

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев
(Горький)

Показывается, что уравнения движения системы с нелинейной неголономной связью, полученные Гамелем, не описывают ее поведение, если учесть, что она является предельным случаем неголономной системы с линейными связями.

Выводу уравнений движения механических систем с нелинейными неголономными связями посвящено значительное число работ [1-4]. Систематическое развитие методов аналитической механики для неголономных систем с нелинейными связями содержится в работах Л. Ионсена [1], Г. Гамеля [4], Н. Г. Четаева [3], В. С. Новоселова¹. Несмотря на то что в свое время имела место оживленная дискуссия, в которой принимали участие П. Аппель [2], П. Деласю [5], Н. Беген [6] и другие, по поводу возможности реализации нелинейных неголономных связей, эти работы по существу не содержат примеров систем с нелинейными идеальными неголономными связями, существенно отличающихся от примера П. Аппеля, указанного им в 1911 г.

К примеру Аппеля проявили интерес многие авторы [4-6]. Этот пример, в частности, был подробно рассмотрен Гамелем, который составил для него уравнения движения, исходя из общепринятого определения виртуальных перемещений для систем с нелинейными неголономными связями.

Ниже показывается, что более корректный подход к исследованию системы в примере Аппеля — Гамеля приводит к движениям, которые не описываются уравнениями, полученными Гамелем.

§ 1. Пример Аппеля — Гамеля. Уравнения движения и постановка задачи. В работах П. Аппеля [2] и Г. Гамеля рассматривалась неголономная система, изображенная на фиг. 1. Грузик массы m висит на нити, перекинутой через блоки и намотанной на барабан радиуса b . Барабан скреплен с колесом радиуса a , которое катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, соприкасаясь с ней в точке B . Ножки рамы, поддерживающей блоки и сохраняющей плоскость колеса вертикальной, скользят по горизонтальной плоскости без трения. Пусть X, Y — координаты точки B (касания), θ — угол между плоскостью колеса и осью ox (фиг. 1), φ — угол собственного вращения колеса, x, y, z — координаты массы m . Из фиг. 1 следует, что

$$dz = b d\varphi \quad (b > 0) \quad (1.1)$$

Координаты X, Y и x, y связаны соотношениями

$$x = X + \rho \cos \theta, \quad y = Y + \rho \sin \theta \quad (1.2)$$

Условие качения без проскальзывания приводит к уравнениям неголономной связи

$$dX = a d\varphi \cos \theta, \quad dY = a d\varphi \sin \theta \quad (1.3)$$

¹ В. С. Новоселов. Некоторые вопросы неголономной механики. Докторская диссертация, Москва, 1958.

Обозначим через m_1, A, C массу и центральные моменты инерции колеса и, пренебрегая массой рамы, составим функцию Лагранжа систем

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 - mgz$$

В переменных φ, θ получим следующие уравнения движения системы:

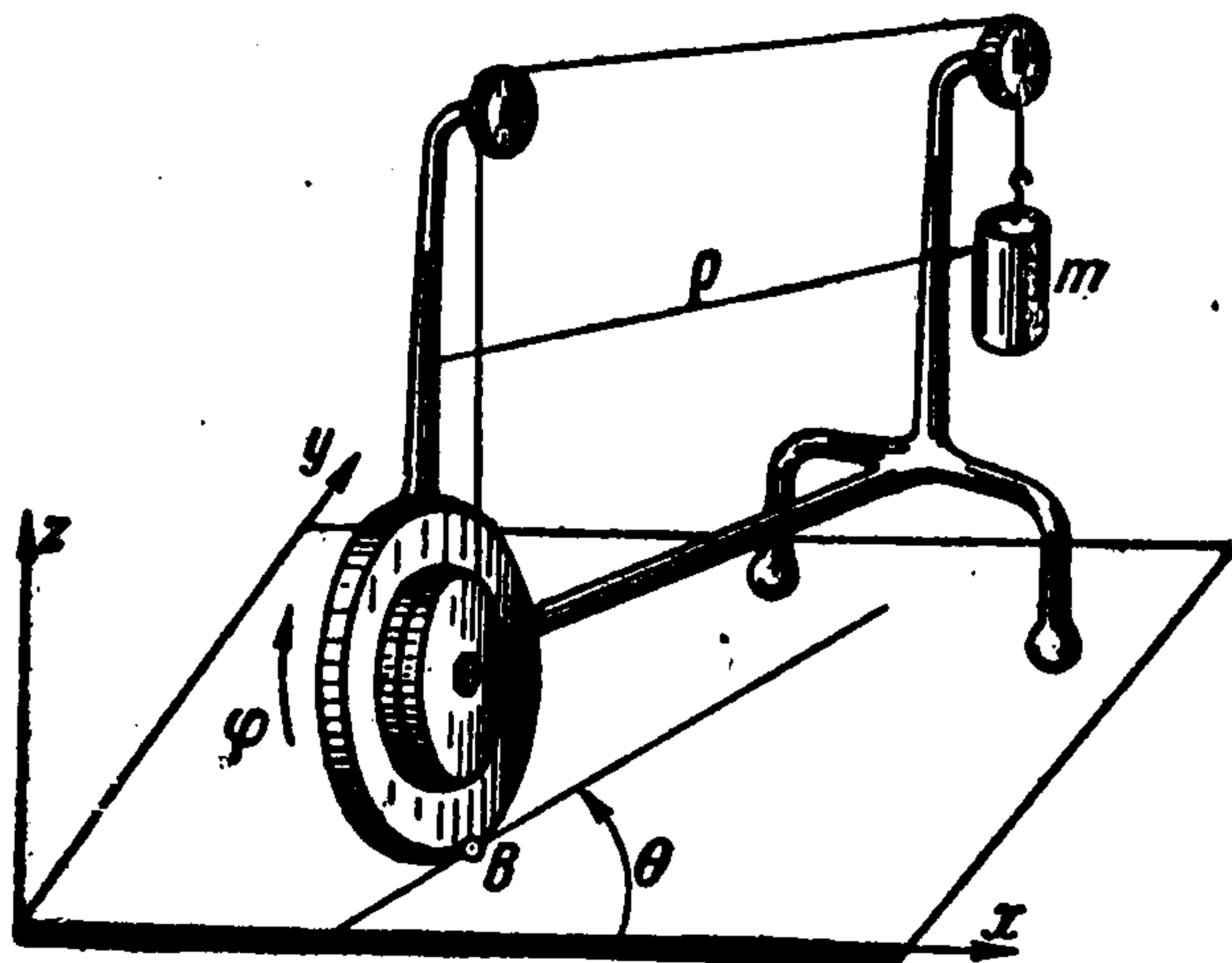
$$\begin{aligned} (A + m\rho^2) \theta'' + m a \rho \theta' \varphi' &= 0 \\ [(m + m_1) a^2 + m b^2 + C] \varphi'' - m a \rho \theta'^2 &= - m g b \end{aligned} \quad (1.4)$$

Следуя Гамелю, пренебрежем массой колеса ($m_1 = A = C = 0$), тогда вместо (1.4) получим уравнения

$$\rho \theta'' + a \theta' \varphi' = 0, \quad (a^2 + b^2) \varphi'' - a \rho \theta'^2 = - g b \quad (1.5)$$

которые вместе с линейными неголономными связями (1.3) описывают движение по инерции рассматриваемой системы.

Уравнения (1.1) — (1.5) совпадают с приведенными в книге Г. Гамеля [4] для случая движения по инерции. Приведенные в книге Г. Гамеля рисунки соответствуют случаю $\rho < 0$. В дальнейшем случай $\rho > 0$ и случай $\rho < 0$ будут рассмотрены отдельно. Систему, движение которой опи-



Фиг. 1

сывается уравнениями (1.3) и (1.5), в дальнейшем будем называть невырожденной.

Уравнения движения неголономной системы с нелинейными связями Г. Гамель получает, полагая $\rho \rightarrow 0$.

При $\rho \rightarrow 0$ из (1.5) следует

$$\theta' = 0, \quad (a^2 + b^2) \varphi'' = - g b \quad (1.6)$$

Перейдем теперь к переменным x, y, z . Из (1.3) и (1.2) при $\rho \rightarrow 0$ имеем

$$\dot{x} = a \dot{\varphi} \cos \theta, \quad \dot{y} = a \dot{\varphi} \sin \theta \quad (1.7)$$

Исключая из этих уравнений переменные φ, θ при помощи (1.1) и используя соотношение

$$\dot{x} \ddot{y} - \dot{x}' \ddot{y}' = z'^2 \theta'$$

которое получается из (1.7), приходим к нелинейному уравнению неголономной связи

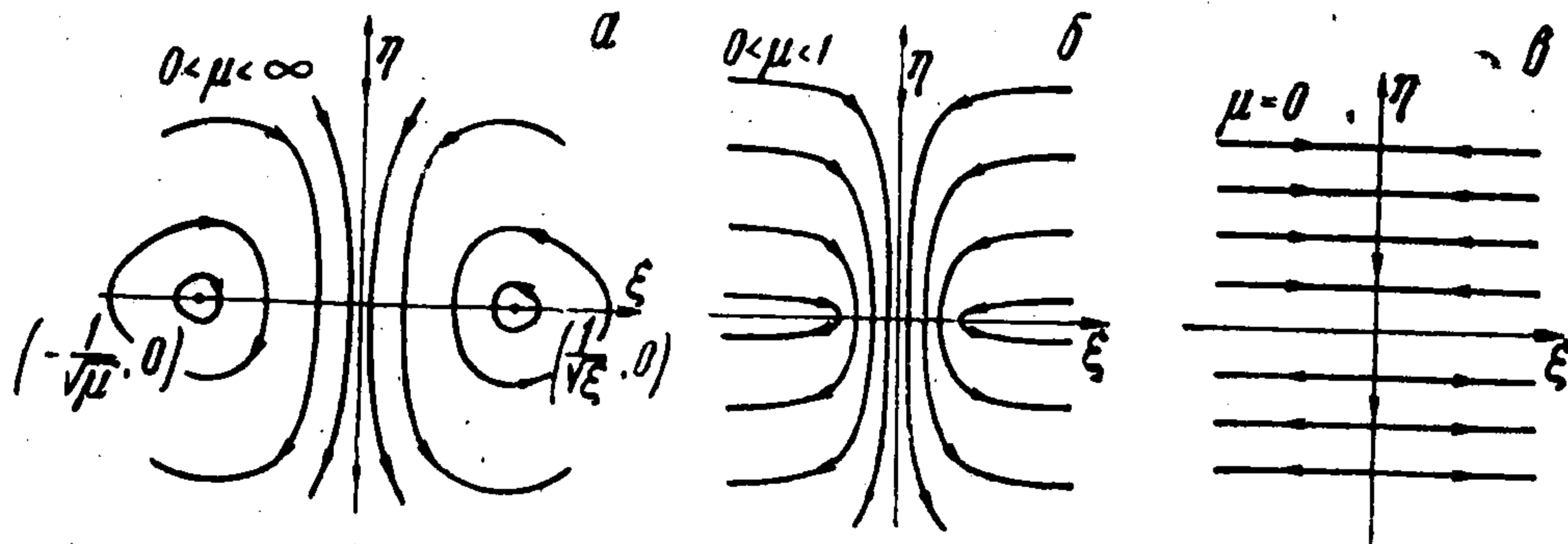
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (a^2 / b^2) z'^2 \quad (1.8)$$

и к уравнению движения (1.6) в виде

$$\dot{x} \ddot{y} - \dot{x}' \ddot{y}' = 0, \quad (a^2 + b^2) z'' = - g b^2 \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) (с учетом обобщенных сил по координатам x, y) и были получены Г. Гамелем [4]. Кроме того, эти уравнения Г. Гамель вывел, исходя из принципа Гаусса, что и убедило его в их правильности. Таким образом, рассмотренная П. Аппелем и Г. Гамелем система с нелинейными неголономными связями получается из неголономной системы с линейными

связями путем предельного перехода $\rho \rightarrow 0$. Однако при этом предельном переходе происходит понижение порядка системы дифференциальных уравнений, т. е. их вырождение, и поэтому заранее не ясно, совпадают ли движения предельной системы (1.6), (1.7) с предельным движением невырожденной системы при $\rho \rightarrow 0$. В связи с этим остается открытым вопрос, насколько правильно уравнения движения вырожденной системы (1.6), (1.7) описывают движение исходной системы с исчезающе малым ρ .



Фиг. 2

Ответ на этот вопрос дает проводимое ниже исследование, которое основано на изучении движений невырожденной системы при $\rho > 0$ и $\rho < 0$, предельных движений невырожденной системы при $|\rho| \rightarrow 0$, а также движений вырожденной системы.

§ 2. Динамика невырожденной системы. Введем новые переменные ξ, η посредством соотношений

$$\theta' = \alpha \xi, \quad \varphi' = \beta \eta \quad \left(\alpha = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}, \beta = \frac{gb}{a^2 + b^2} \right)$$

Уравнения движения (1.5) представим в виде

$$\mu \xi' = \mp \xi \eta, \quad \eta' = -1 \pm \mu \xi^2 \quad \left(\mu = \frac{|\rho|}{a\beta} \geq 0 \right) \quad (2.1)$$

Здесь верхний знак относится к случаю $\rho > 0$, а нижний знак — к случаю $\rho < 0$. Движению рассматриваемой системы можно сопоставить перемещение изображающей точки на плоскости $\xi\eta$, которую будем называть фазовой плоскостью. Рассмотрим разбиение плоскости $\xi\eta$ на траектории. Разделив второе уравнение (2.1) на первое, получим уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mu \frac{-1 \pm \mu \xi^2}{\mp \xi \eta} \quad (2.2)$$

с разделяющимися переменными; отсюда находим семейство интегральных кривых

$$\eta^2 = \mu (\pm \ln \xi^2 - \mu \xi^2) + \text{const} \quad (2.3)$$

Эти кривые разбивают плоскость $\xi\eta$ на траектории, изображенные на фиг. 2 и 3, где стрелки указывают направление движения изображающей точки.

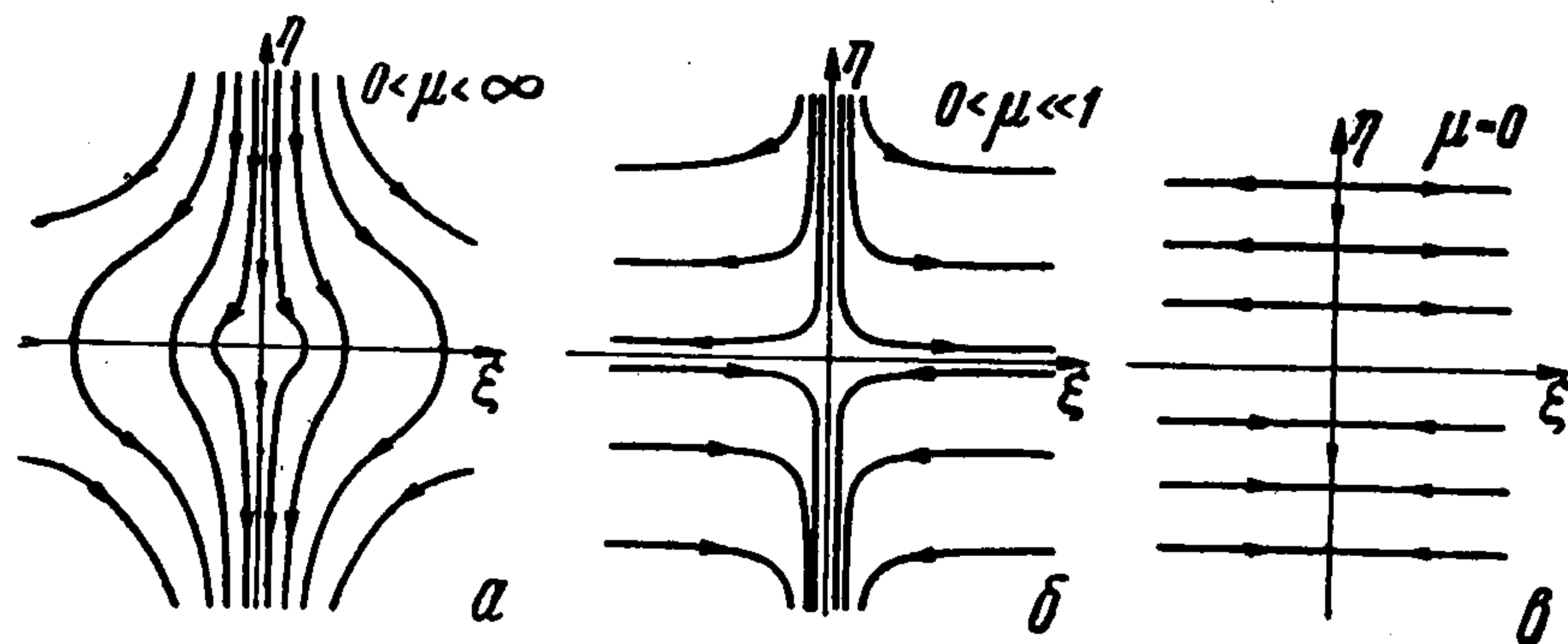
А. Случай $\rho > 0$. Движение изображающей точки на плоскости $\xi\eta$ описывается уравнениями

$$\mu \xi' = -\xi \eta, \quad \eta' = -1 + \mu \xi^2 \quad (2.4)$$

Выражая произвольную постоянную в уравнении (2.3) через начальные значения $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, получим

$$\eta^2 = \mu [\ln (\xi^2 / \xi_0^2) - \mu (\xi^2 - \xi_0^2)] + \eta_0^2 \quad (2.5)$$

Фазовые траектории на плоскости $\xi\eta$ представляют замкнутые кривые, вложенные одна в другую и охватывающие особые точки $(-1/\sqrt{\mu}, 0)$ и $(1/\sqrt{\mu}, 0)$, которые также являются фазовыми траекториями (фиг. 2а).



Фиг. 3

В результате подстановки соотношения (2.5) в первое уравнение (2.4), получаем

$$\mu \frac{d\xi}{dt} = \mp \xi \left(\mu \left[\ln \frac{\xi^2}{\xi_0^2} - \mu (\xi^2 - \xi_0^2) \right] + \eta_0^2 \right)^{1/2}$$

где верхний знак соответствует обходу изображающей точки по верхней половине замкнутой интегральной кривой (фиг. 2а), проходящей через точку ξ_0 , η_0 , а нижний знак — по нижней половине кривой. Отсюда определяется зависимость $\xi = \xi(t)$

$$\mp \mu \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\mu \left[\ln (\xi^2 / \xi_0^2) - \mu (\xi^2 - \xi_0^2) \right] + \eta_0^2}} = t - t_0 \quad (2.6)$$

Для нахождения закона изменения во времени других переменных достаточно теперь выразить их через ξ . Так, для угла θ поворота плоскости колеса имеем соотношение $\theta' = \alpha \xi$. Отсюда находим

$$\mp \alpha \mu \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\mu \left[\ln (\xi^2 / \xi_0^2) - \mu (\xi^2 - \xi_0^2) \right] + \eta_0^2}} = \theta - \theta_0 \quad (2.7)$$

Для угла φ собственного вращения колеса имеем соотношение

$$\varphi' = \beta \eta = \pm \beta \sqrt{\mu \left[\ln (\xi^2 / \xi_0^2) - \mu (\xi^2 - \xi_0^2) \right] + \eta_0^2}$$

$$(\varphi - \varphi_0 = \mp \mu \beta \ln (\xi / \xi_0)) \quad (2.8)$$

Соответствующие выражения для координат X , Y точки B соприкосновения колеса с плоскостью получаются из уравнений (1.3). Модуль скорости V точки B равен

$$V = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = a |\varphi'| = a \beta \sqrt{\mu \left[\ln (\xi^2 / \xi_0^2) - \mu (\xi^2 - \xi_0^2) \right] + \eta_0^2} \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что в моменты времени, когда ξ принимает значения $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$, где ξ_1 , ξ_2 — корни уравнения

$$\mu \left[\ln (\xi^2 / \xi_0^2) - \mu (\xi^2 - \xi_0^2) \right] + \eta_0^2 = 0 \quad (2.10)$$

(выражающем условие пересечения интегральной кривой оси $\eta = 0$), происходит мгновенная остановка точки B . Поскольку в эти моменты времени угловая скорость $\theta' \neq 0$, а φ' изменяет знак, траектория точки B образует здесь клювообразную кривую с особой точкой типа точки возврата. Между этими особыми точками траектория представляет отрезок спиральной кривой.

Полученные результаты позволяют дать качественное описание поведения системы и определить характер траекторий точки B при различных начальных условиях.

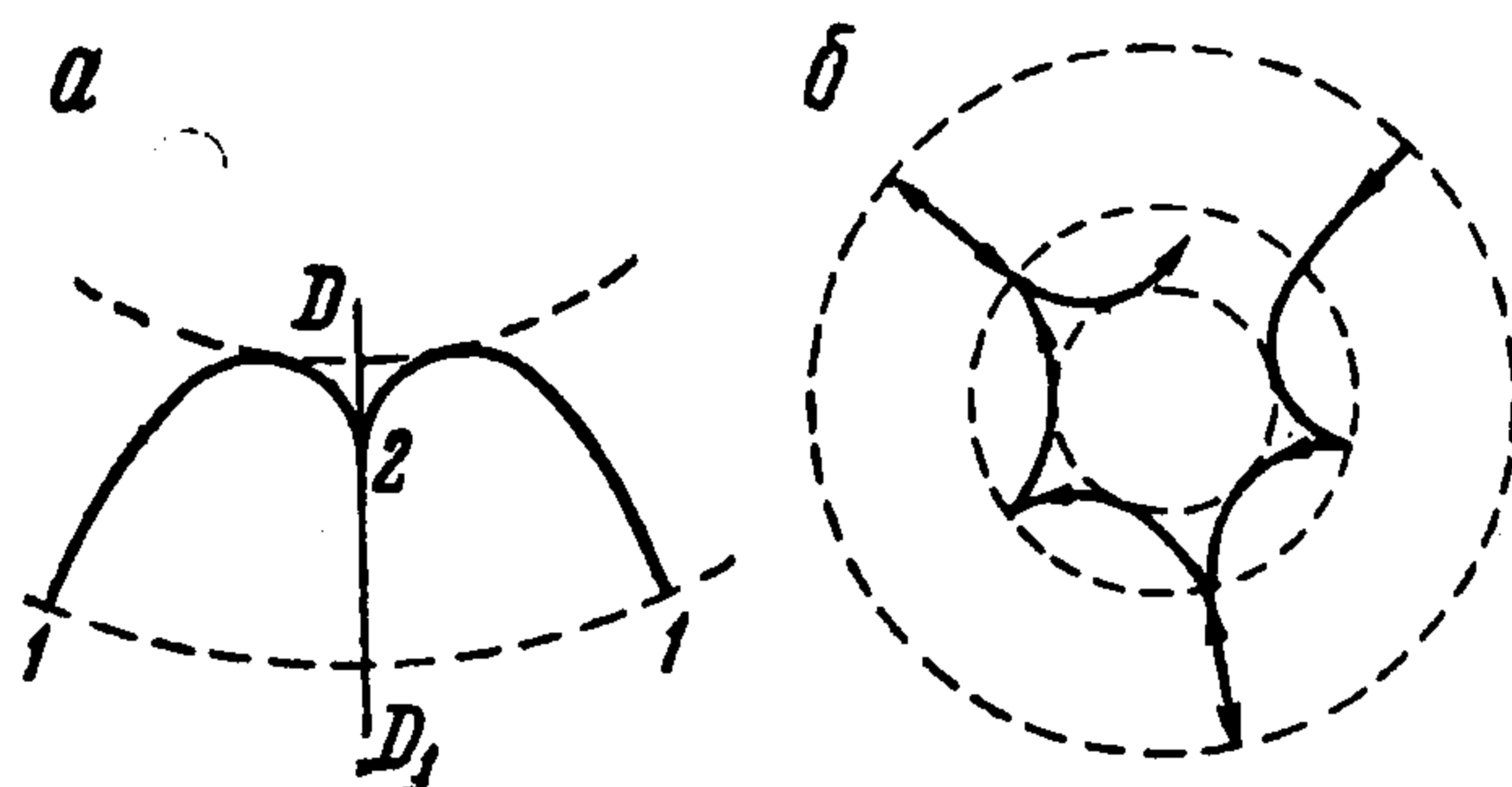
Простейший тип движения системы получается в случае, когда изображающая точка на плоскости $\xi\eta$ находится в особой точке $(\pm \mu^{1/2}, 0)$. В этом случае $\varphi' = 0$, точка B неподвижна, а масса m , находясь на постоянной высоте $z = z_0$, вращается вокруг оси, проходящей через точку B , с постоянной угловой скоростью $\theta' = \alpha / \sqrt{\mu}$. Физическая реализация этого типа движения состоит в том, что момент силы трения $F^* = m\rho\theta'^2$ относительно центра колеса уравнивает момент силы тяжести mg , т. е.

$$a\rho\theta'^2 = gb \quad \text{или} \quad \xi = \pm 1 / \sqrt{\mu}$$

Другой простейший тип движения системы получается при перемещении изображающей точки на плоскости $\xi\eta$ по оси $\xi = 0$. В этом случае $\theta = \theta_0 = \text{const}$, т. е. траектория точки B будет прямой. Из уравнения движения $\eta' = -1$ следует, что при этом масса будет опускаться с постоянным ускорением

$$z'' = - \frac{gb^2}{a^2 + b^2} \quad (2.11)$$

Все остальные движения системы соответствуют перемещению изображающей точки на плоскости $\xi\eta$ по замкнутой кривой, охватывающей точку $(\pm 1 / \sqrt{\mu}, 0)$. При этом угловая скорость θ' вращения плоскости колеса колеблется около некоторого среднего значения $\theta' = \text{const}$, а переменная φ' — относительно нулевого значения. Согласно проведенному рассмотрению, при одном обходе изображающей точки по замкнутой кривой на фиг. 2а точка B прикосновения колеса опишет кривую, которую назовем ячейкой. Одна из возможных ячеек изображена на фиг. 4а, где точка 1 соответствует значению $\xi = \xi_1$, а точка 2 — значению $\xi = \xi_2$. Целая траектория состоит из одинаковых ячеек (1-2-1), которые укладываются вдоль полосы, обозначенной на фиг. 4а пунктиром. Ячейка симметрична относительно прямой DD_1 . Поэтому пунктирные линии могут быть только окружностями. Таким образом, траектория точки всегда содержится в кольцевой области. В зависимости от начальных условий и соотношений параметров системы траектория точки B будет или замкнутой кривой, или квазипериодической кривой, всюду плотно заполняющей кольцевую область.



Фиг. 4а, б

Б. Случай $\rho < 0$. Уравнения движения (2.1) в этом случае имеют вид

$$\mu \xi' = \xi \eta, \quad \eta' = -1 - \mu \xi^2 \quad \left(\mu = \frac{|\rho|}{\alpha\beta} > 0 \right) \quad (2.12)$$

Фазовые траектории на плоскости $\xi\eta$ представляют незамкнутые кривые, расположенные симметрично относительно координатных осей (фиг. 3а). Напишем уравнение (2.3) интегральной кривой, проходящей через точку $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$

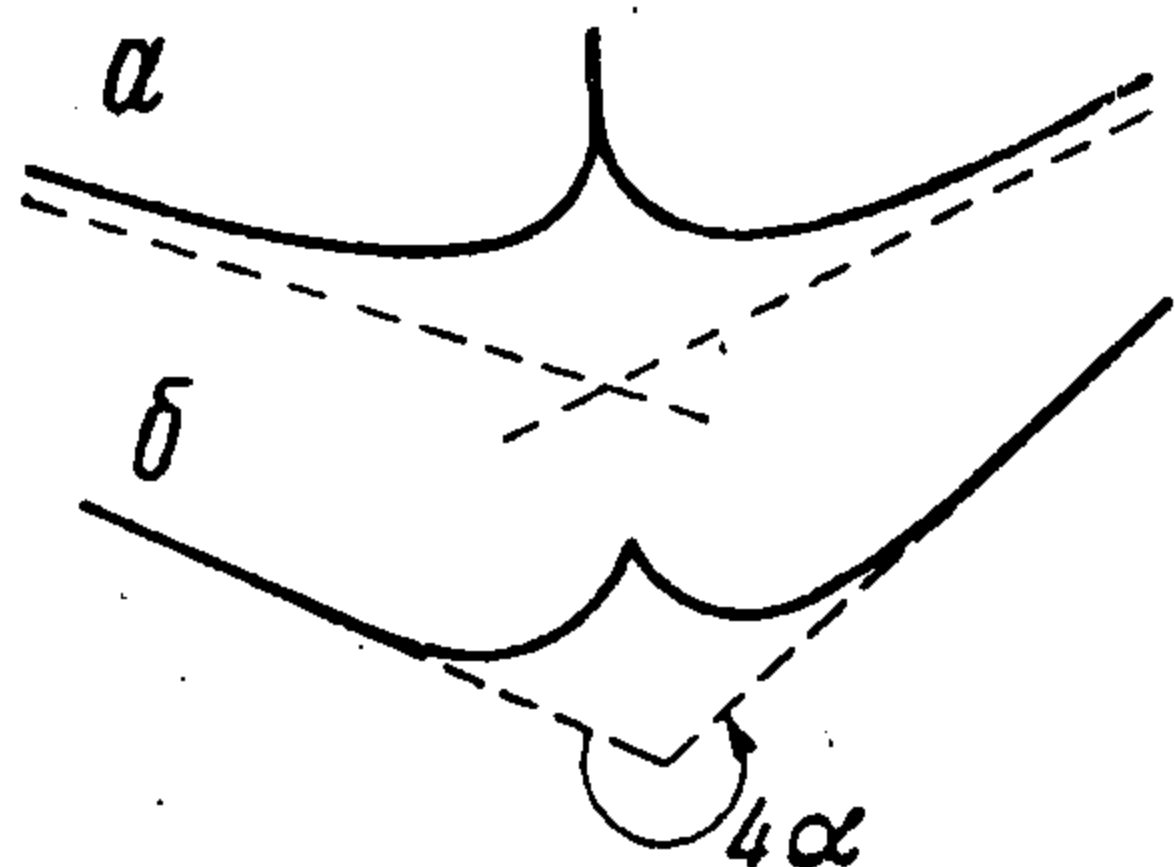
$$\eta^2 = -\mu [\ln(\xi^2 / \xi_0^2) + \mu(\xi^2 - \xi_0^2)] + \eta_0^2 \quad (2.13)$$

Для того чтобы получить зависимость ξ и других интересующих нас величин от времени, достаточно поступить так же, как было проделано в случае $\rho > 0$. Однако легко видеть, что все эти соотношения получаются

из (2.6) — (2.9) путем замены величины μ на $-\mu$. При этом уравнение (2.10) заменяется на уравнение

$$\mu [\ln(\xi^2 / \xi_0^2) + \mu(\xi^2 - \xi_0^2)] = \eta_0^2 \quad (2.14)$$

которое имеет лишь один корень $\xi^2 = (\xi^2)_0$. Из выражения (2.9) и фиг. 3а следует, что в зависимости от начальных условий траектория точки B имеет лишь одну клювообразную особую точку, если $\eta_0 > 0$, или ни одной



Фиг. 5а,б

особой точки, если $\eta_0 < 0$. Поскольку бесконечные ветви всех интегральных кривых на фиг. 3а стремятся к оси $\xi = 0$, траектории точки B при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ также имеют бесконечные ветви, стремящиеся к асимптотам. Следовательно, целая $(-\infty < t < +\infty)$ траектория точки B имеет вид, показанный на фиг. 5а. Таким образом, поведение системы в случае $\rho < 0$ существенно отличается от поведения в случае $\rho > 0$. Лишь при частном значении начальных условий, когда $\xi_0 = 0$, траектория точки B в обоих случаях будет прямой, и поведение системы одинаково.

§ 3. Движения вырожденной системы. Предельные движения невырожденной системы при $|\rho| \rightarrow 0$. Как было показано в § 1, уравнения движения (1.6) или, что то же, (1.9) системы с нелинейной неголономной связью (1.8) получаются из уравнений (1.5) [или (2.1)] невырожденной системы при $\rho \rightarrow 0$. В этом случае уравнения (2.1) принимают вид

$$\xi' = 0, \quad \eta' = -1 \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что фазовым пространством вырожденной системы будет прямая $\xi = 0$. При любых начальных условиях движению системы по инерции соответствует перемещение изображающей точки по фазовой прямой $\xi = 0$ с постоянной скоростью $\eta' = -1$. Это означает, что траектория точки B соприкосновения колеса с плоскостью всегда будет прямой, по которой колесо катится с постоянным ускорением $\varphi'' = -\beta$. Покажем теперь, что движение, описываемое уравнениями (3.1), отличается от предельного движения, которое система будет совершать при стремлении величины $|\rho|$ к нулю. Для этого достаточно исследовать движение

невырожденной системы при $\rho \rightarrow \pm 0$. Как и прежде, рассмотрим отдельно случай $\rho > 0$ и случай $\rho < 0$.

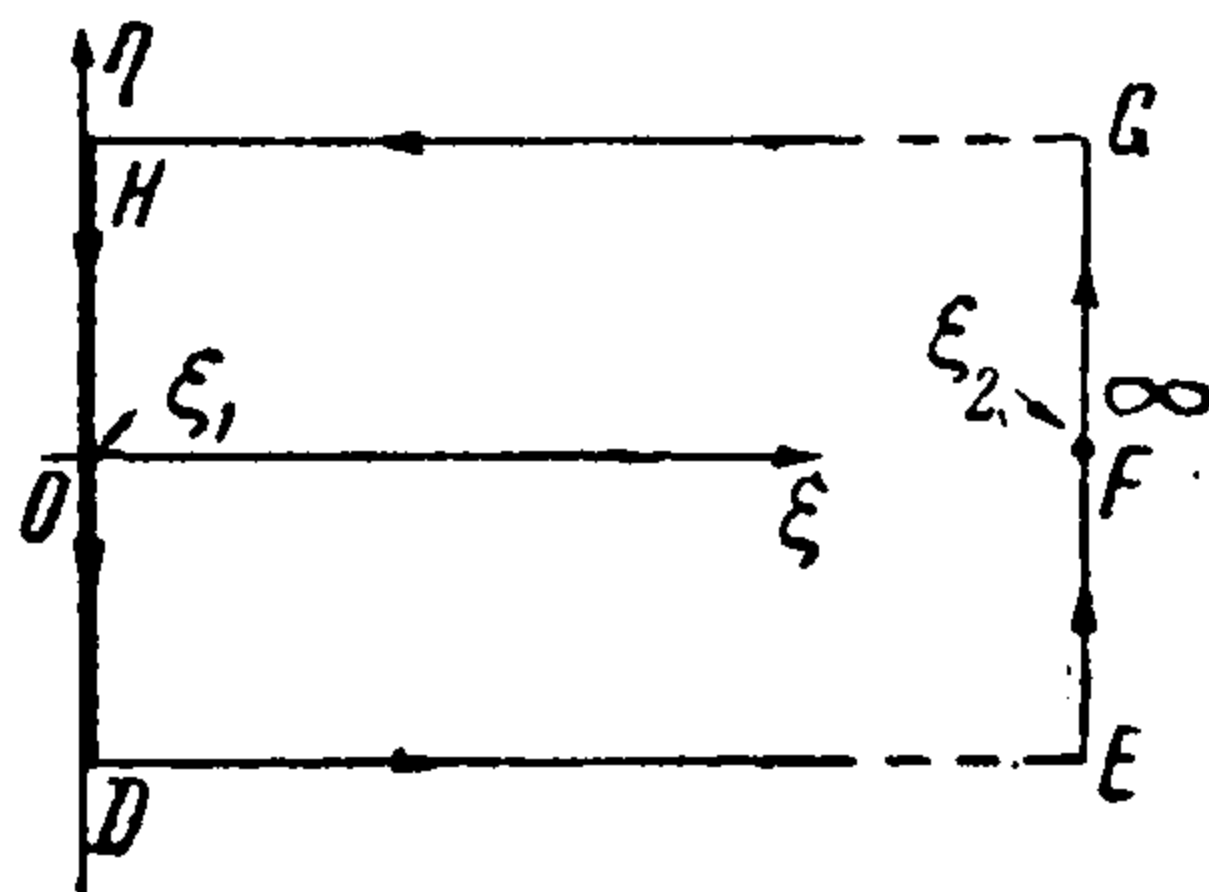
а) Случай $\rho > 0$. Из первого уравнения (2.4) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \dot{\xi} = - \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\xi \eta}{\mu} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \xi \eta > 0 \\ +\infty, & \text{если } \xi \eta < 0 \end{cases} \quad (\xi \neq 0, \eta \neq 0)$$

т. е. скорость изменения координаты ξ на плоскости $\xi\eta$ при $\mu \rightarrow 0$ возрастает до бесконечности для любых значений $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$. Отсюда и из уравнений (2.2), (2.5) следует, что при стремлении μ к нулю картина разбиения фазовой плоскости на траектории изменяется в соответствии с фиг. 2б и в. В предельном случае ($\mu = 0$) вся фазовая плоскость $\xi\eta$ представляет область быстрых движений, за исключением прямой $\xi = 0$, которая является осью медленных движений. При этом в области $\eta > 0$ ось $\xi = 0$ медленных движений устойчива по отношению к быстрым движениям, в области $\eta < 0$ — неустойчива.

Найдем предельное движение, к которому стремится движение невырожденной системы при $\mu \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим движение изображающей точки на плоскости $\xi\eta$ по одной из замкнутых интегральных кривых. Предельное положение интегральной кривой изображено на фиг. 6. В самом деле, из уравнения (2.5) следует, что при $\mu \rightarrow 0$ оно вырождается в пару прямых $\eta = \pm \eta_0$. При этом корни ξ_1 и ξ_2 уравнения (2.10) стремятся к нулю и соответственно к бесконечности по закону

$$|\xi_1| \approx \exp \frac{-\eta_0^2}{2\mu}, \quad |\xi_2| \approx \frac{\eta_0}{\mu} \quad (3.2)$$



Фиг. 6

Найдем интервалы изменения времени t , а также углов θ и φ при прохождении изображающей точкой отрезков OD , DE и EF на фиг. 6. Величины на этих участках обозначим соответственно индексами 1, 2, 3.

На участке OD переменная $\xi = 0$, поэтому из второго уравнения (2.4) следует

$$\int_0^{\eta_0} d\eta = - \int_0^{t_1} dt, \quad \text{или} \quad t_1 = \eta_0$$

производная $\theta' = \alpha \xi$, поэтому для θ_1 имеем $\theta_1 = 0$.

Для вычисления величины φ_1 воспользуемся интегральным соотношением $\varphi = \frac{1}{2}\beta (\eta^2 + \mu^2 \xi^2) + \text{const}$; откуда $\varphi_1 = -\frac{1}{2}\beta \eta_0^2$.

На участке DE . Из соотношения (2.6) находим

$$t_2 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\eta_0} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\xi} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\eta} \left[\ln \frac{\eta_0}{\mu} + \frac{\eta_0^2}{2\mu} \right] = \frac{1}{2} \eta_0$$

Из соотношения $\theta' = \alpha \xi$ с использованием первого уравнения (2.4) получаем

$$\theta_2 = \alpha \int_0^{t_2} \xi dt = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\alpha \mu}{\eta_0} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi = \alpha$$

Наконец,

$$\varphi_2 = -\beta\eta_0 \int_0^{t_2} dt = -\frac{1}{2}\beta\eta_0^2$$

На участке EF . Из второго уравнения (2.4) находим

$$\int_{-\eta_0}^0 d\eta = \frac{\eta_0^2}{2\mu} \int_0^{t_2} dt, \quad \text{или} \quad t_2 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\eta_0} = 0$$

Далее

$$\theta_3 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha \int_0^{t_3} \xi dt = \lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha \frac{\eta_0}{\mu} \frac{\mu}{\eta_0} = \alpha, \quad \varphi_3 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \beta (\eta)_{\text{ср}} \frac{\mu}{\eta_0} = 0$$

На участках FG , GH , HO движение будет симметричным.

Полученные результаты позволяют представить вид траектории точки B прикосновения колеса к плоскости в предельном случае $\mu = 0$, а также характер предельного движения системы.

При перемещении изображающей точки по контуру $ODEFGHO$ (фиг. 6) система движется следующим образом: в течение времени $t_1 = \eta_0$ колесо поворачивается на угол $\varphi_1 = -\frac{1}{2}\beta\eta_0^2$, двигаясь по прямой ($\theta_1 = 0$), затем за время $t_2 = \frac{1}{2}\eta_0$ колесо поворачивается на тот же угол, так что $\varphi_2 = \varphi_1 = -\frac{1}{2}\beta\eta_0^2$, а плоскость колеса поворачивается на угол $\theta_2 = \alpha$.

Траектория точки B на этом участке имеет вид дуги, длина которой равна предыдущему прямолинейному отрезку. Далее, плоскость колеса мгновенно поворачивается на угол $\theta_3 + \theta_4 = 2\alpha$, а направление собственного вращения колеса изменяется на обратное. Траектория точки B при этом образует угловую точку с конечным углом $\theta = 2\alpha$. Затем колесо опять описывает дугообразную траекторию, поворачиваясь за время $t_5 = \frac{1}{2}\eta_0$ на угол $\varphi_5 = \frac{1}{2}\beta\eta_0^2$, а его плоскость — на угол $\theta_5 = \alpha$.

Наконец, в течение времени $t_6 = \eta_0$ колесо движется по прямой, поворачиваясь на угол $\varphi_6 = \frac{1}{2}\beta\eta_0^2$. В конце этого отрезка траектории направление собственного вращения колеса изменяется на обратное, и движение повторяется.

Целая траектория будет иметь вид розетки, которая может быть как замкнутой, так и незамкнутой кривой, всюду плотно заполняющей некоторую кольцевую область.

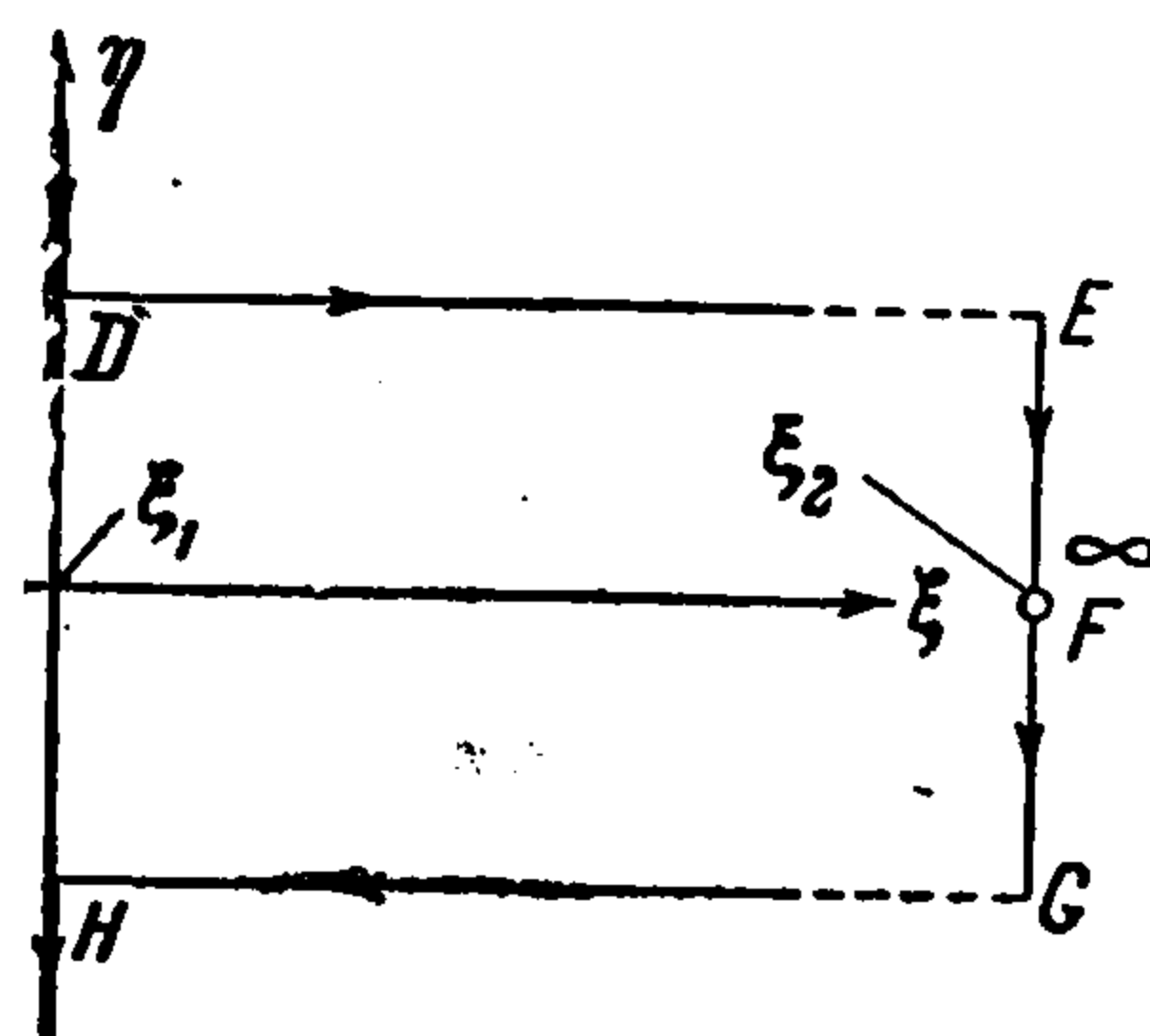
Размеры этой области пропорциональны величине начального значения $|\eta_0|$ скорости собственного вращения колеса. Вид траектории предельного движения показан на фиг. 4б.

в) *Случай* $\rho < 0$. Из первого уравнения (2.12) в этом случае следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \xi = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\xi\eta}{\mu} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \xi\eta > 0 \\ -\infty, & \text{если } \xi\eta < 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \xi \neq 0 \\ \eta \neq 0 \end{pmatrix}$$

При $\mu \rightarrow 0$ картина разбиения фазовой плоскости на траектории изменяется в соответствии с фиг. 3б и 3в.

В предельном случае ($\mu = 0$) вся фазовая плоскость также будет областью быстрых движений, а ось $\xi = 0$ — областью медленных движений. В отличие от случая $\rho > 0$ теперь полуось $\xi = 0, \eta > 0$ неустойчива по отношению к быстрым движениям, а полуось $\xi = 0, \eta < 0$ — устойчива. Для отыскания предельного движения невырожденной системы при $\mu \rightarrow 0$ рассмотрим перемещение изображающей точки по интегральной кривой, предельное положение которой изображено на фиг. 7, где значения ξ_1 и ξ_2 определяются по-прежнему выражениями (3.2). Интервалы изменения времени t , а также углов θ и φ при прохождении изображающей точкой (фиг. 7) отрезков DE , EF , FG и GH находится так же, как и в случае $\rho > 0$.



Характер предельного движения системы и вид траектории точки B будут следующими: при перемещении изображающей точки вниз по оси $\xi = 0$ до точки D колесо движется по прямой с постоянным ускорением. После этого за время $t_1 = 1/2\eta_0$ колесо поворачивается на угол $\varphi_1 = 1/2\beta\eta_0^2$, а его плоскость — на угол $\theta_1 = \alpha$. Траектория точки B на этом участке имеет вид дуги. Далее плоскость колеса мгновенно поворачивается на угол $\theta_2 + \theta_3 = 2\alpha$, а направление собственного вращения изменяется на обратное. Траектория точки B при этом образует угловую точку. Затем колесо вновь описывает дугу, поворачиваясь за время $t_4 = 1/2\eta$ на угол $\varphi_4 = -1/2\beta\eta_0^2$, а его плоскость — на угол $\theta_4 = \alpha$. После этого колесо движется по прямой, образующей с первоначальной прямой угол $\theta = 4\alpha$. Вид предельной траектории в случае $\rho < 0$ показан на фиг. 5б.

Поступила 8 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. J o h n s e n L. Dynamique générale des systemes non-holonomes. Oslo, 1941.
2. A p p e l l P. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 32, 1911.
3. Ч е т а е в Н. Г. О принципе Гаусса. Изв. Физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те, 1932—1933, т. VI, сер. 3.
4. G a m e l G. Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
5. D e l a s s u s P. Sur les Liaisons et les mouvements. Annales de l'école Normale supérieure, t. XXIX, Paris, 1912.
6. B e g h i n H. Etude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry, Thèse Nr. 1727, Paris, 1922.