**Прикладная математика и механика. Том 28, 1964**

# О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЙ И СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

**Г. К. Пожарицкий**

(Москва)

Интуиция подсказывает, что если энергия системы рассеивается на всяком движении, а при равновесии или стационарном движении имеет изолированный минимум, то колебания системы около невозмущенного движения будут затухать.

Этот факт для системы с конечным числом степеней можно вывести из результатов работы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [1]. Некоторые проверяемые критерии рассеяния энергии на всяком движении предложены в работе [2]. Распространение результатов Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского на системы с бесконечным числом степеней свободы встречает трудности. Ниже в работе принимается ряд предположений о непрерывности возмущенной поверхности, поля скоростей и полной энергии системы, поэтому все выводы об устойчивости, которые удается сделать, носят несколько условный характер. Указанные ограничения диктуются методом доказательства; вряд ли из рассмотрения только полной энергии и ее производной можно было бы сделать более определенные выводы об устойчивости.

**1.** Рассмотрим твердое тело с полостью, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, находящейся под действием внешних сил с потенциальной энергией $V_1(q_1, q_2, \ldots)$. Идеальные связи, наложенные на тело, так же как и его координаты $q$ $(i \leqslant 6)$, положим голономными стационарными, а потенциальную энергию жидкого элемента возьмем в виде $\sigma W(X,Y,Z)d\tau$, где $XYZ$ — неподвижная система прямоугольных координат, а $\sigma$ — плотность жидкости.

Если система находится в равновесии и $V$ — потенциальная энергия системы — имеет минимум в положении равновесия, то равновесие устойчиво в смысле Ляпунова [3,4]; другими словами, пусть по любым сколь угодно малым $h$, $\sigma'$, $n$, $\varphi(N)$ можно указать такие $h_0$, $\sigma_0'$, $n_0$, что если при $t = 0$, начальные значения $r_0^2 = q_{10}^2 + \ldots + q_{n0}^2$, кинетической энергии $T_0$, удаления $N_0$, уклонения $\Delta_0$ будут удовлетворять неравенствам

$$r_0 < h_0, \qquad T_0 < \sigma_0', \qquad N_0 < n_0, \qquad \Delta_0 \geqslant \varphi(N_{\text{в}}) \tag{1.1}$$

то будут выполняться неравенства

$$r < h, \qquad T < \sigma', \qquad N < n, \qquad \Delta \geqslant \varphi(N) \tag{1.2}$$

во все время движения или по крайней мере до тех пор, пока не нарушится неравенство $\Delta \geqslant \varphi(N)$, где $\varphi(N)$ — некоторое возможное уклонение. Предположим, что оно не нарушается, т. е. все последние неравенства выполняются во все время движения

Производная от полной энергии $E$ по времени удовлетворяет уравнению

$$\frac{dE}{dt} = -\int_D \Phi\, d\tau$$

при условии, что относительная скорость жидкости равна нулю на смоченной поверхности полости, а напряжение на свободной границе перпендикулярно к ней и постоянно.

Здесь $\Phi$ — диссипативная функция вязкой жидкости, взятая в форме Навье — Стокса, а $D$ — область, занятая жидкостью. Совокупность состояний системы, удовлетворяющих неравенствам (1.1), будем называть областью $H_0$, а для неравенств (1.2) — областью $H$.

Пусть $\varphi(x, y, z, t) = 0$ — уравнение свободной поверхности в подвижной системе координат $xyz$, связанной с твердым телом и совпадающей в положении равновесия с неподвижной. Пусть также вектор $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ представляет поле скоростей жидкости относительно тела с компонентами $u, v, w$ по осям $x, y, z$ и пусть по заданным начальным условиям $\varphi_0(x, y, z, 0) = 0$, $\mathbf{V}(x, y, z, 0)$, $q_{i0}$, $\dot{q}_{i0}$ дальнейшее движение определяется единственным образом.

Совокупность функций $\varphi(x, y, z, t) = 0$, $u, v, w$ и величин $q_i$, $\dot{q}_i$ будем называть состоянием системы и обозначим через $M$, начальное состояние будем обозначать через $M_0$, а начальное состояние, отвечающее нулевому полю относительных скоростей,— через $M_{00}$. Относительную кинетическую энергию жидкости обозначим через $T_r$. Рассмотрим поверхность равновесия $W(X, Y, Z) = \alpha_0$ и введем в ее окрестности криволинейные координаты при помощи замены

$$\lambda = \lambda(x, y, z), \qquad \nu = \nu(x, y, z), \qquad \tau = W(x, y, z)$$

непрерывной в окрестности $W(x, y, z) = \alpha_0$ и допускающей непрерывную обратную. Пусть, кроме того, уравнение стенки полости $S$ есть $\nu(x, y, z) = \beta_0 = \mathrm{const}$, а уравнение любой свободной поверхности представимо в виде $\tau - \alpha_0 = \varkappa(\lambda, \nu, t)$. Введем две системы предположений.

Предположение 1.1) будет состоять из двух частей.

1.1.1) Функция $\varkappa(\lambda, \nu, t)$ непрерывна по $\lambda, \nu$ равномерно для всех $t > 0$; т. е. по любым $\delta$, $M_0$ найдется $\varepsilon(\delta, M_0)$ такое, что из неравенства $(\lambda - \lambda')^2 + (\nu - \nu')^2 < \varepsilon(\delta, M_0)$ будет следовать неравенство $\varkappa(\lambda, \nu, t) - \varkappa(\lambda', \nu', t)| < \delta$ при всех возможных парах $(\lambda, \nu)$, $(\lambda', \nu')$ из области $[W(x, y, z) = \alpha_0$, внутри $S]$ и при всех $t > 0$.

1.1.2) По любым $\delta$, $t^*$, $M_{00}$ найдется такая постоянная $\gamma(\delta, t^*, M_{00})$, что если в начальный момент выполняются неравенства

$$|\varkappa(\lambda, \nu, 0) - \varkappa'(\lambda, \nu, 0)| < \gamma$$
$$K = \sum [(q_{i0} - q_{i0}')^2 + (\dot{q}_{i0} - \dot{q}_{i0}')^2] + T_r' + \int_{D_0'} \Phi' \, d\tau < \gamma$$

(где $\varkappa$, $q_{i0}$, $\dot{q}_{i0}$ отвечают состоянию $M_{00}$, а $\varkappa'$, $q_{i0}'$, $\dot{q}_{i0}'$, ... — состоянию $M_0'$), то при $t = t^*$ выполняется неравенство

$$|E(M_{00}, t^*) - E(M_0', t^*)| < \delta \tag{1.3}$$

Предположение 1.2) также будет состоять из двух частей. 1.2.1) Функция $\varkappa(\lambda, \nu, t)$, а также компоненты вектора $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ равномерно непрерывны.

1.2.2) Предположим, что из неравенств

$$\mathbf{V}'^2(x, y, z, 0) < \gamma, \qquad |\varkappa(\lambda, \nu, 0) - \varkappa'(\lambda, \nu, 0)| < \gamma, \qquad K < \gamma$$

следует неравенство (1.3). Здесь $\mathbf{V}'(x, y, z, 0)$ — поле скоростей, соответствующее состоянию $M_0'$.

*Теорема* 1.1. Пусть потенциальная энергия системы имеет минимум в положении равновесия, а область $H$ не содержит движений жидкости и твердого тела как целого $\mathbf{V} \equiv 0$ и пусть выполнены предположения 1.1); тогда $T + r^2 + N^2 \to 0$ при $t \to \infty$. Если вместо предположений 1.1) выполнены предположения 1.2), то $T + r^2 + N^2 \to 0$ при $t \to \infty$ и, кроме того, $\mathbf{V}^2(x, y, z, t) \to 0$ при $t \to \infty$.

*Доказательство*. Предположим от противного, что выполняются условия теоремы, а также предположения 1.1), но все же $\lim E = E^* > 0$ при $t \to \infty$. Интеграл

$$\int_0^\infty \int_D \Phi\, d\tau\, dt$$

сходится; следовательно, найдется такая последовательность моментов $t_1, \ldots, t_k, \ldots$, что последовательность

$$\int_{D_k} \Phi_k\, d\tau \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

Полагая обычное условие $\mathbf{V} = 0$ на границе, на основании известного интегрального неравенства [5] можно установить, что последовательность $T_r(t_k) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим последовательность «точек» $\mu_k$ с «координатами»

$$\left[q_i(t_k),\ q_i^{\cdot}(t_k),\ \tau - \alpha_0 = \varkappa(\lambda, \nu, t_k),\ T_r(t_k),\ \int_{D_k} \Phi_k\, d\tau\right]$$

Так как последовательность $\varkappa(\lambda, \nu, t_k)$ равномерно ограничена ($N < n$) и равностепенно непрерывна, то по теореме Арцела можно выбрать подпоследовательность $\mu_l$, сходящуюся в точке $\mu^*$, с координатами $[q_i^*, q_i^{\cdot *}, \tau - \alpha_0 = \varkappa^*(\lambda, \nu), 0, 0]$. В силу непрерывной зависимости полной энергии от координат точки $\mu_l$ следует, что $E(\mu^*) = E^*$.

Выберем начальные условия в точке $\mu^*$. Так как, согласно предположению, движений, вдоль которых $\Phi \equiv 0$ не существует, то найдется такое $t^*$, что $E(\mu^*, t^*) < E^*$. В силу предположения 1.1.2) для любого $\delta$, сколь угодно малого, можно найти число $L(\delta)$ такое, чтобы при всех $l > L$ выполнялось неравенство $|E(\mu_l, t^*) - E(\mu^*, t^*)| < \delta$, но это противоречит предположению $\lim E = E^*$ при $t \to \infty$.

Доказательство при предположениях 1.2) отличается от приведенного только тем, что точки $\mu_k$ будут иметь координаты

$$\left(q_i,\ q_i^{\cdot},\ \tau - \alpha_0 = \varkappa(\lambda, \nu, t_k),\ u(x, y, z, t_k),\ v, w,\ \int_{D_k} \Phi(t_k)\, d\tau\right)$$

Из равномерной непрерывности компонент вектора $\mathbf{V}$ и ограниченности $T_r$ легко доказать ограниченность $u, v, w$. Следовательно, можно выбрать сходящуюся последовательность функций $u_l, v_l, w_l$, причем они необходимо будут сходиться к нулям. Далее доказательство аналогично.

Итак, при выполнении предположений 1.1) или 1.2) и остальных условий теоремы полная энергия $E \to 0$ при $t \to \infty$, но отсюда следует, что $T + T_r + r^2 + \Delta^2 \to 0$ при $t \to \infty$. Из условия $\Delta \geqslant \varphi(N)$ следует, что $\varphi(N) \to 0$ при $t \to \infty$, а с ним и $N \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, $T + r^2 + N^2 \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть теперь выполняются предположения 1.2), покажем, что при этом поле скоростей $\mathbf{V}^2(x, y, z, t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В силу предположения 1.2) по любым $\delta$, $M_0$ найдется такая $\gamma(\delta, M_0)$, что из неравенства $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 < \gamma^2$ следует $|\mathbf{V}^2(x, y, z, t) - \mathbf{V}^2(x', y', z', t)| < \delta$ при всех $t > 0$ и всех точках $(x, y, z)$, $(x', y', z')$, лежащих внутри жидкости. Если $\mathbf{V}^2(x, y, z, t)$ не исчезает при $t \to \infty$, то найдется такая постоянная $\varepsilon(M_0)$, что при любом $A > 0$ найдется точка $x^*, y^*, z^*$, и момент $t^* > A$, что $\mathbf{V}^2(x^*, y^*, z^*, t^*) > \varepsilon$.

Возьмем $\delta < {}^1/_2\varepsilon$ и найдем $A$ такое, чтобы при $t > A$ удаление $N$ не превосходило ${}^1/_{10}\varepsilon$. Так как в качестве удаления можно взять удаление от «замороженной» поверхности $W(x, y, z) = \alpha_0$, выберем его именно так и построим две поверхности $W = C$, удаление точек которых от поверхности $W = \alpha_0$ не превосходит ${}^1/_5\gamma$. Пусть они имеют уравнения $W(x, y, z) = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $W(x, y, z) = \alpha_0 - \Delta\alpha$. Если поверхность $W = \alpha_0$ пересекает полость $S$ под ненулевым углом, то нижняя грань объема, вырезаемая шариком радиуса $\gamma$ (при передвижении его центра по «верхней» поверхности $W = \alpha_0 + \Delta\alpha$) из области ($W < \alpha_0 - \Delta\alpha$, внутри $S$) будет отлична от нуля. Обозначим ее через $m'$. Отсюда следует, что масса жидкости, захваченная, шариком радиуса $\gamma$, будет заведомо не меньше $\sigma m'$ при любом $t > A$.

Это значит, что внутри шара $(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2 + (z^* - z')^2 < \gamma^2$ выполнено неравенство $\mathbf{V}^2(x', y', z', t^*) > {}^1/_2\varepsilon$, а относительная кинетическая энергия массы, заключенной в этом шаре, $T_\varepsilon > {}^1/_2\varepsilon\sigma m'$, что противоречит соотношению $T_r \geqslant T_\varepsilon \to 0$ при $t \to \infty$.

Это противоречие доказывает, что $\mathbf{V}^2(x, y, z, t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Справедливо также и положение, обратное теореме 1.1.

*Теорема* 1.2. Если $V$ может принимать отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности положения равновесия, область $H$ не содержит движений твердого тела и жидкости как одного целого, и выполняется одно из предположений 1.1) или 1.2), то равновесие неустойчиво.

*Доказательство* аналогично. Пусть $E_0 < 0$ и существует предел $E^* < 0$, но состояние $M$ все время лежит в области $H$. Проводя рассуждения по той же схеме, получим противоречие.

2. С аналогичной задачей встречаемся, если $W = W(X^2 + Y^2, Z)$, а изменение $q_n$ — циклической координаты системы, приводит к повороту системы, как твердого тела, вокруг оси $Z$.

Пусть $J$ — момент инерции системы вокруг оси $Z$ и пусть $V$ — потенциальная энергия системы, а $k_0$ — момент количества движения системы вокруг этой оси. Стационарное вращение находится из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{k_0^2}{2J^2}\frac{\partial J}{\partial q_i} = 0 \qquad (2.1)$$

при условии, что свободная поверхность жидкости имеет уравнение

$$F_1 = W(X^2+Y^2, Z) - \frac{k_0^2}{2J^2}(X^2+Y^2) = \alpha_0 = \text{const} \tag{2.2}$$

Пусть стационарное движения отвечает нулевым значениям координат $q_1, \ldots, q_{n-1}$, а свободная поверхность $F_1 = \alpha_0$ при стационарном движении пересекает поверхность полости $S$ так, что нормаль $n_1(m)$ к поверхности $F_1 = \alpha_0$ в точке $m$ линии пересечения с полостью и нормаль $n_2(m)$ к поверхности $S$ всюду составляют между собой угол $\theta(m)$, лежащий в пределах $\pi > \theta_2 > \theta(m) > \theta_1 > 0$. Пусть также нормали $n_1$ и $n_2$ непрерывны, а значение постоянной $\alpha_0$ не является экстремальным из всех значений, которые может принимать $F_1$ в окрестности $F_1 = \alpha_0$. В этих предположениях можно показать [6], что потенциальная энергия системы и ее момент инерции вокруг оси Z при условии, что ее жидкая поверхность относится к семейству (2.2) суть однозначные и дифференцируемые непрерывно до второго порядка функции от $q_1, \ldots, q_{n-1}$ при любых $k^2$, достаточно близких к значению $k_0^2$ на стационарном движении. Обозначим эти функции через $V''$, $J''$.

В работе [6] показано, что функционал измерений потенциальной энергии

$$\Pi = V + k_0^2 / J$$

будет иметь минимум на стационарном движении, если квадратичная форма

$$\delta^2\Pi'' = \sum_{ij=1}^{n-1} q_i q_j \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}\left[V'' + \frac{k_0^2}{J''}\right] \tag{2.3}$$

(где производные вычислены при нулевых значениях координат) есть форма определенно положительная, и функционал $\Pi$ сможет принимать отрицательные значения, если такие значения может принимать квадратичная форма. Пусть она определенно положительна, тогда ее дискриминант больше нуля, и в окрестности нуля существует непрерывное решение уравнений (2.1) $q_i = q_i(k^2)$. Если квадратичная форма (2.3) определенно положительна при $k^2 = k_0^2$ и вторые производные, входящие в ее коэффициенты, непрерывны по отношению к величинам $q_i$, то она останется определенно положительной, если вторые производные взять при любых $q_i(k^2)$, численно достаточно малых.

Если $\Pi$ имеет минимум, то стационарное движение устойчиво [7] и по любым $h$, $\sigma'$, $n$, $d_0$, $\varphi(N)$, сколь угодно малым, можно указать такие $h_0$, $\sigma_0'$, $n_0$, $d_0$, что если в начальный момент выполняются неравенства

$$r_0 < h_0, \qquad T_{10} < \sigma_0', \qquad N_0 < n_0, \qquad k^2 - k_0^2 = \delta k^2 < d_0$$
$$\Delta_0 \geqslant \varphi(N_0) \tag{2.4}$$

то будут выполняться неравенства

$$r < h, \qquad T_1 < \sigma', \qquad N < n, \qquad \delta k^2 < d_0, \qquad \Delta \geqslant \varphi(N) \tag{2.5}$$

во все время движения, если во все время движения не нарушается неравенство $\Delta \geqslant \varphi(N)$. Предположим, что оно не нарушается. Здесь $T_1$ — кинетическая энергия системы по отношению к системе отсчета, вращающейся вокруг оси $Z$, с переменной угловой скоростью $\omega = k \mid J$.

Пусть $H_0$, $H$ суть области, где выполняются неравенства (2.4), (2.5) для движения, отвечающего значению $k_0^2$, а $H_0'$ и $H'$ — области, отвечающие стационарному движению $q_i = q_i(k_0^2 + \delta k^2)$. Если $H_0$ выбрать достаточно малой, то любое движение, начавшееся в области $H_0$, можно считать начавшимся в области $H_0'$ и рассматривать как возмущенное около стационарного движения $q_i(k_0^2 + \delta k^2)$ при условии, что $k_0^2 + \delta k^2$ не возмущается.

Пусть система получила возмущение и пусть $r'$, $T_1'$, $N'$, ... — те же самые величины, что и в (2.4), но взятые для невозмущенного движения $q_i(k_0^2 + \delta k^2)$ и поверхности равновесия в этом соседнем стационарном движении. Без каких-либо изменений в схеме рассуждений, приведенной выше, получим теоремы.

*Теорема* 2.1. Если минимум П узнается по квадратичной форме (2.3), область $H$ не содержит движений твердого тела и жидкости, как целого, отличных от движений $q_i(k_0^2 + \delta k^2)$, и выполняется одно из предположений 1.1) или 1.2), то $T_1' + r'^2 + N'^2 \to 0$ при $t \to \infty$, а в случае выполнения предположения 1.2), кроме того, квадрат скорости $\mathbf{V}^2(x, y, z, t) \to 0$ при $t \to \infty$.

*Теорема* 2.2. Если П при $\delta k^2 = 0$ может принимать отрицательные значения, при $\delta k^2 = 0$ нет движений твердого тела и жидкости как целого, целиком лежащих в области $H$ и выполняется одно из предположений 1.1) или 1.2), то стационарное вращение неустойчиво.

3. Приступим теперь к анализу условий, при которых возможны движение твердого тела и жидкости как целого.

Пусть некоторая точка твердого тела (полюс) имеет ускорения $a_x$, $a_y$, $a$ вдоль осей $x$, $y$, $z$ и пусть $p'$, $q'$, $r'$ — компоненты угловой скорости тела по этим осям. Если твердое тело и жидкость движутся как целое, то внутри жидкости необходимо выполняются уравнения

$$\begin{gathered}
a_x + q^{\cdot\prime} z - r^{\cdot\prime} y + p'(p'x + q'y + r'z) - \omega^2 x + \partial W / \partial x = -\partial p / \partial x \\
a_y + r^{\cdot\prime} x - p^{\cdot\prime} z + q'(p'x + q'y + r'z) - \omega^2 y + \partial W / \partial y = -\partial p / \partial y \\
a_z + p^{\cdot\prime} y - q^{\cdot\prime} x + r'(p'x + q'y + r'z) - \omega^2 y + \partial W / \partial z = -\partial p / \partial z
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $p(x, y, z, t)$ — давление, а $\omega^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$. Предполагая вторые смешанные производные давления по $x$, $y$, $z$ непрерывными и сравнивая их, получаем $p^{\cdot\prime} = q^{\cdot\prime} = r^{\cdot\prime} = 0$, т. е. проекции угловой скорости на продвижение оси постоянны.

Выбирая ось $z$ вдоль угловой скорости, получаем

$$\psi^{\cdot} \sin\theta \sin\varphi + \theta^{\cdot} \cos\varphi = 0, \qquad \psi^{\cdot} \sin\theta \cos\varphi - \theta^{\cdot} \sin\varphi = 0$$

$$\psi^{\cdot} \cos\theta + \varphi^{\cdot} = \omega_0$$

где $\psi$, $\varphi$, $\theta$ — углы Эйлера.

Если $\theta(0) \neq 0$, а это всегда можно сделать, то $\psi^{\cdot} = \theta^{\cdot} = 0$, т. е. вектор угловой скорости имеет постоянное направление в абсолютном пространстве [8]. Интегрируя (3.1), получим

$$-p = W - {}^1/_2\, \omega^2 (x^2 + y^2) + a_x x + a_y y + a_z z$$

Для того чтобы свободная поверхность могла оставаться в покое по отношению к телу, нужно, чтобы существовала такая постоянная $c'$, чтобы из условия $p(x, y, z, 0) = c'$ следовало $p(x, y, z, t) = \lambda(t)$ для всех $x, y, z$.

Рассмотрим случай однородного поля.

Пусть на жидкость действует однородное поле и пусть $X_0, Y_0, Z_0$ суть координаты некоторой точки твердого тела (полюса) в неподвижной системе, тогда

$$X - X_0 = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \qquad Y - Y_0 = x \sin \omega t + y \cos \omega t$$
$$Z - Z_0 = z$$

если неподвижная ось $Z$ взята параллельно вектору $\omega$.

Беря $W$ для однородного поля в форме

$$W = AX + BY + CZ$$

где $A, B, C$ — постоянные, получим

$$\begin{aligned} -p = A[x\cos\omega t - y\sin\omega t + X_0] + B[x\sin\omega t + y\cos\omega t + Y_0] + \\ + C[z + Z_0] - {}^1/_2\,\omega^2(x^2+y^2) + [X_0^{\cdot\cdot}\cos\omega t + Y_0^{\cdot\cdot}\sin\omega t] + \\ + [-X_0^{\cdot\cdot}\sin\omega t + Y_0^{\cdot\cdot}\cos\omega t]\, y + Z_0^{\cdot\cdot} z \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Обозначая через $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ — начальные значения величин $X_0, Y_0, Z_0, X_0^{\cdot\cdot}, Y_0^{\cdot\cdot}, Z_0^{\cdot\cdot}$, получаем, что при $t = 0$

$$-p(x, y, z, 0) = (A + A_2)x + (B + B_2)y + (C + C_2)z - {}^1/_2\,\omega^2(x^2 + y^2)$$

Полагая начало подвижной системы на свободной поверхности, получим $p_0 = c'$. Отсюда имеем

$$(C + C_2)z + p_0 = {}^1/_2\,\omega^2(x^2 + y^2) - (A + A_2)x - (B + B_2)y$$

при $\omega \neq 0$ получим, подставляя в (3.2)

$$Z_0 = {}^1/_2\, C_2 t^2 + C't + C''$$
$$(A + X_0^{\cdot\cdot})\cos\omega t + (B + Y_0^{\cdot\cdot})\sin\omega t = A + A_2$$
$$-(A + X_0^{\cdot\cdot})\sin\omega t + (B + Y_0^{\cdot\cdot})\cos\omega t = B + B_2$$

Решая эти уравнения, имеем

$$X_0^{\cdot\cdot} = (A + A_2)\cos\omega t - (B + B_2)\sin\omega t - A$$
$$Y_0^{\cdot\cdot} = (A + A_2)\sin\omega t + (B + B_2)\cos\omega t - B$$
$$X_0 = -\omega^{-2}(A + A_2)\cos\omega t + \omega^{-2}(B + B_2)\sin\omega t - {}^1/_2\, At^2 + A't + V$$
$$Y_0 = -\omega^{-2}(A + A_2)\sin\omega t - \omega^{-2}(B + B_2)\cos\omega t - {}^1/_2\, Bt^2 + B't + B''$$

В понятных обозначениях они примут вид

$$X_0 = \lambda^\circ \sin(\omega t + \varphi_0) - {}^1/_2\, At^2 + A't + A''$$
$$Y_0 = \lambda^\circ \cos(\omega t + \varphi_0) - {}^1/_2\, Bt^2 + B't + B''$$

Беря полюс на мгновенной винтовой оси при $t = 0$ по отношению к системе, движущийся поступательно по закону

$$X_0' = -\tfrac{1}{2}At^2 + A't + A'', \qquad Y_0' = -\tfrac{1}{2}Bt^2 + B't + B''$$
$$Z_0' = \tfrac{1}{2}C_2t^2 + C't + C''$$

(где $X_0'$, $Y_0'$, $Z_0'$ — координаты начала системы $X'$, $Y'$, $Z'$ по отношению к неподвижной системе), получаем $\lambda^\circ = 0$.

Отсюда следует, что в однородном поле при $\omega \ne 0$ полюс может двигаться так, что в системе отсчета $X'$, $Y'$, $Z'$ тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси.

Заметим, что поле внешних сил и сил инерции в этой системе параллельно оси вращения и однородно.

Пусть $\omega = 0$, тогда, не умаляя общности, можно положить $A = B = 0$. В этом случае

$$X_0^{\cdot\cdot} = A_2\frac{C + Z_0^{\cdot\cdot}}{C + C_2}, \qquad Y_0^{\cdot\cdot} = B_2\frac{C + Z_0^{\cdot\cdot}}{C + C_2}$$

причем $Z_0^{\cdot\cdot}$ в этом случае произвольно. Интегрируя, имеем

$$X_0 = \frac{A_2C}{C + C_2}\frac{t^2}{2} + A't + A'' + \frac{A_2Z_0}{C + C_2}$$
$$Y_0 = \frac{B_2C}{C + C_2}\frac{t^2}{2} + B't + B'' + \frac{B_2Z_0}{C + C_2}$$

По отношению к системе $X''$, $Y''$, $Z''$, движущейся поступательно с осью $Z''$ параллельной оси $Z$, и началом, движущимся по отношению к неподвижной системе по закону

$$X_0'' = \frac{A_2C}{C + C_2}\frac{t^2}{2} + A't + A'', \qquad Y_0'' = \frac{B_2C}{C + C_2}\frac{t^2}{2} + B't + B'', \qquad Z_0'' = 0$$

тело двигается поступательно и прямолинейно по любому закону. Следует отметить, что поле массовых сил в сумме с силами инерции, взятыми для этой системы, однородно и направлено вдоль прямой, по которой движется тело. Это верно, конечно, только для движений, при которых не возникают растягивающие напряжения, т. е. $p \geqslant 0$ при всех $x$, $y$, $z$ внутри жидкости и при всех $t > 0$.

Поступила 16 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1961, XXV, вып. 4.
3. Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., Изд. АН СССР, т. 111.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости равновесия твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 2.
5. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехтеоретиздат, 1952.
6. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. XXVI, вып. 1.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
8. Жуковский Н. Е. Собр. соч. ОНТИ НКТП СССР, 1937.