Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

К ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Обсуждается одна возможная интерпретация условий, определяющих оптимальный восстанавливающий сигнал в линейной наблюдаемой системе.

§ 1. В теории оптимальных процессов наряду с другими важными проблемами играют существенную роль две задачи.

1. Задача об управлении, т. е. задача о выборе сил, которые переводят управляемый объект из одного заданного состояния в другое.

2. Задача о наблюдении, т. е. задача об операции, которая определяет неизвестные текущие координаты объекта по доступным наблюдению величинам.

Эти задачи рассматривались, в частности, в рамках теории оптимальных процессов, базирующейся на принципе максимума Л. С. Понтрягина [1], и с позиций теории динамического программирования Р. Беллмана [2]. Задачи о наблюдении и управлении для линейных систем при условиях минимума квадратичных оценок качества изучены в работах Р. Калмана [3], причем установлена дуальность между задачами об управлении и наблюдении. Ряд работ посвящен прикладным задачам управления и наблюдения (см., например, [4]).

Один из возможных подходов к линейным задачам *1* и *2* связан с теорией L-проблемы моментов [5]. Такой подход к задаче об управлении был предложен в работе [6]. Идея указанного метода состоит в том, что задачи о вычислении управляющих сил или задачи о вычислении восстанавливающих сигналов интерпретируются как проблемы построения линейных функционалов, принимающих заданные значения на некоторых известных элементах. При этом задача должна трансформироваться таким образом, чтобы ограничения или минимизируемые оценки выражались через норму искомого функционала. Цель настоящей статьи — интерпретировать в смысле задачи о наблюдении и с точки зрения принципа дуальности те соотношения, которые определяют оптимальные решения задач *1* и *2* при подходе к этим задачам как к L-проблемам моментов.

§ 2. Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = A\ (t)\ x + B\ (t)\ u \tag{2.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат управляемого объекта; u — r-мерный вектор управляющих сил; $A\ (t)$, $B\ (t)$ — непрерывные или кусочно-непрерывные матрицы-функции соответствующих измерений; t — время.

Примечание 2.1. В уравнении (2.1) координаты $u_1, \ldots, u_r$ вектора u либо являются величинами сил, реально приложенных к объекту, либо u_i — это величины, связанные так или иначе с приложенными управляющими силами и введенные в уравнение (2.1) в форме, удобной для исследования задачи.

Рассмотрим сначала задачу об управлении.

Задача 2.1. Даны начальное состояние $\{t^\circ, x^\circ\}$ объекта и многообразие M конечных его состояний $\{t', x'\}$, описываемое параметрическими уравнениями

$$x = f\,[z], \qquad t = t^\circ + \vartheta\,[z] \tag{2.2}$$

где z — k-мерный вектор параметров, ограниченный, может быть, некоторым условием, которое запишем символически

$$z \in Z \tag{2.3}$$

Кроме того, могут быть даны дополнительные ограничения и связи.

Задача состоит в определении значений z° и функции $u\,(t)$ $(t^\circ \leqslant t \leqslant t^\circ + \vartheta)$, удовлетворяющих заданным ограничениям, и таких, что при $u = u\,(t)$ существует движение $x\,(t)$ системы (2.1), удовлетворяющее равенствам

$$x\,(t^\circ) = x^\circ, \qquad x\,(t') = f\,[z^\circ], \qquad t' = t^\circ + \vartheta\,[z^\circ] \tag{2.4}$$

Опишем для полноты изложения подход к решению задачи 2.1. Решение $x\,(t)$ уравнения (2.1) запишем в форме

$$x\,(t) = X\,[t^\circ, t]\,x^\circ + \int_{t^\circ}^{t} X\,[t^\circ, t] X^{-1}\,[t^\circ, \tau]\,B\,(\tau)\,u\,(\tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

где X — фундаментальная матрица решений уравнения (2.1) при $u \equiv 0$. Подставим $x\,(t) = f\,[z]$ и $t = t^\circ + \vartheta\,[z]$ в (2.5) и преобразуем полученное равенство к виду

$$\int_0^{\vartheta[z]} G\,[z, t^\circ, \tau]\,v(z, t^\circ, \tau)\,d_\tau\zeta\,(z, t^\circ, \tau) = c\,(z) \tag{2.6}$$

или в координатах

$$\left\{\int_0^{\vartheta} G\,[z, t^\circ, \tau]\,v\,[z, t^\circ, \tau]\,d_\tau\zeta\,(z, t^\circ, \tau)\right\}_i = c_i(z) \tag{2.7}$$

таким образом, чтобы левые части (2.7) можно было истолковать как значения некоторого линейного функционала φ (порожденного функциями v и ζ) на известных элементах $g^{(i)}\,(z, t^\circ, \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, определенных матрицей G, и чтобы при этом заданные условия выражались в виде ограничения

$$\|\varphi\|^* \leqslant 1 \tag{2.8}$$

на норму $\|\varphi\|^*$ функционала φ. Здесь величины $v\,(z, t^\circ, \tau)$ и $d_\tau\zeta\,(z, t^\circ, \tau)$ совпадают с величинами $u\,(\tau)$ и $d\tau$ соответственно или связаны с ними некоторым преобразованием, которое вводится с целью интерпретации заданных ограничений в форме (2.8). Задача 2.1 свелась к построению функционала $\varphi\,[t^\circ, g\,(\tau)]$, удовлетворяющего условиям (2.8)

$$\varphi\,[t^\circ, g^{(i)}\,(z, t^\circ, \tau)] = c_i\,(z) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Будем обозначать символом $q \cdot l$ скалярное произведение векторов q и l. При фиксированном z задача (2.9) имеет решение $\varphi\,[t^\circ, g\,(\tau)]$ тогда и только тогда [5], когда

$$\alpha\,(t^\circ, z) = \min\nolimits_l \left(\left\|\sum_{i=1}^{n} l_i g^{(i)}\,(z, t^\circ, \tau)\right\|\right) > 0 \quad \text{при } c\,(z)\,l = 1 \tag{2.10}$$

где $\| g(\tau) \|$ — норма в функциональном пространстве $\{g(\tau)\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, на котором определен функционал φ и которое содержит, в частности, элементы $g^{(i)}$. При этом минимальная норма $\| \varphi^\circ \|^*$ функционала φ, удовлетворяющего условиям (2.9), определяется равенством

$$\| \varphi^\circ \|^* = \frac{1}{\alpha(z, t^\circ)} \tag{2.11}$$

а сам функционал φ° удовлетворяет условию

$$\varphi^\circ\, [t^\circ, g^\circ] = \max_\varphi (\varphi\, [t^\circ, g^\circ]) = 1 \qquad \text{при } \| \varphi \|^* = \alpha^{-1} \tag{2.12}$$

Здесь $g^\circ = \Sigma\, l_i{}^\circ g^{(i)}$ — решение задачи (2.10). Следовательно, задача 2.1 при ограничении (2.8) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\alpha(t^\circ) = \max_z \alpha(t^\circ, z) \geqslant 1 \qquad \text{при } z \in Z \tag{2.13}$$

или

$$\sup_z \alpha(t^\circ, z) > 1 \qquad \text{при } z \in Z \tag{2.14}$$

если верхняя грань $\alpha(t^\circ, z)$ не достигается при $z \in Z$.

Примечание 2.2. При рассмотрении задачи (2.8), (2.9) сделана ссылка на работу [5]. В работе [5] предполагается, что элементы $g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}$ являются линейно независимыми. Здесь линейная независимость $g^{(i)}$ не предполагается. Однако это не препятствует использованию результатов из работы [5]. Действительно, проверим, например, достаточность условий (2.10). Пусть условие (2.10) выполнено. Примем для определенности, что элементы $g^{(1)}, \ldots, g^{(m)}$ линейно независимы и

$$g^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} g^{(j)} \qquad (i = m + 1, \ldots, n) \tag{2.15}$$

Условие (2.10) может, очевидно, выполняться тогда лишь при условии

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} c_j \qquad (i = m + 1, \ldots, n) \tag{2.16}$$

причем справедливо равенство

$$\min_l \left(\left\| \sum_{i=1}^{n} l_i g^{(i)} \right\|, \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 1 \right) = \min_l \left(\left\| \sum_{j=1}^{m} l_j g^{(j)} \right\|, \sum_{j=1}^{m} l_j c_j = 1 \right) \tag{2.17}$$

Из (2.15), (2.16) следует, что условия (2.9) достаточно выполнить лишь при $j = 1, \ldots, m$, так как при $i > m$ эти условия выполняются автоматически. Условия (2.9) для $i = 1, \ldots, m$ при условии (2.10) выполнить можно в соответствии с результатом [5], так как элементы $g^{(1)}, \ldots, g^{(m)}$ линейно независимы. Утверждение о достаточности условий (2.10) для разрешимости задачи (2.9) без предположения о независимости $g^{(i)}$ доказано, причем вследствие (2.17) доказано и равенство (2.11). Аналогичным образом проверяется необходимость условий (2.10). Отметим, что теорема о разрешимости L-проблемы, приведенная в книге [11] на стр. 100, оговорками о линейной независимости элементов $g^{(i)}$ не сопровождается.

Настоящее примечание вызвано дискуссией с Н. Е. Кириным, которого автор благодарит за эту дискуссию.

2.3. Схема сведе́ния задачи 2.1 к L-проблеме моментов сохраняется без существенных изменений и в случае, когда условиями залегания на многообразии M стеснены не только конечные значения $x(t')$, но также и значения $x(t_j)$ в какие-либо другие моменты времени, причем многообразие M определяется системой уравнений

$$x = f^{[j]}\, [z], \qquad t_j = t^\circ + \vartheta^{[j]}\, [z] \qquad (j = 1, \ldots, \delta)$$

и должны выполняться равенства $x(t_j) = f^{[j]}\, [z]$.

2.4. При сравнении задачи 2.1 с задачей о наблюдении с целью упрощения выкладок будем предполагать, что в (2.1) $u(t)$ — скалярная величина, $B(t) = b(t)$ — n-вектор, и ограничимся в L-проблеме простейшими функциональными пространствами, т. е. в равенствах (2.7) будем считать $v(z, t^\circ, \tau) = u(\tau)$, $d_\tau\zeta(z, t^\circ, \tau) = d\tau$ или $v \equiv 1$, $u(\tau)\,d\tau = d_\tau\zeta(\tau)$. Тогда элементы $g^{(i)}$ и величины c_i в (2.7), (2.9) имеют вид

$$g^{(i)}(z, t^\circ, \tau) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ij}(t^\circ, t^\circ + \vartheta)\, x_{jk}^{-1}(t^\circ, t^\circ + \tau)\, b_k(t^\circ + \tau) \qquad (2.18)$$

$$c_i(z) = f_i[z] - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t^\circ, t^\circ + \vartheta)\, x_j^\circ \qquad (2.19)$$

где x_{ij} и x_{ij}^{-1} — соответственно элементы матриц X и X^{-1}.

2.5. Максимум (2.13) достигается на Z, если функции $c_i(z)$ и $\vartheta[z]$ непрерывны и Z — ограниченное замкнутое множество. Справедливость этого утверждения следует из неравенства

$$\limsup \alpha(t^\circ, z) \leqslant \alpha(t^\circ, z_0) \qquad \text{при } c(z) \to c(z_0),\ v[z] \to v[z_0]$$

которому удовлетворяет функция $\alpha(t^\circ, z)$.

§ 3. Рассмотрим задачу о наблюдении. Пусть дана система

$$dx / dt = Q(t)\, x \qquad (3.1)$$

$$y = H(t)\, x \qquad (3.2)$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат объекта; y — m-мерный вектор наблюдаемых координат; $Q(t)$, $H(t)$ — непрерывные или кусочно-непрерывные матрицы-функции, уравнения (3.2) неразрешимы однозначно относительно вектора x.

Задача 3.1. Даны число $\vartheta > 0$ и многообразие N величин $\gamma[x, z]$, из которого следует выбрать величину $\gamma(t + \vartheta)$, подлежащую определению по наблюдению вектора $y(t + \tau)$ на отрезке времени $0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta$.

Пусть многообразие N описывается параметрическим уравнением

$$\gamma[x, z] = p(z)\cdot x \qquad (3.3)$$

где z — k-мерный вектор, ограниченный, может быть, некоторым условием (2.3).

Задача состоит в определении линейного функционала $\varphi[t, y(\tau)]$, определенного на m-мерных вектор-функциях $y(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ и удовлетворяющего при каждом из рассматриваемых значений $t \in T$ условию

$$\varphi[t, y(t + \vartheta)] = p(z)\cdot x(t + \vartheta) \qquad (3.4)$$

где $x(t)$ — движение системы (3.1), $z \in Z$ и вектор $y(t)$ определен равенством (3.2). Могут быть даны дополнительные условия.

Примечание 3.1. Наблюдаемая функция $y(t + \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ может быть связана с движением $x(t + \tau)$ более сложным линейным соотношением, чем (3.2). Например, может быть дано соотношение

$$y(t + \tau) = Y(t, t + \tau)\, y(t) + \int_0^\tau G[t, \tau, t + \zeta]\, x(t + \zeta)\, d\zeta \qquad (3.5)$$

вытекающее из дифференциальной связи $dy / dt = D(t)\, y + C(t)\, x$. Приведенная ниже схема рассуждений легко распространяется на случаи, подобные (3.5).

Если заданные условия сводятся к ограничению (2.8) нормы функционала φ (3.4) или к требованию $\|\varphi\|^* = \min$ при каждом $t \in T$, или $\sup_t (\|\varphi\|^*) = \min$ для какой-нибудь нормы $\|\varphi\|^*$, то задача 3.1 сводится к L-проблеме. В самом деле, решение $x(t)$ уравнения (3.1) удовлетворяет равенству $x(t+\tau) = F(t, t+\tau)\, x(\tau)$, где $F(t^\circ, t)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1). Следовательно, уравнение (3.4) приводится к уравнению

$$\varphi\, [t, H(t+\tau)\, F(t, t+\tau\, F^{-1}(t, t+\vartheta)\, x(t+\vartheta)] = p(z)\, x(t+\vartheta) \quad (3.6)$$

Учитывая линейный характер функционала φ и приравнивая коэффициенты при $x_i(t+\vartheta)$ в левой и правой частях (3.6), получим, как и выше, систему уравнений (2.9), где $t^\circ = t$ и

$$c_i(z) = p_i(\ ) \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (3.7)$$

а элементы $g^{(i)}(z, t, \tau)$ выражаются известным образом через H, F и F^{-1}. Следовательно, задача (3.4) при фиксированных z и t разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.10) (при $c(z) = p(z)$). Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 3.1 при ограничении (2.8) при данном $t = t^\circ$ даются неравенством (2.13) или неравенством (2.14). Минимальная норма $\|\varphi^\circ\|^*$ функционала φ°, разрешающего задачу (3.4) при данных t и z, дается равенством (2.11). Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 3.1 при ограничении (2.8) при всех $t \in T$ определяются неравенствами

$$\max_z \inf_t \alpha(t, z) \geqslant 1 \quad \text{или} \quad \sup_z \inf_t \alpha(t, z) > 1 \quad (3.8)$$

Для упрощения выкладок ограничимся дальше случаем, когда y — скаляр и норма $\|\varphi\|^*$ относится к одному из стандартных функциональных пространств. Тогда $y = h(t)\, x$, где h — n-мерный вектор. Элементы $g^{(i)}$ в условиях (2.9) определяются в этом случае равенствами

$$g^{(i)}(z, t, \tau) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ji}^{-1}(t, t+\vartheta)\, f_{kj}(t, t+\tau)\, h_k(t+\tau) \quad (3.9)$$

где f_{ij} и f_{ij}^{-1} — соответственно элементы матриц F и F^{-1}. Если матрицы A, Q, B и H в уравнениях (2.1), (3.1) и (3.2) связаны соотношением

$$Q = -A^*, \qquad H = B^* \quad (3.10)$$

где знак $*$ означает транспонирование, то при $t = t^\circ$ элементы (2.18) и (3.9) совпадают, как это следует из известных свойств линейных систем [7]. Следовательно, задача 3.1 о наблюдении величины $p(z)\cdot x(t+\vartheta)$ по функции $y(t+\tau)$ для системы (3.1), (3.2) при условиях (3.10) эквивалентна задаче 2.1 об управлении системой (2.1) из точки $t^\circ = t$, $x(t^\circ) = x^\circ$ в точку $x(t^\circ+\vartheta) = f[z]$, если векторы $p(z)$, x° и $f[z]$ связаны соотношением $p(z) = f[z] - X(t^\circ, t^\circ+\vartheta)\, x^\circ$.

Это утверждение является здесь выражением принципа дуальности Р. Калмана [3]. Использование L-проблемы в комбинации с промежуточными преобразованиями позволяет рассмотреть соотношение дуальности для довольно широкого круга задач с различными типичными ограничениями и связями.

§ 4. Рассмотрим интерпретацию условий (2.10) разрешимости задач 2.1 и 3.1, а также дадим истолкование условий (2.11) — (2.14). Введем сначала некоторые определения и обозначения. Пусть функция $\eta(\tau)$ определена на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ и пусть эта функция рассматривается как элемент некоторого функционального пространства с нормой $\rho(\eta)$. Будем называть величину $\rho(\eta)$ интенсивностью сигнала $\eta(\tau)$. Предположим, что класс функций $\{\zeta(\tau)\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ определяет пространство [8] линейных функционалов $\varphi(\eta)$, определенных на функциях $\eta(\tau)$ с нормой $\rho(\eta)$. Норму функции $\zeta(\tau)$, равную норме соответствующего функционала φ, будем называть интенсивностью сигнала $\zeta(\tau)$, сопряженной с $\rho(\eta)$, и будем обозначать ее символом $\rho^*(\zeta)$. Напротив, если функция $\eta(\tau)$ выбрана из класса функций, определяющих на некотором пространстве $\{\xi(\tau)\}$ линейные функционалы $\varphi(\xi)$ с нормой $\rho(\eta)$, то норму функций $\xi(\tau)$ будем называть интенсивностью сигнала $\xi(\tau)$, исходной для $\rho(\eta)$, и будем обозначать ее $\rho_*(\xi)$.

Рассмотрим наблюдаемую систему (3.1), (3.2). Пусть имеется лишь возможность измерять величину $y(t)$ с ошибкой $w(t)$, вызываемой некоторой помехой. Величину $r(t) = y(t) + w(t)$ будем называть полным сигналом, величину $w(t)$ назовем помехой, функцию $y(t)$ (3.2) будем называть полезным сигналом. Предполагается, что точные значения функции $w(t)$ неизвестны, но определен класс допустимых функций $\{w(t)\}$ и задана оценка какой-нибудь интенсивности $\rho(w)$ сигнала $w(t+\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$. Примем для определенности, что $w(t)$ — непрерывная функция и

$$\rho(w) = \max_\tau |w(t+\tau)| \quad \text{для } t \in T \quad \text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{4.1}$$

причем задано ограничение

$$\rho(w) \leqslant \delta \quad (\text{для } t \in T) \tag{4.2}$$

Примечание 4.1. Следующие ниже рассуждения имеют смысл и в общем случае $\rho(w)$ и могут быть конкретизированы для других типичных интенсивностей $\rho(w)$, например для случая

$$\rho(w) = \left[\int_0^\vartheta |w(t+\tau)|^p d\tau\right]^{1/p}$$

При этом в соответствии с изменением характера $\rho(w)$ должны лишь меняться соответствующим образом сопряженные интенсивности $\rho^*(w)$.

Если нет дополнительных ограничений на операцию φ, разрешающую задачу 3.1, то естественно поставить вопрос об определении такой операции, вычисляющей $p(z)\cdot x(t+\vartheta)$, которая при наличии помехи $w(t)$ (4.2) дает наименьшую абсолютную ошибку. Разрешающая операция

$$\varphi[t, r(t+\tau)] = p(z)\cdot x(t+\vartheta) + \omega_w \qquad (\omega_w \text{ — ошибка}) \tag{4.3}$$

ищется в форме линейного функционала

$$\varphi[t, r(t+\tau)] = \int_0^\vartheta r(t+\tau)\, d_\tau \zeta(z, t, \tau) \tag{4.4}$$

порожденного функцией $\zeta(z, t, \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ с нормой

$$\|\varphi^*\| = \rho^*(\zeta) = \int_0^\vartheta |\, d_\tau \zeta(z, t, \tau)| \tag{4.5}$$

где $\zeta(z, t, \tau)$ при каждом фиксированном z и при каждом значении t является функцией от τ с ограниченным измерением. При этом

$$\int_0^\vartheta y(t + \tau)\, d_\tau \zeta(z, t, \tau) = p(z) \cdot x(t + \vartheta) \tag{4.6}$$

$$\int_0^\vartheta w(t + \tau)\, d_\tau \zeta(z, t, \tau) = \omega_w \tag{4.7}$$

$$\rho^*(\zeta) = \sup_w \left| \int_0^\vartheta w(t + \tau)\, d_\tau \zeta(z, t, \tau) \right| \quad \text{при } \rho(w) = 1 \tag{4.8}$$

Назовем абсолютной ошибкой операции φ величину $\Delta_{z,t} = \sup_w |\omega_w|$ при условии $\rho(w) \leqslant \delta$. Согласно (4.5) — (4.8) имеем $\Delta_{z,t} = \delta\rho^*(\zeta)$. Поэтому задача о выборе операции φ, дающей наименьшую ошибку $\Delta_{z,t}$, при данных z и t означает, что следует найти функцию $\zeta(z, t, \tau)$, удовлетворяющую условию (4.6) и имеющую наименьшую сопряженную интенсивность $\rho^*(\zeta)$ (4.5). Итак, пусть сначала величина z фиксирована.

Опираясь на результаты, приведенные в § 2 и 3, получим следующий результат. Обозначим символом $y(l, t, \tau)$ величину

$$y(l, t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} l_i g^{(i)}(z, t, \tau) \tag{4.9}$$

где величины $g^{(i)}$ определены равенством (3.9). Разрешающий сигнал $\zeta(z, t, \tau)$ (4.6) существует при каждом $t \in T$ тогда и только тогда, когда

$$\min_l [\rho(y(l, t, \tau))] = \alpha(t, z) > 0 \qquad \text{при } l \cdot p(z) = 1,\ t \in T \tag{4.10}$$

Наименьшая достижимая ошибка $\overset{\circ}{\Delta}_{z,t}$ имеет величину

$$\overset{\circ}{\Delta}_{z,t} = \frac{\delta}{\alpha(t, z)} \tag{4.11}$$

и оптимальный разрешающий сигнал $\zeta^\circ(z, t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\vartheta y(l^\circ, t, \tau)\, d_\tau \zeta^\circ(z, t, \tau) = \max_\zeta = 1 \qquad \text{при } \rho^*(\zeta) = \frac{1}{\alpha(t, z)} \tag{4.12}$$

где l° — решение задачи (4.10)

Полученный результат истолковывается наглядно следующим образом. Будем говорить, что полезный сигнал $y(t + \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ несет величину $p(z) \cdot x(t + \vartheta) = \gamma$, если он порождается согласно (3.2) движением $x(t)$ системы (3.1), удовлетворяющим условию $p(z) \cdot x(t + \vartheta) = \gamma$. Тогда величина $y(l, t, \tau)$ (4.9) в задаче (4.10) есть не что иное, как полезный сигнал $y(t + \tau)$, несущий искомую величину $p(z) \cdot x(t + \vartheta) = 1$. Следовательно, задача (4.6) о вычислении $p(z) \cdot x(t + \vartheta)$ по $y(t + \tau)$ (3.2) разрешима тогда и только тогда, когда наименьшая интенсивность $\rho(y(t + \tau))$ сигнала $y(t + \tau)$, несущего величину $p(z) \cdot x(t + \vartheta) = 1$, остается положительной при всех $t \in T$.

Пусть теперь вектор z может выбираться из ограниченного замкнутого множества Z, $p(z)$ зависит непрерывно от z и T — отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Тогда справедливо следующее заключение. Если существует такое $z \in Z$, для которого наименьшая интенсивность $\rho(y(t+\tau))$ сигнала $y(t+\tau)$, несущего величину $p(z)\cdot x(t+\vartheta) = 1$, остается положительной при всех $t \in T$, то существует оптимальная разрешающая операция φ, порожденная функцией $\zeta^\circ(t, \tau)$. Эта оптимальная операция дает наименьшую абсолютную ошибку

$$\Delta = \min_z \max_t \Delta_{z,t} = \frac{\delta}{\alpha}, \qquad \alpha = \max_z \min_t \alpha(t, z) \tag{4.13}$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^\vartheta y(l^\circ, t, \tau)\, d_\tau \zeta^\circ(t, \tau) = 1 = \max_\zeta \qquad \text{при } \|\zeta\|^* = \rho^*(\zeta) = \frac{1}{\alpha}$$

где l° — решение задачи (4.10) при $t \in T$ для z, разрешающих задачу (4.13). Полученные результаты с учетом принципа дуальности между задачами (2.1) и (3.1) формулируются в общей форме следующим образом.

Сигнал $y(t+\tau)$, несущий величину $p(z)\cdot x(t+\vartheta) = 1$ и имеющий при этом наименьшую возможную интенсивность $\rho(y)$, назовем минимальным и будем обозначать этот сигнал символом $[y^\circ(t+\tau) \mid \gamma = 1, \rho]$.

Теорема 4.1. Задача 3.1 о наблюдении величины $p(z)\cdot x(t+\vartheta)$ по сигналу $y(t)$ (3.2) имеет решение тогда и только тогда, когда можно найти $z \in Z$, для которого интенсивность $\rho(y^\circ)$ минимального сигнала $[y^\circ(t+\tau)\ \gamma = 1, \rho]$ отлична от нуля при всех $t \in T$. Если при этом задана оценка $\rho(w) \leqslant \delta$ интенсивности помехи $w(t)$, то нижняя граница Δ° ошибки Δ при определении величины $p(z)\cdot x(t+\vartheta)$ по полному сигналу $r(t) = y(t) + w(t)$ определяется равенством

$$\Delta^\circ = \delta / \alpha, \qquad \alpha = \sup_z \inf_t \alpha(t, z)$$

Здесь $\alpha(t, z)$ — интенсивность $\rho(y^\circ)$ минимального полезного сигнала $[y^\circ(t+\tau) \mid \gamma = 1, \rho]$. В случае, когда $\sup_z \inf_t \alpha(t, z)$ достигается на Z, существует оптимальная разрешающая операция φ°, для которой $\Delta = \Delta^\circ$. При этом оптимальный разрешающий сигнал $\zeta^\circ(t, \tau)$ имеет сопряженную интенсивность $\rho^*(\zeta^\circ) = 1/\alpha$ и выделяется среди всех других сигналов ζ с интенсивностью $\rho^*(\zeta) = 1/\alpha$ тем свойством, что на полезном минимальном сигнале $[y^\circ(t+\tau) \mid \gamma = 1, \rho]$ операция φ°, порожденная функцией ζ°, дает наибольшую возможную величину.

Теорема 4.2. Пусть дана задача 2.1 об управлении системой (2.1) из точки x°, t° на многообразие M (2.2) при условии, что интенсивность управляющего сигнала $u(t^\circ+\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ (или сигнала ζ, где $d_\tau\zeta = u\, d\tau$) ограничена неравенством $\rho(u) \leqslant 1$ (или $\rho(\zeta) \leqslant 1$).

Задача 2.1 имеет решение тогда и только тогда, когда можно выбрать $z \in Z$, удовлетворяющее условию: исходная интенсивность $\rho_*(y^\circ)$ минимального сигнала $[y^\circ(t^\circ+\tau) \mid \gamma = 1, \rho_*]$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta\ [z])$ сопряженной наблюдаемой системы $dx/dt = -A^*(t)\, x$, $y = B^* x$ удовлетворяет условию $\rho_*(y^\circ) \geqslant 1$, причем $p(z) = f[z] - X(t^\circ, t^\circ+\vartheta)\, x^\circ$.

При таком выборе z оптимальный управляющий сигнал $u^\circ(t^\circ+\tau)$ (или $\zeta^\circ(t^\circ, \tau)$) имеет интенсивность

$$\rho(u^\circ) = 1 / \alpha(z), \qquad \alpha(z) = \rho_* \, [(y^\circ(t^\circ+\tau) \mid \gamma = 1, \; \rho_*])$$

и выделяется среди всех других сигналов с интенсивностью $\rho = 1/\alpha(z)$ тем свойством, что на минимальном сигнале $[y^\circ(t^\circ+\tau) \mid \gamma = 1, \rho_*]$ операция φ°, порожденная функцией u° (или ζ°), дает наибольшую возможную величину.

Итак, оптимальный сигнал $\zeta^\circ(t, \tau)$ обладает тем свойством, что он вырабатывает наибольшую возможную величину в самом неблагоприятном случае полезного сигнала $y(t+\tau)$ (с точки зрения интенсивности $\rho(y)$). Как показано выше, это свойство сигнала ζ° следует из решения задачи 3.1, опирающегося на теорию L-проблемы моментов. Полезно, однако, истолковать приведенные выше выводы и с другой точки зрения.

§ 5. Сопоставим задаче 3.1 одну игру [9]. Рассмотрим снова задачу 3.1, полагая z и t фиксированными и снова для определенности будем предполагать, что интенсивности сигналов $y(t+\tau)$ и $\zeta(t, \tau)$ определены равенствами

$$\rho(y) = \max_\tau |y(t+\tau)|, \qquad \rho^*(\zeta) = \int_0^\vartheta |d_\tau \zeta(t, \tau)| \tag{5.1}$$

Игра 5.1. Стратегии первого игрока — функции $\zeta(\tau)$ с интенсивностью $\rho^*(\zeta) \leqslant 1$, стратегии второго игрока — функции $y(t)$, удовлетворяющие условиям

$$y(\tau) = h(\tau) \cdot x(\tau), \qquad x(\tau) = F(t+\vartheta, t+\tau)\, x(\vartheta)$$

$$p(z) \cdot x(\vartheta) = 1$$

Функция полезности μ определена равенством

$$\mu[\zeta, y] = \int_0^\vartheta y(\tau)\, d_\tau \zeta(\tau) \tag{5.2}$$

Цель первого игрока — возможно большее значение μ, цель второго игрока — возможно меньшее значение μ.

Оказывается, что игра 5.1 имеет седловую точку [9] (ζ°, y°), т. е. $\mu[\zeta^\circ, y^\circ] = \max_\zeta \min_y \mu = \min_y \max_\zeta \mu$, и при этом

$$\mu[\zeta^\circ, y] \geqslant \mu[\zeta^\circ, y^\circ], \qquad \mu[\zeta, y^\circ] \leqslant \mu[\zeta^\circ, y^\circ] \tag{5.3}$$

Следовательно, ζ° и y° действительно являются наилучшими возможными стратегиями для первого и второго игроков. Оптимальная стратегия y° определяется естественно условием $\rho(y^\circ) = \min_y \rho(y) = \alpha(t, z)$, оптимальная стратегия ζ° удовлетворяет условию $\mu[\zeta^\circ, y^\circ] = \max_\zeta \mu[\zeta, y^\circ]$ при $\rho^*(\zeta) = 1$. Отсюда следует, что оптимальная стратегия $y^\circ(\tau)$ игры 5.1 совпадает с минимальным полезным сигналом $[y^\circ(t+\tau) \mid \gamma = 1, \rho]$, оптимальная стратегия $\zeta^\circ(\tau) = \alpha(t, z)\, \zeta^\circ(t, \tau)$, где $\zeta^\circ(t, \tau)$ — оптимальный разрешающий сигнал задачи 3.1. Для выяснения вопроса о том, почему именно функция $\zeta^\circ(\tau)$ является разрешающим сигналом задачи 3.1, т. е. при всех $y(\tau)$ дает величину $p(z)\, x(\vartheta) = 1$, а не большую, как это возможно согласно (5.3), отметим одно свойство, которым в данном случае обладает оптимальная стратегия $\zeta^\circ(\tau)$. В теории игр известна теорема [9]: если q° и s° — оптимальные смешанные стратегии некоторой игры $\mu[q, s]$ и s — любая активная стратегия второго игрока (т. е. s — стратегия, входящая в состав смешанной стратегии s°), то справедливо равенство

$$\mu[q^\circ, s] = \mu[q^\circ, s^\circ] \tag{5.4}$$

Оказывается, что конструкция игры 5.1 в известном смысле настолько аналогична конструкции игры со смешанными стратегиями, что любая стратегия $y(\tau)$ оказывается обладающей указанным выше свойством активных стратегий s. Итак, справедливо утверждение.

Теорема 5.1. Задача об оптимальном сигнале $\zeta^\circ(t, \tau)$, восстанавливающем для системы (3.1) величину $p(z)\cdot x(t+\vartheta)$ по сигналу $y(t+\tau)$ (3.2) при условии минимума интенсивности $\rho^*(\zeta)$, эквивалентна задаче о выборе оптимальной стратегии $\zeta^\circ(\tau)$ в игре 5.1. Игра 5.1 имеет седловую точку $(\zeta^\circ(\tau), y^\circ(\tau))$. Стратегия $\zeta^\circ(\tau)$ совпадает с точностью до множителя $\alpha(t, z)$ с сигналом $\zeta^\circ(t, \tau)$, стратегия $y^\circ(\tau)$ совпадает с минимальным сигналом $[y^\circ(t+\tau) \mid \gamma = 1, \rho]$.

Стратегия $\zeta^\circ(\tau)$ игры 5.1 оказывается разрешающим сигналом для задачи 3.1 по следующей причине: любая стратегия $y(\tau)$ игры 5.1 по отношению к (ζ°, y°) обладает свойством (5.4), характерным для активных стратегий s расширенных конечных игр [9].

Примечание 5.1. Если интенсивность $\rho^*(\zeta)$ определена равенством (5.1), аналогию задачи 3.1 с теорией игр можно еще продолжить наглядным образом. В самом деле, допустим, что первый игрок имеет лишь чистые стратегии $\zeta^\pm(\tau, \tau_*)$ вида $d_\tau\zeta^\pm(\tau, \tau_*) = \pm\,\delta(\tau - \tau_*)\,\alpha\tau$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функции и τ_* — всевозможные числа из отрезка $[0, \vartheta]$.

Тогда оптимальную стратегию $\zeta^\circ(\tau)$ можно истолковать, как смешанную стратегию, где чистые стратегии $\zeta(\tau, \tau_*)$ входят с вероятностью $|d_\tau\,\zeta^\circ(\tau_*)|$.

5.2. Рассмотрим задачу 2.1 об оптимальном управлении [1] (для определенности — при условии $\rho(u) = \sup_\tau |u(\tau)| = \min$). Решение $u^\circ(\tau)$ этой задачи определяется принципом максимума [1], из которого следует, что

$$(\psi^\circ, u^\circ) = \max H(\psi^\circ, u) = \max(\psi^\circ(\tau)\cdot bu(\tau)) \qquad \text{при } |u(\tau)| \leqslant \rho(u^\circ)$$

где $\psi^\circ(\tau)$ — решение уравнения $d\psi / dt = -A^*(t)\,\psi$. По принципу дуальности задаче об управлении (2.1) соответствует задача о наблюдении 3.1. В свою очередь, согласно теореме 5.1, задача 3.1 эквивалентна игре 5.1, где как раз

$$\mu[u(\tau),\ y(\tau)] = \int_0^\vartheta H d\tau = \int_0^\vartheta \psi(\tau)\cdot bu(\tau)\, d\tau, \qquad y(\tau) = \psi(\tau)\cdot b$$

Поэтому теорема 5.1 отмечает, в частности для рассматриваемого круга задач, возможную интерпретацию принципа максимума как условий $\max_u \min_\psi \mu$ для соответствующим образом подобранной игры. При этом подчеркивается, что элемент ψ°, фигурирующий в принципе максимума, должен удовлетворять условию максимина для игры

$$\mu = \int_0^{\vartheta} H(\psi, u)\, d\tau$$

5.3. Рассмотренная в этом параграфе связь между задачей о наблюдении и игрой 5.1 объясняется тем обстоятельством, что L-проблема и проблема об отделении множеств, на которую обычно опирается исследование игр с седловой точкой, по постановке задачи и по методу исследования имеют аналогичную природу.

§ 6. Рассмотрим пример. Пусть требуется стабилизировать систему

$$dx / dt = Ax + bu \tag{6.1}$$

управлением $u = p \cdot x$, причем измеряется величина $r(t) = h \cdot x(t) + w(t)$, $|w(t)| \leqslant \delta$. В соответствии с процедурой, описанной в статье [10], можно последовательно решить задачу о стабилизации системы (6.1) и затем задачу о наблюдении величины $p \cdot x(t)$ по $y(t)$. Пусть уравнение $|a_{ij} + b_i p_j(z) - \lambda\delta_{ij}| = 0$ во всяком случае имеет корни λ_k с $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, когда вектор $p(z)$ меняется в пределах

$$p(z) = p^\circ + Dz \qquad (-\varepsilon_j \leqslant z_j \leqslant \varepsilon_j, D = \{d_{ij}\}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k) \tag{6.2}$$

Тогда в процессе решения задачи о стабилизации (6.1) возникает задача [10] о наблюдении 3.1: при выбранном $\vartheta > 0$ найти z из (6.2) и операцию $\varphi[r(\tau)]$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, восстанавливающую величину $p(z) \cdot x(t)$ по $r(t)$ с наименьшей ошибкой, где

$$\varphi[r(t + \tau)] = \varphi[y(t + \tau)] + \varphi[w(t + \tau)] = p(z)\, x(t + \vartheta) + \omega_w$$

$$dx / dt = Ax, \qquad y = h \cdot x$$

Выше показано, что эта задача сводится к проблеме: найти z и функцию $\zeta^\circ(\tau)$, для которых

$$\int_0^{\vartheta} g^{(i)}(\tau)\, d_\tau \zeta^\circ(\tau) = p_i(z), \quad \rho^*(\zeta) = \int_0^{\vartheta} |d_\tau \zeta^\circ(\tau)| = \min\nolimits_{\zeta, z}, \; g^*(\tau) = h^*(\tau)\, e^{A(\tau - \vartheta)} \tag{6.3}$$

(g^*, h^*—векторы строки)

Задача разрешима тогда и только тогда, когда существует z из (6.2), для которого $\alpha(z) = \min_y \max_\tau |y(\tau)| > 0$ при $x(\vartheta)\, p(z) = 1$. Пусть это условие выполнено. Тогда импульс $\rho^*(\zeta^\circ)$ (6.3) оптимального восстанавливающего сигнала $\zeta^\circ(\tau)$ определяется равенством

$$\rho^*(\zeta^\circ) = \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha = \max\nolimits_z \alpha(z) = \max\nolimits_z [\min\nolimits_l \max\nolimits_\tau |l \cdot g(\tau)|] \tag{6.4}$$

$$(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta, \; l \cdot p(z) = 1, \; -\varepsilon_i \leqslant z_i \leqslant \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, k)$$

Если по условиям задачи величина ошибки $\Delta = \sup_w \omega_w$ не должна превышать числа ν, то задача разрешима тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \delta / \nu$. Изменяя, если необходимо, масштабы, запишем последнее условие в виде неравенства

$$\alpha \geqslant 1 \tag{6.5}$$

Примечание 6.1. Предполагаем, что $p(z) \neq 0$ в (6.2), тогда $\sup_z \alpha(z) < \infty$ и максимум (6.4) действительно достигается.

Предположим, что матрица A — неособая и выполнено условие общего положения [1,3] — векторы-строки h^*, $h^*A, \ldots, h^*A^{n-1}$ — линейно независимы. Тогда функции $g^{(i)}(\tau)$ линейно независимы и при любом $l \neq 0$ выражение $l \cdot g(\tau)$ имеет максимумы лишь в изолированных точках τ_j $(i = 1, \ldots, s(l))$. Поэтому $\zeta^\circ(\tau)$ удовлетворяет условию

$$d\zeta^\circ(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \delta(\tau - \tau_j)$$

и искомая операция $\varphi[r]$ имеет вид

$$\varphi[r(\tau)] = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j r(\tau_j)$$

Итак, для решения задачи 3.1 в данном случае следует решить задачу (6.4). Величина $\max_\tau |l \cdot g(\tau)| = \rho(y)$, рассматриваемая как функция от z и l при условиях $p(z) \cdot l = 1$ и (6.2), имеет седловую точку (z°, l°).

Это проверяется рассуждениями, аналогичными тем, которыми доказана теорема о максимуме для расширенных конечных игр [9]. Поэтому решение (z°, l°) задачи (6.4) удовлетворяет условию

$$z_i^\circ = -\varepsilon_i \operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ji} l_j\right)$$

и неравенство (6.5) эквивалентно неравенству

$$\min_l \left[(\max_\tau |l \cdot g(\tau)|) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left|\sum_{j=1}^{n} d_{ji} l_j\right|\right] \geqslant 1 \quad \text{при } l \cdot p^\circ = 1 \tag{6.6}$$

В частности, если $p_i(z) = p_i^\circ + z_i$, то условие (6.6) имеет вид

$$\min_l \left[(\max_\tau |l \cdot g(\tau)|) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |l_i|\right] \geqslant 1 \quad \text{при } l \cdot p^\circ = 1 \tag{6.7}$$

В этом случае рассмотренная задача 3.1 совпадает с задачей об управлении системой $dx / dt = -A^* x + hu$ из точки $x^\circ = 0$, $t^\circ = 0$ в $\{\varepsilon_i\}$ — окрестность точки p° силой $u(t)$, импульс которой

$$\int_0^\vartheta |u(\tau)| \, d\tau$$

не превышает единицу. Условие наблюдаемости и управляемости (6.7) выводится и другим путем, например, если рассмотреть задачу (6.3), как L-проблему на элементах пространства $\{\eta_i, i = 1, \ldots, n;\ \eta(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta\}$ с нормой

$$\|\eta\| = \sum |\eta_i| + \max_\tau \eta(\tau)|$$

Поступила 24 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. ИЛ, 1962.
3. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК, т. I, Изд. АН СССР, 1961.
4. Ройтенберг Я. Н. О некоторых косвенных методах получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
5. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ — НТВУ, 1938, статья IV, стр. 171.
6. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2. Гостехиздат, 1950.
8. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.
9. Мак Кинси Дж. Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960.
10. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
11. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. Линейные операторы. ИЛ, 1962.