

## К ТЕОРИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОНОМНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

В. Д. Андреев

(Москва)

Рассматривается схема, аналогичная приведенной в работе [1], которая позволяет автономно определять координаты центра тяжести движущегося объекта, а также его ориентацию относительно плоскости горизонта и в азимуте.

Для произвольного движения объекта вблизи поверхности Земли выводятся и анализируются уравнения идеальной работы такой схемы (уравнения относительного равновесия) и уравнения ошибки, т. е. уравнения малых колебаний около положения относительного равновесия. Учитываются основные инструментальные погрешности элементов схемы.

Рассматриваемые уравнения имеют значительную общность. Как частные случаи из них следуют уравнения и результаты, полученные в работах [1-7].

1°. Введем правую ортогональную систему координат  $O' \xi_* \eta_* \zeta_*$ : начало ее поместим в центр Земли  $O'$ , ось  $\zeta_*$  направим вдоль вектора угловой скорости вращения Земли  $\omega$ , оси  $\xi_*$  и  $\eta_*$  расположим в плоскости экватора, направив их так, чтобы ориентация трехгранника  $\xi_* \eta_* \zeta_*$  относительно неподвижных звезд сохранялась неизменной. Если пренебречь орбитальным движением Земли, то эту систему координат можно считать инерциальной.

Введем систему координат  $O' \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ , связанную с Землей: ось  $\zeta_0$  этой системы совместим с осью  $\zeta_*$ , ось  $\xi_0$  направим вдоль линии пересечения экватора плоскостью Гринвического меридиана. Будем считать системы координат  $\xi_* \eta_* \zeta_*$  и  $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$  совпадающими в начальный момент времени.

Положение произвольной точки в системе координат  $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$  определим сферическими координатами: широтой  $\varphi$ , долготой  $\lambda$  и расстоянием  $R$  точки от центра Земли  $O'$ . Тогда единичный вектор  $\rho$  направления от центра Земли  $O'$  в произвольную точку  $O$  будет равен

$$\rho(\varphi, \lambda) = \xi_0 \cos \varphi \cos \lambda + \eta_0 \cos \varphi \sin \lambda + \zeta_0 \sin \varphi \quad (1.1)$$

Здесь  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  — единичные векторы соответствующих осей.

Введем, далее, систему координат  $O' \xi \eta \zeta$ , связанную с двумя неизменными в системе координат  $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$  направлениями  $\rho_1(\varphi_1, \lambda_1)$  и  $\rho_2(\varphi_2, \lambda_2)$  так, что

$$\xi = \rho_1, \quad \eta = \frac{\rho_2 - \rho_1 \cos S_0}{\sin S_0}, \quad \zeta = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{\sin S_0}, \quad \cos S_0 = \rho_1 \cdot \rho_2 \quad (1.2)$$

Положение центра тяжести  $O$  движущегося в системе координат  $\xi \eta \zeta$  объекта определим сферическими координатами: углом  $S$ , отсчитываемым в плоскости  $\xi \eta$  от оси  $\xi$  в направлении оси  $\eta$ , углом  $z$ , отсчитываемым от плоскости  $\xi \eta$  в сторону оси  $\zeta$  и расстоянием  $R$  точки  $O$  от центра Земли  $O'$ .

Свяжем с точкой  $O$  трехгранник Дарбу  $Ox_1y_1z_1$ . Его ось  $z_1$  направим вдоль линии  $O'O$  от центра Земли, ось  $y_1$  расположим в плоскости, содержащей точку  $O$  и ось  $O'\zeta$ . Взаимное расположение систем координат  $\xi\eta\zeta$  и  $x_1y_1z_1$  определяется таблицей направляющих косинусов, представленной справа.

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	
$x_1$	$-\sin S$	$\cos S$	$0$	(1.3)
$y_1$	$-\sin z \cos S$	$-\sin z \sin S$	$\cos z$	
$z_1$	$\cos z \cos S$	$\cos z \sin S$	$\sin z$	

Если системы координат  $\xi\eta\zeta$  и  $\xi_0\eta_0\zeta_0$  совпадают, то

углы  $z$  и  $S$  превращаются в геоцентрические широту  $\varphi$  и долготу  $\lambda$ , а трехгранник  $x_1y_1z_1$  становится ориентированным по странам Света.

Свяжем также с центром тяжести объекта трехгранник  $Ox_0y_0z_0$ , полученный из трехгранника  $x_1y_1z_1$  поворотом на угол  $\varepsilon$  вокруг оси  $z_1$ , определяемый таблицей направляющих косинусов, представленной справа. Если  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ ,  $v_{z_0}$  — проекции абсолютной скорости движения точки  $O$  на оси  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , а  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_0y_0z_0$  на его оси, то

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	
$x_0$	$\cos \varepsilon$	$\sin \varepsilon$	$0$	(1.4)
$y_0$	$-\sin \varepsilon$	$\cos \varepsilon$	$0$	
$z_0$	$0$	$0$	$1$	

$$v_{x_0} = R\omega_{y_0}, \quad v_{y_0} = -R\omega_{x_0}, \quad v_{z_0} = R\dot{\varepsilon} \quad (1.5)$$

Здесь и дальше точкой обозначено дифференцирование по времени.

При помощи (1.2), (1.3), (1.4) можно выразить  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  через  $z'$ ,  $S'$ ,  $\varepsilon'$  и угловую скорость вращения Земли  $u$

$$\omega_{x_0} = (-z' + u(-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S)) \cos \varepsilon + \quad (1.6)$$

$$+ (S' \cos z + u(-n_{31} \sin z \cos S - n_{32} \sin z \sin S + n_{33} \cos z)) \sin \varepsilon$$

$$\omega_{y_0} = -(-z' + u(-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S)) \sin \varepsilon +$$

$$+ (S' \cos z + u(-n_{31} \sin z \cos S - n_{32} \sin z \sin S + n_{33} \cos z)) \cos \varepsilon$$

$$\omega_{z_0} = S' \sin z + u(n_{31} \cos z \cos S + n_{32} \cos z \sin S + n_{33} \sin z) + \varepsilon'$$

Здесь  $n_{31}$ ,  $n_{32}$ ,  $n_{33}$  — косинусы углов между осью  $\zeta_0$  и осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , равные [8]

$$n_{31} = \sin \varphi_1, \quad n_{32} = \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos S_0}{\sin S_0}, \quad n_{33} = \frac{\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sin S_0} \quad (1.7)$$

Разрешая уравнения (1.7) относительно  $z'$ ,  $S'$ ,  $\varepsilon'$  и интегрируя, имеем

$$z = - \int_0^t [\omega_{x_0} \cos \varepsilon - \omega_{y_0} \sin \varepsilon - u(-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S)] dt + z^0$$

$$S = \int_0^t \frac{1}{\cos z} [\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon - u(-n_{31} \sin z \cos S - \quad (1.8)$$

$$- n_{32} \sin z \sin S + n_{33} \cos z)] dt + S^0$$

$$\varepsilon = \int_0^t [\omega_{z_0} - \operatorname{tg} z (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon) -$$

$$- \frac{u}{\cos z} (n_{31} \cos S + n_{32} \sin S)] dt + \varepsilon^0$$

Если  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  известны как функции времени, то можно построить вычислительную схему, моделирующую уравнения (1.8), и определить  $z$ ,  $S$  и  $\varepsilon$ .

2°. Пусть инерциальный ориентатор представляет собой (фиг. 1) платформу (трехгранник  $Oxyz$ ), связанную с объектом трехстепенным кардановым подвесом (на фиг. 1 не показан). На платформе установлены в трехстепенных подвесах три гироскопа  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  с кинетическими моментами  $H_1, H_2, H_3$ . Приложением к гироскопам моментов  $M_x, M_y, M_z$  можно заставить платформу вращаться с угловыми скоростями [1]

$$\omega_x = (M_x / H_1) = m_x, \quad \omega_y = (M_y / H_2) = m_y, \quad \omega_z = (M_z / H_3) = m_z \quad (2.1)$$

С платформой жестко связаны три ньютонометра [1]  $a_x, a_y, a_z$ , оси чувствительности которых направлены вдоль осей  $x, y, z$ . Совместив трехгранники  $x, y, z$  и  $x_0, y_0, z_0$  в начальный момент, можно по показаниям ньютонометров сформировать моменты  $M_x, M_y, M_z$  так, что при произвольном движении объекта всегда будут выполняться равенства:

$$\omega_x \equiv \omega_{x_0}, \quad \omega_y \equiv \omega_{y_0}, \quad \omega_z \equiv \omega_{z_0} \quad (2.2)$$

и трехгранники окажутся совмещенными во все время движения.

Будем полагать чувствительные массы ньютонометров точечными и расположенными в точке  $O$ . Тогда, обеспечив нужное соотношение между коэффициентом упругости подвеса чувствительной массы и ее величиной, можем считать показания ньютонометров равными

$$a_x = Q_x + F_x, \quad a_y = Q_y + F_y, \quad a_z = Q_z + F_z \quad (2.3)$$

где  $Q_x, Q_y, Q_z$  — проекции на оси чувствительности ньютонометров отнесенной к единичной массе силы инерции переносного движения начала системы координат  $x, y, z$ , а  $F_x, F_y, F_z$  — проекции силы притяжения Земли единичной массы, помещенной в точке  $O$ . Система координат  $O'\xi_*\eta_*\zeta_*$  считается инерциальной, поэтому

$$\begin{aligned} Q_{x_0} &= -(R\omega_{y_0})' - R'\omega_{y_0} - R\omega_{x_0}\omega_{z_0} \\ Q_{y_0} &= (R\omega_{x_0})' - R\omega_{z_0}\omega_{y_0} + \omega_{x_0}R' \\ Q_{z_0} &= -R'' + R(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если пренебречь нецентральностью поля тяготения Земли, то

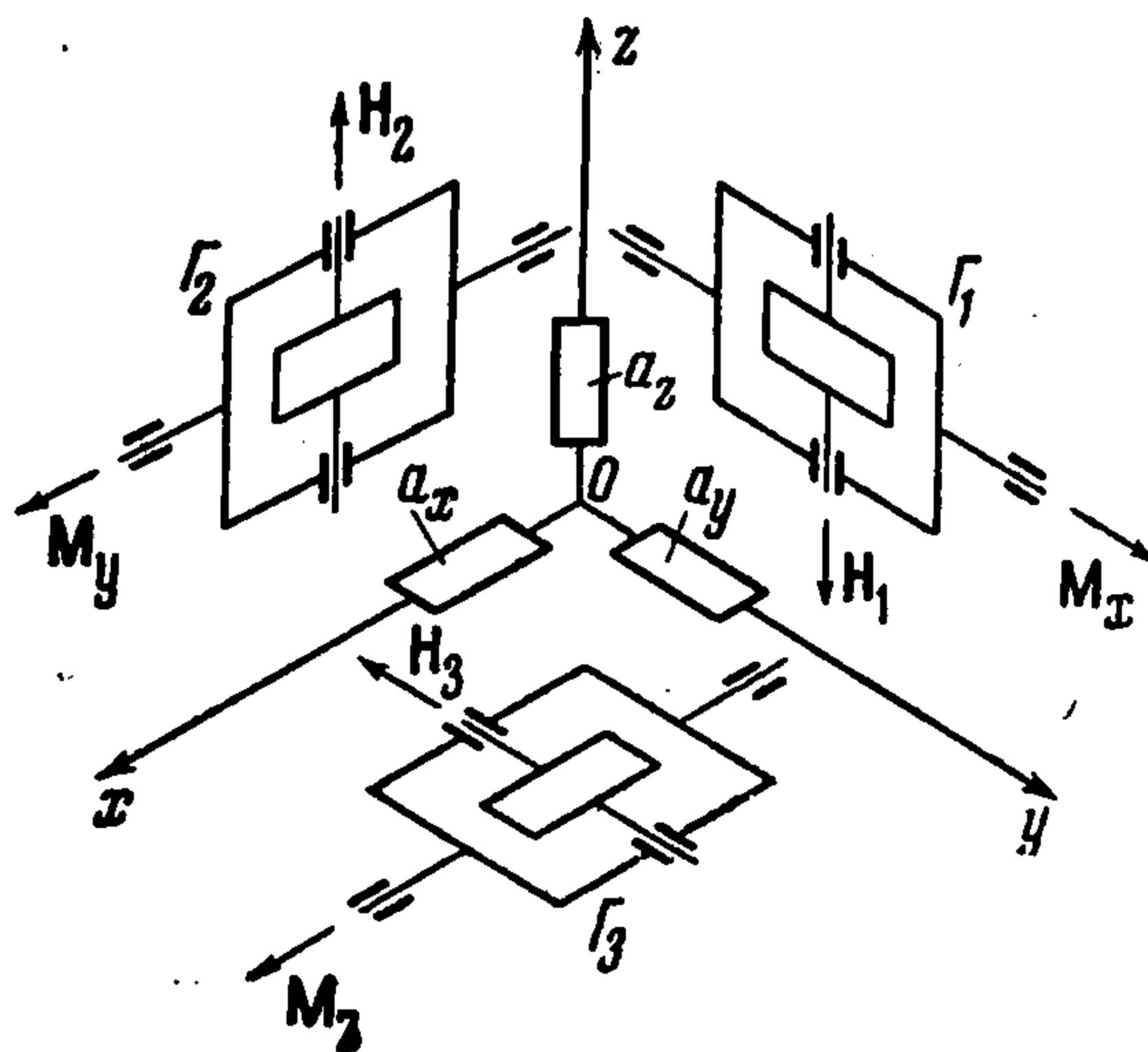
$$F_{x_0} = F_{y_0} = 0, \quad F_{z_0} = -k / R^2 = -g(R) \quad (2.5)$$

Из (2.3), (2.4), (2.5)

$$\omega_{y_0} = \frac{1}{R} \left[ \int_0^t (-a_{x_0} - \omega_{y_0}R' - R\omega_{x_0}\omega_{z_0}) dt + R^\circ\omega_{y_0}^\circ \right] \quad (2.6)$$

$$\omega_{x_0} = \frac{1}{R} \left[ \int_0^t (a_{y_0} + R\omega_{z_0}\omega_{y_0} - \omega_{x_0}R') dt + R^\circ\omega_{x_0}^\circ \right]$$

$$R' = \int_0^t (-a_{z_0} + R(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) - g(R)) dt + (R')^\circ, \quad R = \int_0^t R' dt + R^\circ$$



Сформируем теперь  $m_{x_0}$ ,  $m_{y_0}$ , моделируя соотношения (2.9), т. е. определив  $m_{x_0}$ ,  $m_{y_0}$  равенствами

$$m_{x_0} = \frac{1}{R} \left[ \int_0^t (a_{y_0} + R m_{z_0} m_{y_0} - m_{x_0} R') dt + R^\circ \omega_{x_0}^\circ \right] \quad (2.7)$$

$$m_{y_0} = \frac{1}{R} \left[ \int_0^t (-a_{x_0} - m_{y_0} R' - R m_{x_0} m_{z_0}) dt + R^\circ \omega_{y_0}^\circ \right]$$

Необходимые для формирования правых частей (2.8)  $R$  и  $R'$  получаются из двух последних уравнений (2.6), если в них  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$  заменить на  $m_{x_0}$ ,  $m_{y_0}$ ; тогда получим

$$R' = \int_0^t (-a_{z_0} + R(m_{x_0}^2 + m_{y_0}^2) - g(R)) dt + (R')^\circ, \quad R = \int_0^t R' dt + R^\circ \quad (2.8)$$

Легко видеть, что  $m_{z_0}$  можно сформировать как произвольную функцию времени

$$m_{z_0} = m_{z_0}(t) \quad (2.9)$$

Очевидно, что сформированные таким образом моменты обеспечивают тождественное выполнение равенств (2.2).

Привлекая теперь (1.8), находим  $z$ ,  $S$  и  $\varepsilon$

$$z = - \int_0^t [m_{x_0} \cos \varepsilon - m_{y_0} \sin \varepsilon - u(-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S)] dt + z^\circ$$

$$S = \int_0^t \frac{1}{\cos z} [m_{x_0} \sin \varepsilon + m_{y_0} \cos \varepsilon - u(-n_{31} \sin z \cos S - n_{32} \sin z \sin S + n_{33} \cos z)] dt + S^\circ \quad (2.10)$$

$$\varepsilon = \int_0^t \left[ m_{z_0} - \operatorname{tg} z (m_{x_0} \sin \varepsilon + m_{y_0} \cos \varepsilon) - \frac{u}{\cos z} (n_{31} \cos S + n_{32} \sin S) \right] dt + \varepsilon^\circ$$

Соотношения (2.1), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) образуют замкнутую систему уравнений идеальной (невозмущенной) работы инерциального ориентатора.

В (2.5) поле тяготения Земли полагалось центральным. Если считать, что сила притяжения Землей чувствительной массы ньютонометра лежит в плоскости, содержащей ось вращения Земли, то для проекций  $F_{x_2}$ ,  $F_{y_2}$ ,  $F_{z_2}$  на оси трехгранника, ориентированного по странам Света (ось  $Oy_2$  направлена на Север), имеем

$$F_{x_2} = 0, \quad F_{y_2} = F_{y_2}(R, \varphi), \quad F_{z_2} = F_{z_2}(R, \varphi) \quad (2.11)$$

Замечая, что

$$\cos(y_2 \zeta_0) \cos(x_1 y_2) = \cos(x_1 \zeta_0), \quad \cos(y_2 \zeta_0) \cos(y_1 y_2) = \cos(y_1 \zeta_0) \quad (2.12)$$

при помощи (1.2), (1.3), (1.4) получаем

$$F_{x_0} = (F_{y_2} / \cos \varphi) [(-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S) \cos \varepsilon + (-n_{31} \sin z \cos S - n_{32} \sin z \sin S + n_{33} \cos z) \sin \varepsilon]$$

$$F_{y_0} = (F_{y_2} / \cos \varphi) [(-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S) \sin \varepsilon + (-n_{31} \sin z \cos S - n_{32} \sin z \sin S + n_{33} \cos z) \cos \varepsilon] \quad (2.13)$$

$$F_{z_0} = F_{z_2}$$

Следовательно, чтобы учесть нецентральность поля тяготения Земли, необходимо вместо (2.5) использовать соотношения (2.13). Кроме того, так как  $F_{y_2}$ ,  $F_{z_2}$  являются функциями  $\varphi$ , следует добавить связь между  $\varphi$  и  $z$ ,  $S$ :

$$\sin \varphi = n_{31} \cos z \cos S + n_{32} \cos z \sin S + n_{33} \sin z \quad (2.14)$$

Как уже отмечалось выше,  $m_{z_0}(t)$  может быть выбрано произвольно.

Если положить

$$m_{z_0} = m_{y_0} \operatorname{tg} z - \frac{u}{\cos z} (n_{31} \cos S + n_{32} \sin S), \quad \varepsilon^0 = 0 \quad (2.15)$$

то тождественно  $\varepsilon \equiv 0$  и трехгранник  $x_0y_0z_0$  совпадает с трехгранником  $x_1y_1z_1$ , ориентация которого определяется координатной сеткой  $z$ ,  $S$ , а при совпадении систем координат  $\xi\eta\zeta$  и  $\xi_0\eta_0\zeta_0$  — координатной сеткой  $\varphi$ ,  $\lambda$ .

Другим условием, которое можно наложить на  $m_{z_0}$  для упрощения уравнений идеальной работы, является

$$m_{z_0} = 0 \quad (2.16)$$

Уравнения идеальной работы в координатах  $z$ ,  $S$  или  $\varphi$ ,  $\lambda$  для случаев (2.15) — (2.16) могут быть получены из основных уравнений (2.1), (2.3), (2.7) — (2.10), (2.13).

Отметим, что если  $R$  — известная функция координат  $z$ ,  $S$  или  $\varphi$ ,  $\lambda$  объекта и времени, то ньютонометр  $a_{z_0}$  может отсутствовать. Это может быть, например, при движении по поверхности океана, когда можно считать, что

$$R = a (1 - 1/2 e^2 \sin^2 \varphi) \quad (2.17)$$

где  $a$  — большая полуось, а  $e$  — эксцентриситет эллипсоида Клеро; или при полете вблизи земной поверхности, когда дополнительно к (2.17) измеряется с помощью радиовысотомера высота над поверхностью Земли. В этом случае из уравнений идеальной работы выпадают уравнения (2.8) и добавляется зависимость  $R$  от координат и показаний высотомера.

Выведенные выше уравнения идеальной работы инерциального ориентатора полностью определяют его состояние (в рамках прецессионной теории), только в том случае, если все элементы схемы не имеют погрешностей, начальное положение и начальная угловая скорость трехгранника  $xuz$  точно соответствуют положению и скорости трехгранника  $x_0y_0z_0$ , а начальные значения координат и скорости их изменения, вводимые в вычислительные устройства схемы, точно соответствуют координатам и скорости объекта в момент начала работы ориентатора.

При несоблюдении каких-либо из этих условий ориентатор, естественно, будет совершать движение, отличное от описываемого уравнениями идеальной работы, трехгранник  $xuz$  не будет совпадать с трехгранником  $x_0y_0z_0$ , а координаты объекта будут определяться с ошибками.

3°. Выведем уравнения ошибки. Учтем при выводе этих уравнений только основные инструментальные погрешности схемы: погрешности ньютонометров  $\Delta a_{x_0}$ ,  $\Delta a_{y_0}$ ,  $\Delta a_{z_0}$ , моменты  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$ , вызывающие свободные уходы гироскопов, и погрешность  $\delta m_{z_0}$  формирования  $m_{z_0}$ . Можно показать, что инструментальные погрешности в любой части схемы могут быть приведены к некоторым эквивалентным основным погрешностям.

Пусть возмущенное положение трехгранника  $Oxuz$  относительно трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  определяется малыми углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , так что на-

правляющие косинусы взаимного расположения этих трехгранников образуют таблицу, представленную здесь справа.

Тогда разности проекций абсолютной угловой скорости трехгранника  $Oxyz$  в возмущенном и невозмущенном движениях

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x_0 & 1 & -\gamma & \beta \\ y_0 & \gamma & 1 & -\alpha \\ z_0 & -\beta & \alpha & 1 \end{array} \quad (3.1)$$

$$\delta\omega_{x_0} = \alpha' + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta, \quad \delta\omega_{y_0} = \beta' - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha, \quad \delta\omega_{z_0} = \gamma' + \omega_{x_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha \quad (3.2)$$

Вариации показаний ньютонометров соответственно равны

$$\begin{aligned} \delta a_{x_0} &= a_{y_0}\gamma - a_{z_0}\beta + \Delta a_{x_0}, & \delta a_{y_0} &= -a_{x_0}\gamma + a_{z_0}\alpha + \Delta a_{y_0} \\ \delta a_{z_0} &= a_{x_0}\beta - a_{y_0}\alpha + \Delta a_{z_0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (2.1) имеем далее

$$\delta\omega_{x_0} = \delta m_{x_0} + \Delta m_{x_0}, \quad \delta\omega_{y_0} = \delta m_{y_0} + \Delta m_{y_0}, \quad \delta\omega_{z_0} = \delta m_{z_0} + \Delta m_{z_0} \quad (3.4)$$

Наконец, варьируя соотношения (2.7), (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \delta m_{x_0} &= \frac{1}{R} \left[ \int_0^t (\delta a_{y_0} + \delta R m_{z_0} m_{y_0} + R m_{z_0} \delta m_{y_0} + R m_{y_0} \delta m_{z_0} - \right. \\ &\quad \left. - R \delta m_{x_0} - \delta R m_{x_0}) dt + R^\circ \delta \omega_{x_0}^\circ + \delta R^\circ \omega_{x_0}^\circ - \delta R m_{x_0} \right] \\ \delta m_{y_0} &= \frac{1}{R} \left[ \int_0^t (-\delta a_{x_0} - R \delta m_{y_0} - \delta R m_{y_0} - \delta R m_{x_0} m_{z_0} - R m_{x_0} \delta m_{z_0} - \right. \\ &\quad \left. - R m_{z_0} \delta m_{x_0}) dt + R^\circ \delta \omega_{y_0}^\circ + \delta R^\circ \omega_{y_0}^\circ - \delta R m_{y_0} \right] \quad (\delta m_{z_0} = \delta m_{z_0}(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_0^t [-\delta a_{z_0} + \delta R (m_{x_0}^2 + m_{y_0}^2) + \\ &\quad + 2R (m_{x_0} \delta m_{x_0} + m_{y_0} \delta m_{y_0}) - \delta g(R)] dt + \delta (R)^\circ \end{aligned} \quad \left( \delta R = \int_0^t \delta R^\circ dt + \delta R^\circ \right)$$

При варьировании равенств (2.7) отброшены по малости вариации поправок на нецентральность поля тяготения Земли. Вариации изохронны, время не варьируется и бортовой задатчик времени полагается, таким образом, идеальным. Через  $\delta\omega_{y_0}^\circ$ ,  $\delta\omega_{x_0}^\circ$ ,  $\delta R^\circ$ ,  $\delta(R)^\circ$  обозначены погрешности ввода начальных данных.

Из (3.2) — (3.5), замечая, что

$$\delta g(R) = -2g\delta R/R \quad (3.6)$$

принимая во внимание уравнения идеальной работы, производя замену переменных

$$x = R\alpha, \quad y = R\beta \quad (3.7)$$

и вводя обозначение

$$\omega_0^2 = g/R \quad (3.8)$$

получаем следующие уравнения для определения  $x$ ,  $y$ ,  $\delta R$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} x'' + (\omega_0^2 - \omega_{x_0}^2 - \omega_{z_0}^2) x - (\omega_{x_0}\omega_{y_0} + \omega_{z_0}) y - \\ - 2\omega_{z_0}y' + (\omega_{x_0} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) \delta R + 2\omega_{x_0}\delta R' = \\ = \Delta a_{y_0} + R\Delta m_{x_0}' + 2R'\Delta m_{x_0} - R\omega_{z_0}\Delta m_{y_0} - R\omega_{y_0}\Delta m_{z_0} \\ y'' + (\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2) y - (\omega_{x_0}\omega_{y_0} - \omega_{z_0}) x + 2\omega_{z_0}x' + \\ + (\omega_{x_0}\omega_{z_0} + \omega_{y_0}) \delta R + 2\omega_{y_0}\delta R' = \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \delta R'' - (2\omega_0^2 + \omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \delta R - (\omega_{x_0} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}) x - (\omega_{y_0} - \omega_{x_0}\omega_{z_0}) y - \\ - 2\omega_{x_0}x' - 2\omega_{y_0}y' = -\Delta a_{z_0} - 2R\omega_{x_0}\Delta m_{x_0} - 2R\omega_{y_0}\Delta m_{y_0} \\ \gamma' = -\omega_{x_0}\beta + \omega_{y_0}\alpha + \delta m_{z_0} + \Delta m_{z_0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Начальными условиями уравнений (3.9), (3.10) будут величины

$$\begin{aligned} x^\circ = R^\circ\alpha^\circ, \quad y^\circ = R^\circ\beta^\circ, \quad \delta R^\circ, \quad \delta(R')^\circ, \quad \gamma^\circ \\ (x')^\circ = (R')^\circ\alpha^\circ + R^\circ(\delta\omega_{x_0}^\circ + \Delta m_{x_0}^\circ - \omega_{y_0}^\circ\gamma^\circ + \omega_{z_0}^\circ\beta^\circ) \\ (y')^\circ = (R')^\circ\beta^\circ + R^\circ(\delta\omega_{y_0}^\circ + \Delta m_{y_0}^\circ + \omega_{x_0}^\circ\gamma^\circ - \omega_{z_0}^\circ\alpha^\circ) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Перейдем к составлению уравнений ошибок координат  $z$ ,  $S$  и азимутального угла  $\varepsilon$ . Варьируя уравнения (2.10), получаем

$$\delta z' = -\delta m_{x_0} \cos \varepsilon + \delta m_{y_0} \sin \varepsilon + (m_{x_0} \sin \varepsilon + m_{y_0} \cos \varepsilon) \delta \varepsilon - \\ - u(n_{31} \cos S + n_{32} \sin S) \delta S \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \delta S' \cos z = \delta m_{x_0} \sin \varepsilon + \delta m_{y_0} \cos \varepsilon + \\ + (m_{x_0} \cos \varepsilon - m_{y_0} \sin \varepsilon) \delta \varepsilon + \operatorname{tg} z (m_{x_0} \sin \varepsilon + m_{y_0} \cos \varepsilon) \delta z + \\ + u \sin z (-n_{31} \sin S + n_{32} \cos S) \delta S + u \sec z (n_{31} \cos S + n_{32} \sin S) \delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon' \cos z = \delta m_{z_0} \cos z - \sin z (\delta m_{x_0} \sin \varepsilon + \delta m_{y_0} \cos \varepsilon) - \\ - \sin z (m_{x_0} \cos \varepsilon - m_{y_0} \sin \varepsilon) \delta \varepsilon + u (n_{31} \sin S - n_{32} \cos S) \delta S - \\ - [\sec z (m_{x_0} \sin \varepsilon + m_{y_0} \cos \varepsilon) + u \operatorname{tg} z (n_{31} \cos S + n_{32} \sin S)] \delta z \end{aligned}$$

Введением новых переменных  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\delta z \cos \varepsilon + \delta S \cos z \sin \varepsilon, \quad \beta_1 = \delta z \sin \varepsilon + \delta S \cos z \cos \varepsilon \\ \gamma_1 = \delta \varepsilon + \delta S \sin z \end{aligned} \quad (3.13)$$

уравнения (3.12) могут быть преобразованы к такому виду

$$\begin{aligned} \alpha_1' = \delta m_{x_0} + \beta_1 m_{z_0} - \gamma_1 m_{y_0}, \quad \beta_1' = \delta m_{y_0} - \alpha_1 m_{z_0} + \gamma_1 m_{x_0} \\ \gamma_1' = \delta m_{z_0} - \beta_1 m_{x_0} + \alpha_1 m_{y_0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Легко видеть, что переменные  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  представляют собой угловые погрешности определения координат и азимута.

Из (3.4) и (3.14), вводя еще раз новые переменные

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha, \quad \beta_2 = \beta_1 - \beta, \quad \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma \quad (3.15)$$

получаем вторую группу уравнений ошибки инерциального ориентатора

$$\begin{aligned} \alpha_2' - \omega_{z_0}\beta_2 + \omega_{y_0}\gamma_2 = -\Delta m_{x_0}, \quad \beta_2' - \omega_{x_0}\gamma_2 + \omega_{z_0}\alpha_2 = -\Delta m_{y_0} \\ \gamma_2' - \omega_{y_0}\alpha_2 + \omega_{x_0}\beta_2 = -\Delta m_{z_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Начальные условия дифференциальных уравнений (3.16) определяются из (3.13) и (3.15).

Если ньютонометр вдоль оси  $z_0$  отсутствует, а информация о величине  $R$  задается дополнительно, то из первой группы (3.9) уравнений ошибок выпадает третье уравнение. Если  $R$  задается либо постоянной величиной, либо функцией времени, то  $\delta R$  и  $\delta R'$ , входящие в первые два уравнения (3.9), будут известными (может быть, случайными) функциями времени. В том случае, когда  $R$  и  $R'$  определяются ориентатором как функции остальных двух координат объекта, необходимо добавить уравнения, получающиеся в результате варьирования этих функций. Так, если движение происходит по поверхности океана, то

$$\delta R = \delta R(\varphi) \leftarrow \Delta R \quad (3.17)$$

где  $\delta R(\varphi)$  получается в результате варьирования (2.17), (2.14), а  $\Delta R$  — инструментальная погрешность.

Уравнения ошибки (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) обладают значительной общностью. Эти уравнения являются уравнениями ошибки произвольной инерциальной системы автономного определения координат объекта с помощью ньютонометров и гироскопов. Они получены, по существу, непосредственно из законов Ньютона. Рассматриваемая конкретная схема использована лишь как канва для их вывода и какие-либо параметры этой схемы в левые части (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) не входят.

Ниже будет показано, что, например, частными случаями этих уравнений будут уравнения малых колебаний физического маятника с приведенной длиной, равной радиусу Земли [2, 9], уравнения двухгироскопической вертикали [4, 6], уравнения гиригоризонткомпасов, исследованные в работах [3, 5, 6, 7].

4°. Докажем, что уравнения (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) допускают группу поворотов на произвольный угол  $\vartheta(t)$  вокруг оси  $Oz_0$ . Это свойство следует уже из произвольности  $m_{z_0}(t)$  и произвольности вследствие этого угла  $\varepsilon$ , характеризующего ориентацию трехгранника в азимуте. Оно может быть доказано также и непосредственно. Перейдем в (3.9), (3.10), (3.16) к новым переменным  $x', y', \delta R', \gamma', (\delta R)'$ ,  $\alpha_1', \alpha_2', \beta_1', \beta_2', \gamma_1', \gamma_2'$  посредством неособого линейного преобразования

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, & y &= x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta & (4.1) \\ \alpha_1 &= \alpha_1' \cos \vartheta - \beta_1' \sin \vartheta, & \alpha_2 &= \alpha_2' \cos \vartheta - \beta_2' \sin \vartheta \\ \beta_1 &= \alpha_1' \sin \vartheta + \beta_1' \cos \vartheta, & \beta_2 &= \alpha_2' \sin \vartheta + \beta_2' \cos \vartheta \\ \gamma &= \gamma', & \gamma_1 &= \gamma_1', & \gamma_2 &= \gamma_2', & \delta R &= \delta R', & \delta R' &= (\delta R)' \end{aligned}$$

где  $\vartheta(t)$  — произвольная функция времени. Обратное (4.1) преобразование очевидно. Преобразование (4.1) переводит уравнения (3.9), (3.10), (3.16) в уравнения относительно новых переменных, причем вновь полученные уравнения сохраняют ту же форму, что и исходные. При этом коэффициенты и правые части преобразуются таким образом

$$\begin{aligned} \omega_{x_0}' &= \omega_{x_0} \cos \vartheta + \omega_{y_0} \sin \vartheta, & \omega_{y_0}' &= -\omega_{x_0} \sin \vartheta + \omega_{y_0} \cos \vartheta, & \omega_{z_0}' &= \omega_{z_0} + \vartheta' \\ R' &= R, & (R')' &= R', & (\omega_0^2)' &= \omega_0^2 \\ \Delta a_{x_0}' &= \Delta a_{x_0} \cos \vartheta + \Delta a_{y_0} \sin \vartheta, & \Delta a_{y_0}' &= -\Delta a_{x_0} \sin \vartheta + \Delta a_{y_0} \cos \vartheta \\ \Delta a_{z_0}' &= \Delta a_{z_0}, & \Delta m_{z_0}' &= \Delta m_{z_0}, & \delta m_{z_0}' &= \delta m_{z_0} & (4.2) \\ \Delta m_{x_0}' &= \Delta m_{x_0} \cos \vartheta + \Delta m_{y_0} \sin \vartheta, & \Delta m_{y_0}' &= -\Delta m_{x_0} \sin \vartheta + \Delta m_{y_0} \cos \vartheta \end{aligned}$$

Для доказательства подставим (4.1), (4.2) в (3.9), (3.10), (3.15), (3.16). Подстановка в третье уравнение (3.9), в уравнение (3.10) и последние уравнения (3.15), (3.16) сразу показывают справедливость высказанного утверждения для этих уравнений. После подстановки в первое и второе уравнения (3.9) необходимо умножить их соответственно на  $\cos \vartheta$  и на  $\sin \vartheta$  и сложить; при этом получается первое уравнение новой системы. Умножение на  $-\sin \vartheta$ ,  $\cos \vartheta$  и сложение дает второе уравнение. Аналогичным образом можно получить новые уравнения для  $\alpha'_1, \beta'_1$  и  $\alpha'_2, \beta'_2$  из первых двух уравнений (3.15), (3.16).

Из (4.1), (4.2) можно усмотреть, что обратное преобразование получается из прямого заменой  $\vartheta$  на  $-\vartheta$ ; наконец, легко устанавливается, что два последовательные преобразования  $\vartheta_1, \vartheta_2$  равносильны одному преобразованию такому, что  $\vartheta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2$ .

Указанное свойство уравнений (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) позволяет при анализе этой системы выбирать сопровождающий трехгранник  $Ox_0y_0z_0$  различным образом при различных законах движения объекта. В ряде случаев оказывается удобным трехгранник, одна из осей которого, например  $x_0$ , лежит в плоскости, содержащей вектор абсолютной скорости объекта и центр Земли. При этом угол  $\vartheta(t)$  находится, очевидно, из условия  $\omega_{x_0}' = 0$ , что дает

$$\operatorname{tg} \vartheta = \omega_{x_0} / \omega_{y_0} \quad (4.3)$$

Уравнения этого случая получаются из (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) при  $\omega_{x_0} = 0$ .

В большинстве случаев в задачу системы навигации входит определение координат объекта относительно Земли, поэтому целесообразным выбором угла  $\vartheta$  будет и такой, когда одна из осей лежит в плоскости, содержащей вектор относительной скорости и центр Земли.

Удобным оказывается также азимутально свободный трехгранник, в котором угол  $\vartheta$  определяется из условия  $\omega_{z_0}' = 0$ ; откуда следует, что

$$\vartheta = - \int_0^t \omega_{z_0} dt \quad (4.4)$$

Соответствующие уравнения получаются из системы (3.9), (3.10), (3.15) (3.16) при  $\omega_{z_0} = 0$ . Так как в этом случае уравнения не зависят от  $\omega_{z_0}$ , а  $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}$  ограничены верхним пределом скорости объекта, то анализ уравнений в этой форме иногда облегчается.

При выборе  $\vartheta$  таким, что трехгранник  $x_0y_0z_0$  становится ориентированным по странам Света, оказывается удобным анализ уравнений (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) для объекта, неподвижного относительно Земли, или движущегося вдоль параллели.

Если ньютонометр вдоль оси  $z_0$  отсутствует, то при  $\Delta a_{x_0} = \Delta a_{y_0} = \Delta m_{x_0} = \Delta m_{y_0} = \Delta m_{z_0} = 0$  первые два уравнения (3.9) превращаются в уравнения малых колебаний специального физического маятника [2,9]. Левые части их имеют вид [2]

$$\begin{aligned} x'' + (\omega_0^2 - \omega_{x_0}^2 - \omega_{z_0}^2) x - (\omega_{x_0}\omega_{y_0} + \omega_{z_0}') y - 2\omega_{z_0}y' &= 0 \\ y'' + (\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2) y - (\omega_{x_0}\omega_{y_0} - \omega_{z_0}') x + 2\omega_{z_0}x' &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

К уравнениям (4.5) сводятся уравнения малых колебаний двухгирскопической вертикали [4] гироскопического компаса Аншютца — Геккелера [3] и схемы автономного определения координат объекта [1].

В самом деле, например, уравнения малых колебаний гироскопического компаса имеют до упрощения [3] такой вид

$$-ml(v\alpha)' \mp lF\beta = -\omega 2B\delta \sin \sigma, \quad \beta' \mp (v/R)\alpha = \omega\gamma \quad (4.6)$$

$$\gamma' \mp (2B\delta \sin \sigma)/mlR = -\omega\beta, \quad -(2B\delta \sin \sigma)' \mp l(F - mv^2/R)\gamma = \omega ml\alpha$$

Здесь  $\beta$  и  $\gamma$  — углы отклонения платформы гироскопического компаса относительно ребер трехгранника Дарбу  $Ox_0y_0z_0$ , ось  $Ox_0$  которого направлена по вектору абсолютной скорости  $v$  движения объекта;  $m, l, B, R = R^0$  — постоянные,

$$v = \omega_{y_0}R, \quad \omega = \omega_{z_0}, \quad F = mg_0 \quad (4.7)$$

Исключая из (4.6)  $\alpha$  и  $2B\delta \sin \sigma$  и используя (4.7), получаем

$$\beta'' \mp \omega_0^2\beta = \omega_{z_0}^2\beta \mp \omega_{z_0}\gamma' \mp 2\omega_{z_0}\gamma', \quad \gamma'' \mp \omega_0^2\gamma = (\omega_{y_0}^2 \mp \omega_{z_0}^2)\gamma - \omega_{z_0}\beta' - 2\omega_{z_0}\beta' \quad (4.8)$$

Так как в рассматриваемом случае в уравнениях (4.5) следует положить  $\omega_{x_0} = 0$ , а  $\beta, \gamma$  уравнений (4.8) соответствуют  $\alpha, \beta$  уравнений (4.5), то эти уравнения идентичны. Идентичность уравнений двухгирскопической вертикали [4] и схемы, рассмотренной в работе [1], доказывается аналогично.

В работах [1,3,4] дано решение упрощенных уравнений (4.6) с помощью комплексно-значной подстановки. Введенное упрощение заключается в том, что в (4.8)  $v$  полагается равным 0. Это равносильно упрощению  $\omega_{x_0} = \omega_{y_0} = 0$  в уравнениях (4.5). Записав уравнения (4.5) относительно азимутально-свободного трехгранника, получаем в этом случае

$$(\alpha')'' \mp \omega_0^2\alpha' = 0, \quad (\beta')'' \mp \omega_0^2\beta' = 0 \quad (4.9)$$

Решение уравнений (4.9) очевидно.

Необходимо заметить, что в работах [1,2] была отмечена равносильность уравнений (4.6) и (4.5), а в работе [2]; кроме того, было показано, что вид уравнений (4.5) сохраняется при преобразовании (4.1), (4.2) и замечено, что пренебрежение  $\omega_{y_0}$  в (4.8) приводит уравнения к гармоническим (4.9). По-видимому, эти замечания ускользнули от внимания и поэтому в работах [5, 6] были затрачены значительные усилия на доказательство приводимости уравнений (4.8) при  $\omega_{y_0} = 0$  к уравнениям с постоянными коэффициентами.

В работе [7] исследована устойчивость системы (4.6) при постоянных  $\omega$  и  $v$  и малых значениях переменных. Условие устойчивости по Ляпунову, выведенное в этих работах

$$\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 > 0 \quad (4.10)$$

может быть получено и из исследования характеристического уравнения системы (4.8) по Гурвицу, если в нее ввести сколь угодно малую полную диссипацию.

Три уравнения (3.9) образуют замкнутую систему и могут рассматриваться независимо от остальных. Они определяют вместе с (3.7) угловые колебания платформы ориентатора относительно трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  по углам  $\alpha, \beta$  и величину  $\delta R$ . Если найти из них  $x, y$  и  $\delta R$ , то с помощью (3.7) квадратурой определяется из уравнения (3.10) угол  $\gamma$  азимутальных колебаний платформы. Уравнения (3.16) образуют также замкнутую систему. Если найти из нее  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  и воспользоваться решениями  $x, y$  уравнений (3.9) и соотношениями (3.7) и (3.15), то можно получить решения

для  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , определяющие погрешности вычисленных ориентатором координат и азимутального угла,

Уравнения (3.9), (3.10), (3.16) являются в общем случае уравнениями с переменными коэффициентами; правые части могут быть как явными, так и случайными функциями времени. Исследование их поэтому связано со значительными трудностями.

Лишь для немногих частных случаев уравнения (3.9), (3.10), (3.16) приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами. Такими случаями будут: неподвижное в системе координат  $O'\xi_*\eta_*\zeta_*$  основание (в этом случае  $\omega_z$  может быть произвольной функцией времени); движение с постоянной скоростью на постоянном удалении от центра Земли в плоскости, проходящей через ее центр; движение с постоянной скоростью вдоль параллели.

Уже плоское движение на постоянном удалении от центра Земли в частном случае выбора закона изменения скорости объекта приводит систему (3.9) к уравнению Маттье — Хилла.

Система (3.16) в общем случае движения объекта совпадает с уравнениями, которые определяют направляющие косинусы  $n_{ij}$  осей трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  в системе координат  $O'\xi_*\eta_*\zeta_*$  по заданным  $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}$ . Эта система имеет первый интеграл и сводится к уравнению Риккати [10]. Однако, если движение объекта задано так, что  $n_{ij}$  представляют собой известные функции времени, система (3.16) может быть проинтегрирована до конца.

Анализ уравнений (3.9), (3.10), (3.16) может быть облегчен тем обстоятельством, что это — уравнения в вариациях, и большой точности их решения не требуется. Поэтому возможно применение различных приближенных методов исследования. Причем, для различных классов движения объекта могут понадобиться и различные методы. Такого рода классами движений могут быть, например, движение морских судов; движение самолетов в атмосфере; кеплеровы и близкие к ним движения.

Первые движения характерны тем, что в них скорость перемещения относительно Земли  $v_1$  мала по сравнению с окружной скоростью движения точек земного экватора,

$$|(v_1/R) \ll u \quad (4.11)$$

а также мало изменение расстояния от центра Земли, обусловленное отличием формы ее поверхности от сферы. Время непрерывной работы в этом классе движений может оказаться большим. В качестве исходных решений, подлежащих уточнению приближенными методами, в этом случае могут быть взяты решения для неподвижного относительно Земли основания.

Для второго класса движений скорость значительно больше окружной скорости вращения Земли, но существенно меньше первой космической скорости, т. е.

$$u^2 \ll \omega_{x_0}^2 \ll \omega_0^2, \quad u^2 \ll \omega_{y_0}^2 \ll \omega_0^2 \quad (4.12)$$

мало изменение  $R$  и, сравнительно с первым случаем, невелико время непрерывной работы. Для этого класса исходным может быть решение для случая неподвижного в абсолютном пространстве основания, либо для случая плоского движения в системе координат  $O'\xi_*\eta_*\zeta_*$ .

Наконец, для кеплеровых и близких к ним движений, когда  $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}$  сравнимы с  $\omega_0$ , можно в качестве исходных решений использовать случай плоского движения, а для кеплеровых движений с малым эксцентриситетом орбиты — случай плоского движения на постоянном удалении от центра Земли (круговая орбита).

Иногда полезной формой уравнения (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) оказывается задание их в проекциях на оси системы координат  $O'\xi_*\eta_*\zeta_*$

$$\begin{aligned}
 (\delta\xi_*')'' + \frac{\omega_0^2}{R^2} [(\eta_*^2 + \zeta_*^2 - 2\xi_*^2) \delta\xi_*' - 3\xi_*\eta_*\delta\eta_*' - 3\xi_*\zeta_*\delta\zeta_*'] &= \quad (4.13) \\
 &= -\Delta a_{\xi_*}^* - 2\eta_*\Delta m_{\zeta_*}^* + 2\zeta_*\Delta m_{\eta_*}^* - \eta_*(\Delta m_{\xi_*}^*)' + \zeta_*(\Delta m_{\eta_*}^*)' \\
 (\delta\eta_*')'' + \frac{\omega_0^2}{R^2} [(\zeta_*^2 + \xi_*^2 - 2\eta_*^2) \delta\eta_*' - 3\eta_*\zeta_*\delta\zeta_*' - 3\eta_*\xi_*\delta\xi_*'] &= \\
 &= -\Delta a_{\eta_*}^* - 2\zeta_*\Delta m_{\zeta_*}^* + 2\xi_*\Delta m_{\zeta_*}^* - \zeta_*(\Delta m_{\xi_*}^*)' + \xi_*(\Delta m_{\zeta_*}^*)' \\
 (\delta\zeta_*')'' + \frac{\omega_0^2}{R^2} [(\xi_*^2 + \eta_*^2 - 2\zeta_*^2) \delta\zeta_*' - 3\xi_*\zeta_*\delta\xi_*' - 3\eta_*\zeta_*\delta\eta_*'] &= \\
 &= -\Delta a_{\zeta_*}^* - 2\xi_*\Delta m_{\eta_*}^* + 2\eta_*\Delta m_{\xi_*}^* - \xi_*(\Delta m_{\eta_*}^*)' + \eta_*(\Delta m_{\xi_*}^*)' \\
 R^2 &= \xi_*^2 + \eta_*^2 + \zeta_*^2
 \end{aligned}$$

Для определения погрешностей координат

$$\delta\xi_* = \delta\xi_*' + \delta\xi_*'', \quad \delta\eta_* = \delta\eta_*' + \delta\eta_*'', \quad \delta\zeta_* = \delta\zeta_*' + \delta\zeta_*'' \quad (4.14)$$

к (4.14) добавляются соотношения

$$\delta\xi_*'' = \eta_*\gamma_* - \zeta_*\beta_*, \quad \delta\eta_*'' = -\xi_*\gamma_* + \zeta_*\alpha_*, \quad \delta\zeta_*'' = \xi_*\beta_* - \eta_*\alpha_* \quad (4.15)$$

где  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$ ,  $\gamma_*$  находятся из уравнений

$$\alpha_* = \Delta m_{\xi_*}, \quad \beta_* = \Delta m_{\eta_*}, \quad \gamma_* = \Delta m_{\zeta_*} \quad (4.16)$$

Из (4.16) и (3.16) и следует интегрируемость (3.16) при заданных  $n_{ij}$ .

Структура уравнений (4.13) — (4.16) аналогична уравнениям (3.9), (3.10), (3.15), (3.16). Они могут быть получены либо проектированием уравнений (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) на оси  $O'\xi_*\eta_*\zeta_*$ , либо выведены непосредственно как уравнения ошибок инерциальной системы, в которой замер ускорений производится по направлениям  $O\xi_*$ ,  $O\eta_*$ ,  $O\zeta_*$ , неизменно ориентированным в пространстве. Уравнения (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) сохраняют свою форму при переходе к любому трехграннику  $\xi_*^\circ\eta_*^\circ\zeta_*^\circ$ , ориентация которого относительно  $\xi_*\eta_*\zeta_*$  не меняется.

Автор благодарен А. Ю. Ишлинскому и В. Н. Кошлякову за обсуждение настоящей работы.

Поступила 17 X 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
2. Андреев В. Д. Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 6.
3. Ишлинский А. Ю. К теории гиригоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
4. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
5. Кошляков В. Н. О приводимости уравнений движения гиригоризонткомпаса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
6. Ляшенко В. Ф. О приводимости уравнений движения гиригоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
7. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гириорамы. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
8. Андреев В. Д. Об одном случае навигации объекта с помощью гириполукompаса и доплеровского измерителя скорости. Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1963, № 6.
9. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
10. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.