right\}_{\psi=\psi_0-\delta} = 0 \tag{3.4}$$

При однородном распределении температуры по сечению, когда $p(\psi)$ пропорционально $\rho(\psi)$, имеется решение (3.3) и (3.4)

$$X = \mathrm{const}\cdot\psi^{1/2m}, \qquad \omega^2 = -\frac{6m\langle b^2b'^2\rangle\,p}{\langle b^4\rangle\rho}, \quad m \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Формула для ω^2 может быть представлена через усредненные величины от r, H и радиуса кривизны R магнитной силовой линии

$$\omega^2 = \frac{2mp}{\rho}\left(\int_{-l}^{l}\frac{d\chi}{H^2}\right)^{-1}\int_{-l}^{l}\frac{d\chi}{rRH^2} \qquad \left(R \approx \frac{1}{b''\sqrt{\psi}}\right) \tag{3.6}$$

В случае вытянутого тонкого плазменного шнура интеграл, содержащий R, отрицателен, и формула (3.6) соответствует неустойчивому решению. Этот результат находится в качественном согласии с выводами работ [1,4], в которых желобковые неустойчивости изучались по аналогии с неустойчивостями других систем.

В том случае, когда плотность по сечению шнура постоянна ($p = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$ при $\psi \leqslant \psi_0$ и $p = 0$, $\rho = 0$ при $\psi \geqslant \psi_0$ решение $X(t)$ в (3.5) будет полным ограниченным в нуле решением (3.3); при этом ω^2 для единственного неустойчивого решения будет определяться формулой (3.5) (не учитываются возможные неустойчивости, возникающие при детальном исследовании структуры граничного слоя шнура). Для других типов распределений $p(\psi)$ можно выделить другие неустойчивые колебания. Некоторые такие решения будут приведены ниже.

4. Медленно развивающиеся неустойчивости. Подстановка

$$S = -\frac{\gamma p}{\rho J H^2}\frac{\partial T}{\partial \chi} \tag{4.1}$$

приводит систему (2.9), (2.10) к виду

$$\frac{\gamma p}{\rho}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{1}{JH^2}\frac{\partial T}{\partial \chi}\right) + \omega^2 JT - \frac{\omega^2 J}{\langle J\rangle}\langle JT\rangle = -J\frac{d\ln\langle J\rangle}{d\psi} + \frac{\partial J}{\partial \psi} \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{d\psi}\left\{\langle r^2 J\rangle \rho \frac{dX}{d\psi}\right\} + m^2\left\{\frac{\rho\langle r^2 J\rangle}{\omega^2} f(\psi) + \gamma p\left\langle\frac{\partial J}{\partial \psi}\left(T - \frac{\langle JT\rangle}{\langle J\rangle}\right)\right\rangle - \right.$$
$$\left. - \rho\left\langle\frac{J}{r^2 H^2}\right\rangle\right\} X = 0 \tag{4.3}$$

$$f(\psi) = \frac{1}{\rho\langle r^2 J\rangle}\frac{d\langle J\rangle}{d\psi}\left[\frac{dp}{d\psi} + \gamma p\frac{d\ln\langle J\rangle}{d\psi}\right] \tag{4.4}$$

Будем искать решение этих уравнений соответствующее неустойчивостям с малыми инкрементами (при $\omega^2 \to 0$). В уравнении (4.3) ω^2 будет малым параметром при старшей производной, поэтому возможны сильно осциллирующие решения этого уравнения, позволяющие удовлетворить любым граничным условиям. Для простоты предполагаем, что поверхность $\psi = \psi_0$ является стенкой, и справедливо граничное условие (2.12).

Полагая $X = U / \sqrt{\rho\langle r^2 J\rangle}$, приведем (4.3) к такому, в котором выделены члены, характеризующие обе особенности (при малых ω и малых ψ)

$$\frac{d^2 U}{d\psi^2} + \left\{\frac{m^2}{\omega^2} f(\psi) - \frac{m^2 - 1}{4\psi^2} + g(\psi)\right\} U = 0 \tag{4.5}$$

Здесь $g(\psi)$ — функция, ограниченная при $\omega = 0$. Используя результаты предыдущего параграфа, можно показать, что при малых ψ функции f и g пропорциональны $1/\psi$, так что (4.5) относится к типу уравнений, для которых разработана [7] теория асимптотических решений при $\omega \to 0$. Если $f(\psi)$ не близко к нулю, то ограниченное в нуле решение (4.5) будет

$$U = \left(\frac{d\eta}{d\psi}\right)^{-1/2} V\left[\frac{m^2}{\omega^2}\eta(\psi)\right] \tag{4.6}$$

$$\eta(\psi) = \left(\frac{1}{2}\int_0^{\psi}\sqrt{f(\psi)}\, d\psi\right)^2; \qquad V(x) = \Gamma(m+1)\sqrt{x}J_m(2\sqrt{x}) \qquad (m > 0)$$

В области ψ, близких к ψ_0, функция $V(x)$ пропорциональна $\sin(2\sqrt{x} - 2^{-1}m\pi - 4^{-1}\pi)$, поэтому из условия $(U)_{\psi=\psi_0} = 0$ получим $2\sqrt{m^2\omega^{-2}\eta_0} \approx \pi q$, $\eta_0 = \eta(\psi_0)$, q — большое целое число. При другом граничном условии q будет не целым, так что всегда есть решение [1]

$$\omega \approx \frac{2m\sqrt{\eta_0}}{\pi q}, \qquad q \gg |m| \qquad (m \neq 0) \tag{4.7}$$

Условием устойчивости ($\omega^2 > 0$) будет $\eta_0 \geqslant 0$ или

$$f(\psi_0) \geqslant 0 \tag{4.8}$$

что совпадает с известным критерием устойчивости, полученным в работах [1-3], если учесть, что

$$\langle J\rangle = \int_{-l}^{l} H^{-1}\, ds$$

---

[1] Для определения минимального значения параметра q необходимо провести численное интегрирование (4.3) при заданных граничных условиях.

При наличии нулей функции $f(\psi)$ в интервале $0 < \psi < \psi_0$ исследование устойчивости также может быть легко проведено. Пусть, например, $f(\psi) < 0$ при $0 < \psi < \psi_1$ и $f(\psi) < 0$ при $\psi_1 < \psi < \psi_0$, причем $f(\psi_1) = 0$, $(df / d\psi)_{\psi=\psi_1} \neq 0$. В области ψ, не близких к нулю, $f(\psi) = (\psi - \psi_1) f^*(\psi - \psi_1)$, $f^*(0) \neq 0$, и здесь асимптотическое решение можно представить в виде [7]

$$U = \left(\frac{d\zeta}{d\psi}\right)^{-1/2} \{C_+ W_+ [\omega^{-2/3} \zeta(\psi)] + C_- W_- [\omega^{-2/3} \zeta(\psi)]\}$$

$$\zeta(\psi) = \left[\frac{3m}{2} \int_{\psi_1}^{\psi} \sqrt{f(\psi)}\, d\psi\right]^{2/3}, \qquad W_\pm(x) = \sqrt{x}\, J_{\pm 1/3}\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \tag{4.9}$$

Постоянные $C_\pm$ нужно определить из условия сшивания с решением (4.6) в области $0 < \psi > \psi_1$, где одновременно справедливы оба решения и где можно использовать асимптотические формулы для функций V и $W_\pm$. Подстановка полученного решения в граничное условие (2.12) с учетом того, что в области $\psi_1 < \psi < \psi_0$ нужно пользоваться другими асимптотическими формулами для $W_\pm(x)$ (из-за изменения знака аргумента x в этой области), приводит вновь к формуле (4.7), в которой только вместо $\eta_0 = \eta(\psi_0)$ стоит $\eta_1 = \eta(\psi_1)$. Таким образом, желобковые неустойчивости возникают в том случае, когда функция $f(\psi)$ отрицательна хотя бы в некотором интервале значений ψ. Эти результаты находятся в соответствии с выводами работ [1-3]. Для случая желобковых неустойчивостей в плазме, находящейся в скрещенных магнитном и гравитационном полях, формула, аналогичная (4.7), получена в работе [8].

5. Стабилизация желобковых неустойчивостей при достаточно большой величине ларморовского радиуса ионов. Рассмотрим устойчивость тонкого плазменного шнура для случая, когда ларморовский радиус ионов a_j настолько велик, что

$$\omega \sim \frac{a_j^2}{r_0^2} \omega_j, \qquad \omega_j = \frac{eH}{Mc} \tag{5.1}$$

Здесь M и e — масса и заряд иона, ω_j — циклотронная частота ионов ($\omega_j \gg |\omega|$). При условии (5.1) возможна стабилизация желобковых неустойчивостей [4]. Уравнения магнитной гидродинамики имеют вид [9,6]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}^S) \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left\{\mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{H}{\omega_j \rho} \nabla p_j\right\} \qquad \begin{pmatrix} \rho = n_j M \\ p_j = n_j T_j \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \tag{5.4}$$

$$n_j \frac{dT_j}{dt} + (\gamma - 1) p_j \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div}\left\{\frac{\gamma p_j}{\omega_j M H} (\mathbf{H} \times \nabla T_j)\right\} = 0 \tag{5.5}$$

где $n_j = n_e$ — концентрация заряженных частиц, T_j — ионная температура, $\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}^S$ — тензор вязких напряжений, связанный следующими соотношениями с тензором $\mathbf{W}$ ($W_{ik} = \partial v_i / \partial y_k + \partial v_k / \partial y_i - (2/3)\, \delta_{ik} \operatorname{div} v$, y_i — декартовы координаты, ось y_3 — вдоль магнитного поля) [9]

$$\pi_{11} = -\pi_{22} = -\rho\nu W_{12}, \qquad \pi_{12} = \pi_{21} = {}^1/_2\, \rho\nu (W_{11} - W_{22})$$

$$\pi_{13} = \pi_{31} = -2\rho\nu W_{23}, \qquad \pi_{23} = \pi_{32} = 2\rho\nu W_{13} \tag{5.6}$$

$$\pi_{11}^S = \pi_{22}^S = -\rho\nu\omega_j\tau_j (W_{11} + W_{22}), \qquad \pi_{33}^S = -2\rho\nu\omega_j\tau_j W_{33}$$

$$\nu = \frac{1}{4} a_j^2 \omega_j = \frac{T_j}{2\omega_j M} \tag{5.7}$$

Здесь δ_{ik} — единичный тензор; τ_j — время рассеяния ионов на ионах, а невыписанные компоненты тензоров π и π^S равны нулю. Магнитное поле предполагается настолько сильным, что параметр $\omega_j\tau_j \gg 1$. Формулой (5.7) определяется вязкость плазмы, зависящая от столкновений между частицами, тогда как тензор (5.6) характеризует влияние конечной величины ларморовского радиуса ионов. Система (5.2) — (5.5) еще должна быть дополнена уравнением состояния электронного газа.

При выводе (5.3) использован закон Ома в форме [9]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\left\{\mathbf{v}\times\mathbf{H} - \frac{H}{\omega_j\rho}\left[\nabla p_j + \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{div}(\pi + \pi^S)\right]\right\} \tag{5.8}$$

Член с $\operatorname{div}\pi$ приводит к несущественным поправкам [5], инерционный член при условии $\omega_j \gg |\omega|$ также мал. В уравнении (5.3) учтен лишь член с давлением ($p_j \sim \rho a_j^2\omega_j^2$, $p_j^* \sim p_j\xi / r_0$, что сравнимо с $r_0\rho\omega_j v^*$).

Заметим, что в произвольных криволинейных ортогональных координатах x_1, x_2, x_3 имеют место формулы [10]

$$W_{ik} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{1}{h_i h_k}\left(v_i\frac{\partial h_i}{\partial x_k} + v_k\frac{\partial h_k}{\partial x_i}\right) + 2\delta_{ik}\left\{\sum_{q=1}^{3}\frac{v_q}{h_q}\frac{\partial \ln h_k}{\partial x_q} - \frac{\operatorname{div}\mathbf{v}}{3}\right\}$$

$$(\operatorname{div}\pi)_i = \frac{1}{h_i}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{h_1h_2h_3h_i}{h_k}\pi_{ik}\right) - \frac{\partial \ln h_k}{\partial x_i}\pi_{kk}\right\} \tag{5.9}$$

Здесь h_i — коэффициенты Ламе, v_i — ортогональные проекции скорости.

Будем изучать устойчивость описанного в п. 2 равновесного состояния при дополнительных предположениях, что температуры ионов и электронов однородны по сечению шнура и что длина элемента периодичности $2l$ много больше характерного диаметра шнура $2r_0$.

При условии $8\pi p \ll H^2$ из (5.2) в первом приближении получим (1.10). Это уравнение удовлетворяется, если магнитное поле остается невозмущенным. Как раз такие возмущения, являющиеся наиболее опасными, могут приводить к желобковым неустойчивостям. Из линеаризованного уравнения (5.3) при $\mathbf{H}^* = 0$ получим

$$X = X(\psi),\ Y = -\frac{dX}{d\psi} + \frac{2m\nu HT_j^*}{\omega T_j}\frac{d\ln n_j}{d\psi} \tag{5.10}$$

Здесь X, Y и Z определяются формулами (2.5). Написав уравнение (5.5) для возмущенных величин с учетом (5.10), найдем

$$\begin{gathered} -\frac{T_j^*}{(\gamma-1)T_j}\left(1 - \frac{2m\gamma\nu H}{\omega n_j J}\frac{\partial n_j J}{\partial\psi}\right) = \operatorname{div}\xi \\ \operatorname{div}\xi = \frac{\partial \ln J}{\partial\psi}X + \frac{1}{J}\frac{\partial Z}{\partial\chi} + \frac{2m\nu HT_j^*}{\omega T_j}\frac{d\ln n_j}{d\psi} \end{gathered} \tag{5.11}$$

Если порядок функции $Z(\psi, \chi)$ такой же, как при $\nu = 0$, то будет

$$\frac{\partial \ln J}{\partial\psi}X \sim \frac{1}{J}\frac{\partial Z}{\partial\chi} \sim b'^2X \sim \frac{r_0^2X}{l^2\psi_0}$$

т. е. возмущение ионной температуры мало и $\operatorname{div} \xi$ близко к нулю. С точностью до поправок порядка r_0^2 / l^2 получим

$$Y = -\frac{dX}{d\psi}, \qquad p_j^* = p_j \frac{n_j^*}{n_j}$$

Следовательно, для возмущений, не искажающих магнитного поля, при условии $r_0^2 \ll l^2$ получим вновь равенства (2.8), которые оказываются справедливыми и при $\nu \neq 0$. Существенно новые эффекты можно ожидать только из-за того, что в уравнение движения входит добавочный член $\operatorname{div}(\pi + \pi^S)$.

В связи с тем, что ионная температура в первом приближении остается невозмущенной, а обмен энергией между электронами происходит быстрее, чем между ионами, то возмущение температуры $T_j + T_e$ будет незначительным и p^* будет пропорционально ρ^*. Это значит, что справедливо уравнение (1.4) при $\gamma = 1$, впрочем зависимость от γ в рассматриваемом приближении не проявляется (см. уравнение (3.3) § 3).

Таким образом, основные уравнения принимают вид (1.16) и (1.17), в которые должны быть добавлены слагаемые с $\operatorname{div}(\pi + \pi^S)^*$ и подставлено равенство (2.8). По формулам (5.9) найдем

$$\frac{1}{2}(W_{11}^* - W_{22}^*) = i\omega\left(2\frac{dX}{d\psi} - \frac{X}{\psi}\right)$$

$$W_{12}^* = -\frac{2\omega\psi}{m}\left(\frac{d^2X}{d\psi^2} + \frac{m^2X}{4\psi^2}\right), \qquad W_{13}^* \sim W_{23}^* \sim \frac{\omega HZ}{r_0} \sim \frac{\omega X}{r_0 lH}$$

$$W_{11}^* + W_{22}^* \sim W_{33}^* \sim \frac{\omega X}{l^2 H}, \qquad (\operatorname{div}\pi)_\chi^* \sim \frac{\omega\nu\rho X}{l r_0^2 H}$$

$$(\operatorname{div}\pi)_\psi^* = \frac{\omega\nu}{mr}\left\{\frac{d}{d\psi}\left[\rho\left(4\psi^2\frac{d^2X}{d\psi^2} + m^2X\right)\right] - m^2\rho\left(2\frac{dX}{d\psi} - \frac{X}{\psi}\right)\right\}$$

$$(\operatorname{div}\pi)_\varphi^* = \frac{2i\omega\nu}{r}\left\{\frac{d}{d\psi}\left[\rho\left(2\psi\frac{dX}{d\psi} - X\right)\right] - \psi\rho\left(\frac{d^2X}{d\psi^2} + \frac{m^2X}{4\psi^2}\right)\right\}$$

Здесь для порядковой оценки функции $Z(\psi, \chi)$ было использовано уравнение, вытекающее из z-й компоненты уравнения движения (5.2); при этом было принято, что параметр $\omega\tau_j$ порядка единицы. При условии $|\omega\tau_j r_0^2/l^2| \ll 1$ компоненты $(\operatorname{div}\pi^S)_\psi^*$ и $(\operatorname{div}\pi^S)_\varphi^*$ малы и вместо (1.17) будет

$$\oint \frac{1}{H}\left\{\operatorname{div}\left[\frac{i\chi}{H}(\omega^2\rho\xi - \operatorname{div}\pi^*)\right] + \nabla(\gamma p \operatorname{div}\xi + \xi\cdot\nabla p)\cdot \operatorname{rot}\frac{i\chi}{H}\right\} ds = 0$$

Отсюда получим уравнение для $X(\psi)$ (члены, содержащие $Z(\psi, \chi)$, в это уравнение первого приближения не входят)

$$\frac{\omega^2}{m^2}\left[\frac{d}{d\psi}\left(\psi\rho\frac{dX}{d\psi}\right) - \frac{m^2\rho'}{4\psi}X\right] + Q\frac{dp}{d\psi}X - \tag{5.12}$$

$$-\frac{2\omega\nu H}{m}\left\{\frac{d}{d\psi}\left(\psi\frac{d\rho}{d\psi}\frac{dX}{d\psi}\right) - \frac{1}{2}\frac{d^2\rho}{d\psi^2}X - \frac{m^2}{4\psi}\frac{d\rho}{d\psi}X\right\} = 0$$

$$Q = \frac{3\langle b^2 b'^2\rangle}{\langle b^4\rangle} = -\left(\int_{-l}^{l}\frac{d\chi}{H^2}\right)^{-1}\int_{-l}^{l}\frac{d\chi}{rRH^2}$$

Равенство (5.12) можно записать следующим образом

$$\left(\omega^2 - 2m\omega\nu H\,\frac{d\ln\rho}{d\psi}\right)\left\{\psi\frac{d}{d\psi}\left(\psi\rho\frac{dX}{d\psi}\right) - \frac{m^2\rho}{4}\,X\right\} - \\ - 2m\omega\nu H\psi^2\rho\,\frac{d^2\ln\rho}{d\psi^2}\,\frac{dX}{d\psi} + m^2\psi\left(Q\,\frac{dp}{d\psi} + \frac{\omega\nu H}{m}\,\frac{d^2\rho}{d\psi^2}\right)X = 0 \qquad (5.13)$$

$$(\nu H = cT_j\,/\,2e = \mathrm{const})$$

Для находящегося в вакууме шнура граничное условие можно получить интегрированием (5.12), однако теперь нужно принять, что в слое $\psi_0 - \delta \leqslant \psi \leqslant \psi_0$ может резко меняться лишь производная $d\rho\,/\,d\psi$, а не $\rho\,(\psi)$. Область, где резко меняется $\rho\,(\psi)$, должна быть отнесена к внутренней области. Граничное условие запишется в виде

$$\left(\psi\frac{dX}{d\psi} - \frac{X}{2}\right)_{\psi=\psi_0-\delta} = 0 \qquad (5.14)$$

Для возмущений $m = 1$ уравнению (5.12) и условию (5.14) при любых $\rho\,(\psi)$ удовлетворяет решение (3.5). Следовательно, эти возмущения остаются нестабильными также при большой величине ларморовского радиуса ионов. Этот вывод был получен в работе [4], в которой рассматривался частный случай распределения плотности

$$\rho = \frac{\rho^\circ}{p^\circ}\,p = \rho^\circ e^{-\lambda\psi}, \qquad p^\circ,\ \rho^\circ,\ \lambda = \mathrm{const} \qquad (5.15)$$

Рассмотрим задачу устойчивости для распределения (5.15). Решение (5.13) представляется через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$X = \mathrm{const}\cdot\psi^{1/2m}\,F\,(A,\, m+1,\, \lambda\psi) \qquad (5.16)$$

$$A = \frac{m}{2} + \frac{m^2\rho^{-1}pQ - m\omega\nu H\lambda}{\omega^2 + 2m\omega\nu H\lambda} \qquad (m>0)$$

Потребуем, чтобы при больших $\lambda\psi$ функция $X\,(\psi)$ была ограниченной. Это условие, как показано в работе [11], приводит приближенно к тому же равенству, что и условие неэкспоненциального нарастания возмущений при больших $\lambda\psi$. Получим $A \approx -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ или

$$\frac{\omega}{m} = -\nu H\lambda\left(1 - \frac{1}{m+2n}\right) \pm \left\{\left[\nu H\lambda\left(1 - \frac{1}{m+2n}\right)\right]^2 - \frac{2pQ}{(m+2n)\,\rho}\right\}^{1/2} \qquad (5.17)$$

Условие устойчивости для наиболее опасных возмущений $n = 0$ будет

$$\left[\nu H\lambda\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^2 \geqslant \frac{2pQ}{m\rho} \qquad (5.18)$$

Формулы (5.17), (5.18) находятся в качественном согласии с приближенными вычислениями работы [4]. Параметр λ в них может быть выражен через значение ψ_0, характеризующее диаметр шнура ($\lambda\psi_0 \sim 1$). Величины $\nu H = cT_j\,/\,2e = \mathrm{const}$, $p\,/\,\rho = \mathrm{const}$.

Рассмотрим в заключение устойчивость относительно медленно нарастающих неустойчивостей, исследованных в § 4. Приведя уравнение (5.13) к виду (4.5), увидим, что вместо члена $f\,/\,\omega^2$, характеризующего поведение решений при $\omega \to 0$, теперь стоит $D\,(\psi)$, где

$$D\,(\psi) = \frac{Q}{\psi\rho\,(\omega^2 - 2m\omega\nu H d\ln\rho\,/\,d\psi)}\,\frac{dp}{d\psi}$$

Здесь принято, что $\omega\nu H / \psi$ в соответствии с условием (5.1) порядка ω^2, а ω^2 настолько мало, что $\omega^2 l^2 \ll p / \rho$.

Вместо (4.7) получим дисперсионное уравнение

$$m \int_0^{\psi_0} \sqrt{D(\psi)}\, d\psi \approx \pi q, \qquad q \gg |m| \qquad (m \neq 0) \qquad (5.19)$$

Для порядковой оценки вынесем подынтегральное выражение из-под интеграла при некотором промежуточном значении ψ. Тогда получим

$$\frac{\omega}{m} = \nu H \frac{d \ln \rho}{d\psi} \pm \left[\left(\nu H \frac{d \ln \rho}{d\psi}\right)^2 + \frac{\psi_0^2 Q}{\pi^2 q^2 \psi \rho} \frac{dp}{d\psi}\right]^{1/2} \qquad (5.20)$$

Здесь $dp / d\psi$ отрицательно, поэтому при $\nu = 0$ формула (5.20) определяет неустойчивое решение.

Критерий устойчивости будет

$$\left(\nu H \frac{d \ln \rho}{d\psi}\right)^2 \geqslant -\frac{\psi_0^2 Q}{\pi^2 q^2 \psi \rho} \frac{dp}{d\psi}, \qquad q \gg |m| \qquad (m \neq 0) \qquad (5.21)$$

Так как по порядку величины инкремент медленно нарастающих неустойчивостей в q раз ($q \gg 1$) меньше инкремента неустойчивости, даваемой формулой (3.6), то критерий устойчивости (5.21), менее жесткий, чем (5.18). Для рассматриваемых возмущений возможна также стабилизация неустойчивостей $m = 1$.

Поступила 4 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenbluth M. N., Longmire C. L. Stability of plasmas confined by magnetic fields. Ann.of.Phys. 1957, v. 1, 120 (Русск. пер. в сб. Пробл. совр. физики, 1958, № 1).
2. Кадомцев Б. Б. О гидродинамике плазмы низкого давления. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, Изд. АН СССР, 1958, т. 4, стр. 16.
3. Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D. and Kulsrud R. M. An energy principle for hydromagnetic stability problems. Proc. Roy. Soc., 1958, v. 244, 17. (Русск. пер. в сб. Управляемые термоядерные реакции. Атомиздат, 1960, стр. 226).
4. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. Finite larmor radius stabilization of. «Weakly» unstable confined plasmas. Nuclear fusion, 1962, Supplement — part 1, p. 143.
5. Roberts K. V., Taylor J. B. Magnetohydrodynamic equations for finite larmor radius. Phys. Rev. Letters, 1962, 8, 197.
6. Рудаков Л. И. Влияние вязкости плазмы в магнитном поле на устойчивость плазмы, Nuclear fusion, 1962, т. 2, 107.
7. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. Успехи матем. наук, 1952, т. VII, вып. 6, стр. 3.
8. Рухадзе А. А. О конвективной неустойчивости сжимаемой жидкости в магнитной гидродинамике, ПМТФ, 1963, № 3, стр. 139.
9. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, 1963, вып. 1, стр. 183.
10. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, 1951.
11. Вандакуров Ю. В. О желобковых неустойчивостях для вращающегося плазменного шнура. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, стр. 1134.