Прикладная математика и механика. Т. 28, 1964

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Е. П. Григорьев

(Ленинград)

Исследуется задача минимизации функционалов частного вида при связях, заданных линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и линейными краевыми условиями общего вида. Функционалы задаются в виде интегралов от функции длины вектора управлений. Управления входят линейно в правые части дифференциальных уравнений и ограничены по модулю. Для подобных задач решается вопрос о единственности и существовании оптимальных управлений, а также устанавливается связь этих задач с задачей о быстродействии, указываются способы нахождения градиентов минимизируемых функций при помощи решения некоторых систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти m-мерную вектор-функцию $\mathbf{U}(t)$, удовлетворяющую ограничению

$$|\mathbf{U}(t)| = \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)\Big)^{1/2} \leqslant U_*(t) \qquad (0.1)$$

которая доставляет минимум интегралу

$$I(\mathbf{U}) = \int_0^T f(|\mathbf{U}|)\, dt \qquad (0.2)$$

и переводит точку плоскости G_0

$$L_0\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}_0, \qquad \mathbf{X}_0(x) = \mathbf{X}_0 \qquad (0.3)$$

n-мерного пространства в точку плоскости

$$L_1\mathbf{X}_1 = 0, \qquad \mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_1 \qquad (0.4)$$

по траектории системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{X}^{\cdot} = A\mathbf{X} + B\mathbf{U} \qquad (\mathbf{X}^{\cdot} = d\mathbf{X}/dt) \qquad (0.5)$$

за время T. Здесь $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ — n-мерные векторы, $\mathbf{X}(t)$ — n-мерная вектор-функция, L_0, L_1 — постоянные квадратные матрицы n-го порядка соответственно рангов $l_0 \leqslant n$, $l_1 \leqslant n$, $A(t)$ — квадратная матрица n-го порядка функций $a_{ik}(t)$, матрица $B(t)$ функций $b_{ij}(t)$ имеет n строк и m столбцов. Функцию $f(\sigma)$ будем считать дважды непрерывно дифференцируемой, заданной при $\sigma \in [0, +\infty)$ и такой, что

$$f(0) = 0, \quad \frac{df}{d\sigma}(0) = 0, \quad \frac{d^2f}{d\sigma^2} > 0, \quad \lim_{\sigma\to+\infty} \frac{df}{d\sigma} = +\infty \qquad (0.6)$$

Функции $a_{ik}(t)$, $b_{ij}(t)$, $U_*(t)$ будем считать заданными при $t \in [0, +\infty)$, причем в дальнейшем ограничимся лишь тем случаем, когда эти функции ограниченные, аналитические и, кроме того,

$$U_*(t) \geqslant c > 0, \qquad t \in [0, +\infty) \qquad (0.7)$$

где c — фиксированное число.

Для того чтобы уравнение (0.3), определяющее начальную плоскость G_0, было непротиворечивым, должно быть выполнено условие

$$\operatorname{rang}(L_0, \mathrm{Y}_0) = \operatorname{rang} L_0 = l_0 \tag{0.8}$$

Основная цель настоящей работы — получить метод нахождения вектор-функции $\mathrm{U}(t)$, решающей поставленную вариационную задачу. Однако для этого необходимо прежде всего исследовать вопрос единственности искомой функции $\mathrm{U}(t)$ и доказать ее существование. Сформулированную вариационную задачу будем называть задачей 1. Наряду с ней рассмотрим задачу минимизации интеграла (0.2) в случае $f(|U|) \equiv 1$, при ограничении (0.1) и связях (0.3) — (0.5), т. е. задачу о быстродействии, которую в дальнейшем будем называть задачей 2.

§ 1. Вопросы единственности. Для вывода условий единственности искомой вектор-функции $\mathrm{U}(t)$ (оптимального управления) воспользуемся схемой, предложенной в работе [1]. Согласно принципу максимума, оптимальное управление можно найти из условий максимума функции

$$H(\Lambda, \mathrm{X}, \mathrm{U}) = \Delta^* A\mathrm{X} + \Lambda^* B\mathrm{U} - f(|\mathrm{U}|)$$

по U в области, определяемой ограничением (0.1), где $\Lambda(t)$ — отличное от нуля решение системы n дифференциальных уравнений

$$\dot{\Lambda} = -A^*\Lambda \tag{1.1}$$

удовлетворяющее условиям трансверсальности следующего вида:

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad K_0\Lambda_0 = 0, \qquad K_1\Lambda(T) = 0 \tag{1.2}$$

где K_0 и K_1 — вещественные постоянные квадратные матрицы n-порядка соответственно рангов $n - l_0$, $n - l_1$, удовлетворяющие условиям

$$L_0K_0{}^* = 0, \qquad L_1K_1{}^* = 0 \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем * означает операцию транспонирования. Если обозначить обратную функцию для $df/d\sigma = h(\sigma)$ через $\sigma(h)$, то из условия максимума функции H можно выразить оптимальное управление $\mathrm{U}(t)$ через решение системы (1.1) по формуле

$$\mathrm{U} = \begin{cases} \dfrac{B^*\Lambda}{|B^*\Lambda|}\sigma(|B^*\Lambda|) & \text{при } \sigma(|B^*\Lambda|) < U_*(t) \\ \dfrac{B^*\Lambda}{|B^*\Lambda|}U_*(t) & \text{при } \sigma(|B^*\Lambda|) \geqslant U_*(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

Для задачи 2 аналогичная формула имеет вид

$$\mathrm{U}(t) = \frac{B^*\Lambda}{|B^*\Lambda|}U_*(t) \tag{1.5}$$

Заметим, что выражения (1.4), (1.5) однозначно определяют непрерывную слева функцию U только в том случае, когда вектор $B^*\Lambda$ обращается в нуль только в конечном числе точек промежутка $[0, T]$. В противном случае аналитическая вектор-функция $B^*\Lambda \equiv 0$ при $t \in [0, T]$. Однако, согласно принципу максимума, вектор $\Lambda(t)$, отвечающий оптимальному управлению, должен быть не нулевым. Поэтому для того чтобы исключить возможную неединственность оптимального управления, необходимо потребовать, чтобы из условия $B^*\Lambda \equiv 0$ вытекало соотношение $\Lambda \equiv 0$. Если вектор-функцию $B^*\Lambda$ разложить в ряд

$$B^*\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} G_k t^k \Lambda_0$$

то полученное условие будет равносильно тому, что система уравнений

$$G_k\Lambda_0 = 0 \qquad (k = 0,\ 1, \ldots) \tag{1.6}$$

имеет только нулевое решение $\Lambda_0 = 0$. В том случае, когда матрицы A, B — постоянные, матрицы G_k определяются по формулам

$$G_k = \frac{(-1)^k}{k!} B^* (A^*)^k$$

Отсюда видно, что система (1.6) будет эквивалентна конечной системе уравнений

$$B^* (A^*)^k \Lambda_0 = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{1.7}$$

где r — степень минимального многочлена матрицы A^*, $r \leqslant n$. Система (1.7) будет иметь только нулевое решение $\Lambda_0 = 0$ тогда и только тогда, когда среди $r \times m$ вектор-столбцов матриц

$$B, AB, \ldots, A^{r-1}B \tag{1.8}$$

найдется n линейно независимых векторов. В дальнейшем условие однозначной определенности $\mathbf{U}(t)$ через $\Lambda(t)$ будем называть условием А.

Вектор-функцию $\mathbf{U}(t)$, удовлетворяющую условию (0.1) и переводящую некоторую точку $\mathbf{X}_0 \in G_0$ за время T по траектории системы (0.5) в какую-либо точку $\mathbf{X}_1 \in G_1$ (G_1 — плоскость, заданная уравнением (0.4)), будем называть допустимым управлением. Допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума, назовем экстремальным управлением.

Теорема 1.1. При выполнении условия А как оптимальное, так и экстремальное управление единственно.

Доказательство. Допустим, что экстремальное управление $\mathbf{U}(t)$ переводит точку $\mathbf{X}_0 \in G_0$ по траектории системы (0.5) в точку $\mathbf{X}_1 \in G_1$ за время T, а Λ_0 — начальное значение вектора $\Lambda(t)$, соответствующего $\mathbf{U}(t)$ согласно принципу максимума. Умножая уравнение (0.5) на Λ^*, а уравнение (1.1) на $\mathbf{X}^*$ слева и складывая результаты, получим

$$(\Lambda^*\mathbf{X})^{\cdot} = \Lambda^{*}B\mathbf{U}$$

Отсюда

$$\Lambda^*(T)\,\mathbf{X}(T) - \Lambda_0^*\mathbf{X}_0 = \int_0^T \Lambda^* B\mathbf{U}\,dt \tag{1.9}$$

Так как векторы $\mathbf{X}(T)$ и $\Lambda(T)$ удовлетворяют соответственно условиям (0.4) и (1.2), то

$$\Lambda^*(T)\,\mathbf{X}(T) = 0$$

Аналогично, в силу условий (0.3) и (1.2) на векторы $\mathbf{X}_0$ и Λ_0, значение $\Lambda_0^*\mathbf{X}_0$ остается постоянным для любых $\mathbf{X}_0 \in G_0$. Поэтому, если $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ два экстремальных управления, причем $\Lambda(t)$ — вектор, соответствующий управлению $\mathbf{U}_1$, то справедливо равенство

$$\int_0^T \Lambda^* B\mathbf{U}_1 dt = \int_0^T \Lambda^* B U_2 dt \tag{1.10}$$

Докажем теперь, что

$$\int_0^T f(|\mathrm{U}_1|)\,dt = \int_0^T f(|\mathrm{U}_2|)\,dt \tag{1.11}$$

Действительно, в противном случае можно считать

$$\int_0^T f(|U_1|)\,dt > \int_0^T f(|\mathrm{U}_2|)\,dt$$

Откуда с учетом (1.10) и обозначения

$$H_1(\Lambda, \mathrm{U}) = \Lambda^* B\mathrm{U} - f(|\mathrm{U}|)$$

следует неравенство

$$\int_0^T H_1(\Lambda, \mathrm{U}_1)dt < \int_0^T H_1(\Lambda, \mathrm{U}_2)\,d \tag{1.12}$$

С другой стороны, функция H_1 достигает максимума одновременно с H, поэтому

$$\int_0^T H_1(\Lambda, \mathrm{U}_1)\,dt \geqslant \int_0^T H_1(\Lambda, \mathrm{U}_2)\,dt$$

что противоречит неравенству (1.12). Из равенств (1.10) и (1.11) вытекает

$$\int_0^T H_1(\Lambda, \mathrm{U}_1)\,dt = \int_0^T H_1(\Lambda, \mathrm{U}_2)\,dt$$

и так как $H_1(\Lambda, \mathrm{U})$ при $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1$ достигает максимума при $t \in [0, T]$, то $H_1(\Lambda, \mathrm{U}_1) \equiv H(\Lambda, \mathrm{U}_2)$ с учетом непрерывности слева функций U_1 и U_2. Последнее тождество означает, что экстремальным управлениям U_1 и U_2 соответствует согласно принципу максимума одна и та же вектор-функция $\Lambda(t)$, откуда, в силу условия А, $\mathrm{U}_1 \equiv \mathrm{U}_2$. Так как оптимальное управление является экстремальным, то этим доказана единственность и оптимального управления. Теорема доказана.

При выполнении условия А справедлива аналогичная теорема и для задачи 2.

§ 2. Теоремы существования. Установим сначала теорему, позволяющую свести вопрос о существовании оптимального управления к вопросу о наличии допустимых управлений [1].

Теорема 2.1. Если существует допустимое управление в задаче 1 и выполнено условие

$$\mathrm{rang}\,(L_0^*, \Phi^*(T) L_1^*) = n \tag{2.1}$$

где $\Phi(T)$ — фундаментальная нормированная матрица системы $\dot{\mathrm{X}} = A\mathrm{X}$, то существует и оптимальное управление.

Доказательство. Будем считать, что в качестве класса допустимых управлений выбран класс измеримых ограниченных вектор-функций, заданных при $t \in [0, T]$. Множество всех допустимых управлений непусто, поэтому множество значений функционала (0.2), соответствующее множеству всех допустимых управлений, имеет точную нижнюю границу I_0. По определению точной нижней границы существует последовательность допустимых управлений $\mathrm{U}_k(t)$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} I(\mathrm{U}_k) = I_0 \tag{2.2}$$

Каждое управление $\mathrm{U}_k(t)$ переводит некоторую точку $\mathrm{X}_k(0) \in G_0$ в точку $\mathrm{X}_k(T) \in G_1$. По формуле Коши имеем

$$\mathrm{X}_k(T) = \Phi(T)\left[\mathrm{X}_k(0) + \int_0^T \Psi^* B\mathrm{U}_k\,dt\right] \tag{2.3}$$

откуда в силу краевых условий (0.3), (0.4) получаем

$$L_0 \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{Y}_0, \qquad L_1 \Phi(T)\, \mathbf{X}_k(0) = -L_1 \Phi(T) \int_0^T \Psi^* B \mathbf{U}_k dt \equiv \mathbf{Z}_k$$

Здесь через Ψ^* обозначена матрица Φ^{-1}. Из полученной системы $2n$ уравнений относительно $\mathbf{X}_k(0)$ можно выбрать n уравнений так, чтобы определитель последней системы был отличен от нуля (это возможно, так как выполнено условие (2.1)). Нетрудно видеть, что составляющие векторов $\mathbf{Z}_k$ ограничены в совокупности, следовательно, составляющие векторов $\mathbf{X}_k(0)$ и $\mathbf{X}_k(T)$ также ограничены в совокупности. Поэтому существуют подпоследовательности последовательностей $\mathbf{X}_k(0)$ и $\mathbf{X}_k(T)$, такие, что

$$\lim_{q \to +\infty} \mathbf{X}_q(0) = \mathbf{X}_0, \qquad \lim_{q \to +\infty} \mathbf{X}_q(T) = \mathbf{X}(T) \tag{2.4}$$

Кроме того, для векторов $\mathbf{X}_q(T)$ и $\mathbf{X}_q(0)$ остается справедливым соотношение (2.3). Составляющие векторов $\mathbf{U}_q(t)$ будут элементами гильбертова пространства $L_2[0, T]$, ограниченными как по абсолютной величине, так и по норме, поэтому можно выделить последовательность векторов, соответствующие компоненты которых слабо сходятся к некоторым пределам, образующим вектор-функцию $\mathbf{U}_0(t)$. По теореме Банаха — Сакса [2] из полученной слабо сходящейся подпоследовательности можно выделить последовательность $\mathbf{U}_{q_j}$ такую, что последовательность

$$\mathbf{U}_l' = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{U}_{q_j}$$

обладает тем свойством, что соответствующие компоненты векторов $\mathbf{U}_l'(t)$ сходятся по норме пространства L_2 к составляющим вектора $\mathbf{U}_0(t)$. Наконец, из последовательности $\mathbf{U}_l'(t)$ можно выделить подпоследовательность $\mathbf{U}_k'(t)$, сходящуюся к $\mathbf{U}_0(t)$ почти всюду [2]. Заметим, что для векторов

$$\mathbf{X}_l'(T) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{X}_{q_j}(T), \quad \mathbf{X}_l'(0) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{X}_{q_j}(0)$$

и $\mathbf{U}_l'(t)$ останется верным соотношение (2.3). Кроме того, очевидно, что $\mathbf{U}_l'(t)$ удовлетворяют ограничению (0.1), $\mathbf{X}_l'(0) \in G_0$, $\mathbf{X}_l'(T) \in G_1$. Поэтому управления $\mathbf{U}_k'(t)$ будут допустимыми и, переходя к пределу в равенствах (2.2), (2.3), получим

$$\mathbf{X}(X) = \Phi(T)\left(\mathbf{X}_0 + \int_0^T \Psi^* B \mathbf{U}_0\, dt\right), \qquad \int_0^T f(|\mathbf{U}_0|)\, dt = I_0 \tag{2.5}$$

Здесь использовано утверждение о том, что последовательности Чезаро $\mathbf{X}_l'(0)$, $\mathbf{X}_l'(T)$, построенные по последовательностям $\mathbf{X}_{q_j}(0)$, $\mathbf{X}_{q_j}(T)$, сходятся к тем же пределам, что и исходные последовательности [3], соотношения (2.4) и выпуклость f. Кроме того, переходя к пределу в неравенстве

$$|\mathbf{U}_k'(t)| \leqslant U_*(t)$$

и изменяя в случае надобности значения $\mathbf{U}_0(t)$ на множестве меры нуль, получим

$$|\mathbf{U}_0(t)| \leqslant \mathbf{U}_*(t) \tag{2.6}$$

Если учесть, что, в силу замкнутости многообразий G_0, G_1, $\mathbf{X}_0 \in G_0$, $\mathbf{X}(T) \in G_1$, из соотношений (2.5), (2.6) вытекает оптимальность управления $\mathbf{U}_0(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Для задачи 2 также справедлива аналогичная теорема с тем лишь изменением, что условие (2.1) должно выполняться при любом t.

Чтобы исследовать вопрос о существовании допустимых управлений, рассмотрим классическую задачу Лагранжа о минимизации функционала

$$I = \int_0^T \mathbf{U}^2\, dt \tag{2.7}$$

при дифференциальных связях (0.5) и краевых условиях вида

$$\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0, \qquad \mathrm{X}(T) = 0 \tag{2.8}$$

Уравнения Эйлера для этой задачи, которую в дальнейшем будем называть задачей 3, имеют следующий вид

$$\mathrm{X}^{\cdot} = A\mathrm{X} + B\mathrm{U}, \qquad \Lambda^{\cdot} = -A^*\Lambda, \qquad \mathrm{U} = B^*\Lambda \tag{2.9}$$

Если обозначить через $\Psi(t)$ фундаментальную нормированную матрицу системы $\dot{\Lambda} = -A^*\Lambda$, то по формуле Коши с учетом условий (2.8) получим

$$\mathrm{X}(T) = \Phi(T)\left(\mathrm{X}_0 + \int_0^T \Psi^* B B^* \Psi \Lambda_0 \, dt\right) = 0$$

Отсюда для определения Λ_0 имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathrm{X}_0 + V(T)\Lambda_0 = 0 \qquad \left(V(T) = \int_0^T \Psi^* B B^* \Psi \, dt\right) \tag{2.10}$$

Если выполнено условие А, то матрица $V(T)$ неособая.

Действительно, в противном случае существует вектор $\Lambda_0 \neq 0$ такой, что $V(T)\Lambda_0 = 0$, отсюда вытекает соотношение

$$\Lambda_0^* V(T)\Lambda_0 = \int_0^T (B^*\Psi\Lambda_0)^2 \, dt = 0 \qquad \text{или} \qquad B^*\Psi\Lambda_0 \equiv 0 \quad \text{при } t \in [0, T]$$

что противоречит условию А.

Поэтому при любом T и произвольном X_0 существует единственное решение системы (2.10)

$$\Lambda_0(T, \mathrm{X}_0) = -V^{-1}(T)\mathrm{X}_0 \tag{2.11}$$

определяющее решение задачи 3 по формуле

$$\mathrm{U}(t, T, \mathrm{X}_0) = B^*(t)\Psi(t)\Lambda_0(T, \mathrm{X}_0) \tag{2.12}$$

Значение функционала I при найденном экстремальном управлении выражается в следующей форме:

$$I(T, \mathrm{X}_0) = \int_0^T [B^*\Psi\Lambda_0(T, \mathrm{X}_0)]^2 \, dt =$$

$$= \Lambda_0^*(T, \mathrm{X}_0) V(T)\Lambda_0(T, \mathrm{X}_0) = -\Lambda_0^*(T, \mathrm{X}_0)\mathrm{X}_0 \tag{2.13}$$

Покажем, что $I(T, \mathrm{X}_0)$ будет невозрастающей функцией T. Действительно, при сделанных предположениях $I(T, \mathrm{X}_0)$ будет аналитической функцией T, производная которой имеет вид

$$\frac{dI}{dT} = \mathrm{U}^2(T, T, \mathrm{X}_0) + 2\Lambda_0^*(T, \mathrm{X}_0)V(T)\frac{d\Lambda_0}{dT}$$

С другой стороны, дифференцируя левую часть тождества (2.10), полученного после подстановки вместо Λ_0 функций $\Lambda_0(T, \mathrm{X}_0)$, получим

$$\frac{dV}{dT}\Lambda_0(T, \mathrm{X}_0) + V(T)\frac{d\Lambda_0}{dT} \equiv 0$$

Отсюда вытекает тождество

$$\mathrm{U}^2(T,\ T,\ \mathrm{X}_0) + \Lambda_0^*(T,\ \mathrm{X}_0)V(T)\frac{d\Lambda_0}{dT} \equiv 0$$

С учетом полученного тождества производную dI/dT можно переписать в виде

$$dI\,/\,dT = -\,\mathrm{U}^2(T,\ T,\ \mathrm{X}_0) \tag{2.14}$$

Таким образом, функция

$$I(T,\ \mathrm{X}_0) = \mathrm{X}_0^*V^{-1}(T)\,\mathrm{X}_0$$

монотонно убывая, стремится к конечному пределу $I(\mathrm{X}_0)$ при $T \to +\infty$. В силу произвольности X_0 и симметричности матрицы $V^{-1}(T)$ нетрудно видеть, что существует конечный предел

$$\lim_{T\to+\infty} V^{-1}(T) = V_0 \tag{2.15}$$

и конечный предел

$$I(\mathrm{X}_0) = \lim_{T\to+\infty} \mathrm{X}_0^*V^{-1}(T)\,\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0^*V_0\mathrm{X}_0 \tag{2.16}$$

Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{T\to+\infty} \Lambda_0(T,\mathrm{X}_0) = -V_0\mathrm{X}_0, \qquad \lim_{T\to+\infty} \mathrm{U}^2(T,\ T,\ \mathrm{X}_0) = 0 \tag{2.17}$$

Так как матрица $V^{-1}(T)$ положительно определенная и симметричная, то все характеристические числа ее будут положительными. При этом из сходимости при $T \to +\infty$ матрицы $V^{-1}(T)$ к матрице V_0 вытекает, что характеристические числа матрицы $V^{-1}(T)$ стремятся к характеристическим числам симметричной матрицы V_0. Характеристические числа матрицы V_0 будут, таким образом, неотрицательными вещественными числами. Представляет интерес тот случай, когда все характеристические числа матрицы V_0 будут нулями. Последнее свойство будет иметь место в том и только в том случае, когда наибольшее характеристическое число матрицы $V^{-1}(T)$ при $T \to +\infty$ стремится к нулю. Так как характеристические числа обратной матрицы $V^{-1}(T)$ обратны характеристическим числам матрицы $V(T)$, то выведенное условие равносильно тому, что наименьшее характеристическое число матрицы $V(T)$ при $T \to +\infty$ стремится к $+\infty$.

Известно [4], что наименьшее характеристическое число симметричной матрицы N находится по формуле

$$\nu_1 = \min_{|\Lambda_0|=1} \Lambda_0^*N\Lambda_0$$

Поэтому все характеристические числа матрицы V_0 будут равны нулю тогда и только тогда, когда при любом $\Lambda_0 \neq 0$ выполняется условие

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T (B^*\Psi\Lambda_0)^2\,dt = +\infty \tag{2.18}$$

Теперь нетрудно решить вопрос о существовании допустимых управлений.

Теорема 2.2. (1) При любом T существует такое $\rho > 0$, что для произвольной точки X_0 из окрестности начала координат радиуса ρ, $|X_0| < \rho$, решение задачи 3 определяет по формуле (2.12) допустимое управление в задачах 1 и 2, если выполнено условие А.

(2) Если выполнены условия А и (2.18), то для любой точки X_0 существует такое $T_0 > 0$, что при $T > T_0$ решение задачи 3 определяет по формуле (2.12) допустимое управление в задачах 1 и 2.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из соотношения

$$\lim U^2(t, T, X_0) = 0 \quad \text{при} \quad |X_0| \to 0$$

и формулы (0.7), поэтому остановимся на доказательстве второго утверждения теоремы. В этом случае по доказанному матрица $V_0 = 0$, следовательно,

$$\lim \Lambda_0 (T, X_0) = 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty \tag{2.19}$$

Функция

$$I(X_0, T) = \int_0^T U^2(t, T, X_0)\, dt$$

будучи мероморфной функцией T, стремится к нулю при $T \to +\infty$, поэтому функция

$$\varphi(T, \Delta, X_0) = \int_T^{T+\Delta} U^2(t, T+\Delta, X_0)\, dt$$

которая также будет мероморфной функцией T, стремится к нулю при $T \to +\infty$ равномерно по $\Delta \in [0, +\infty]$; отсюда имеем

$$\varphi(T, \Delta, X_0) = O(T^{-1}) \tag{2.20}$$

при фиксированном X_0. Дифференцируя (2.20), получим соотношение

$$d\varphi / dT = O(T^{-2}) \tag{2.21}$$

которое также выполнено равномерно по Δ. Вычисляя $d\varphi/dT$ и учитывая соотношение (2.21), находим, что равномерно по $\Delta \in [0 + \infty)$ выполнено соотношение

$$\lim [U^2(T, T+\Delta, X_0) + U^2(T+\Delta, T+\Delta, X_0)] = 0 \quad \text{при } T \to +\infty$$

Из (2.17) видно, что $U^2(T+\Delta, T+\Delta, X_0) \to 0$ при $T \to +\infty$ равномерно по $\Delta \in (0, +\infty)$, поэтому $U^2(T, T+\Delta, X_0) \to 0$ при $T \to +\infty$ равномерно по $\Delta \in [0 + \infty)$.

Следовательно, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $T_1 > 0$, что при $T > T_1$ справедливо неравенство

$$U^2(t, T, X_0) < \varepsilon \quad \text{для } t \in [T_1, T]$$

С другой стороны, из формулы (2.19) с учетом непрерывности по t функции $U^2(t, T, X_0)$ вытекает, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $T_2 > 0$, что при $T > T_2$ выполняется неравенство

$$U^2(t, T, X_0) < \varepsilon \quad \text{для } t \in [0, T_1]$$

Выбирая в качестве ε постоянную c^2, фигурирующую в неравенстве (0.7), получим $T_0 = \max(T_1, T_2)$ такое, что при $T > T_0$ выполнено неравенство

$$|U(t, T, X_0)| \leqslant U_*(t) \quad \text{для } t \in [0, T]$$

Полученное неравенство показывает, что при $T > T_0$ формула (2.12) определяет допустимое управление, что и требовалось доказать.

Замечание. В том случае, когда условие (2.18) выполнено не при всех $\Lambda_0 \neq 0$, можно аналогично показать, что

$$\lim U^2(t, T, X_0) = [B^*(t)\, \psi(t)\, V_0 X_0]^2 = U^2(t, X_0) \quad \text{при } T \to +\infty$$

Полученное соотношение можно использовать для проверки ограничения (0.1). Если $U_*^2(t) > U^2(t, X_0)$, то существует такое T', что при $T > T'$ существует допустимое управление в рассматриваемой задаче при заданном X_0.

Теорема 2.2 дает возможность решить вопрос о существовании оптимальных управлений. В дальнейшем будем считать выполненным условие A и условие (2.1).

Если выполнено условие (2.18) при любом $\Lambda_0 \neq 0$, то в силу теоремы 2.2 для задачи о быстродействии при связях (0.5), (0.3), (0.4) и ограничении (0.1) существуют допустимые управления и, следовательно, существует единственное оптимальное управление. Время быстродействия $T_0 = T_0(Y_0)$ при этом будет функцией вектора Y_0. Оптимальное по быстродействию управление, дополненное нулевым вектором при $t \in [T_0, T]$, будет допустимым в задаче минимизации функционала (0.2) при тех же условиях. Поэтому при $T \geqslant T_0(Y_0)$ существует единственное оптимальное управление в задаче 1.

Если же условие (2.18) выполнено не при любом $\Lambda_0 \neq 0$, то рассмотрим задачу 2 с краевыми условиями (2.8). Множество всех X_0, для которых эта задача разрешима, назовем областью управляемости (в работе [1] показано, что указанное множество будет выпуклым). Если плоскость (0.3) имеет с областью управляемости непустое пересечение, то задача 2 имеет единственное оптимальное управление, в противном случае задача 2 неразрешима. В том случае, когда задача 2 разрешима, задача 1 имеет единственное оптимальное управление только при $T \geqslant T_0(Y_0)$.

Заметим, что в силу теоремы 2.2 область управляемости содержит множество точек X_0, удовлетворяющих неравенству

$$U^2(t, X_0) < U_*^2(t) \qquad t \in [0 + \infty) \tag{2.22}$$

В заключение параграфа рассмотрим случай, когда матрицы A и B постоянные. Допустим, что условие (2.18) выполнено не при всех $\Lambda_0 \neq 0$, тогда существует вектор $\Lambda_0' \neq 0$, такой, что интеграл

$$\int_0^T (B^* \Psi \Lambda_0')^2 \, dt \qquad \text{при } T \to + \infty$$

стремится к конечному пределу. Так как этот интеграл является аналитической функцией T, то при $T \to + \infty$ производные его стремятся к нулю, откуда имеем

$$\lim_{T \to +\infty} B^* (A^*)^k \Lambda_0' = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.23}$$

Из соотношений (2.23) с учетом выполнения условия A следует

$$\lim_{T \to +\infty} \Psi(T) \Lambda_0' = 0 \tag{2.24}$$

Равенство (2.24) показывает, что нулевое решение однородной системы (1.1) условно асимптотически устойчиво. Последнее возможно тогда и только тогда, когда матрица этой системы имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями. Это равносильно тому, что матрица A имеет характеристические числа с положительными вещественными частями. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Если в системе (0.5) матрицы A, B — постоянные, причем система векторов-столбцов матриц (1.8) имеет n линейно независимых векторов, все характеристические числа матрицы A имеют неположительные вещественные части и

$$\operatorname{rang}(L_0^*, e^{A^*t} L_1^*) = n$$

при любом t, то задача 2 имеет единственное решение. Задача 1 однозначно разрешима только при $T \geqslant T_0(Y_0)$, где $T_0(Y_0)$ — время быстродействия в соответствующей задаче 2.

3. Метод решения. Рассмотрим сначала метод решения задачи 2. Так как оптимальное управление имеет вид (1.5), то для отыскания его достаточно найти соответствующее начальное значение Λ_0 вектора $\Lambda(t)$. В работе [5] показано, что в случае $L_0 = L_1 = E$, где E — единичная матрица порядка n, решение задачи отыскания начального Λ_0 можно свести к решению задачи отыскания условного экстремума некоторой функции, причем последняя задача может быть решена градиентным методом.

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. Значение вектора Λ_0, определяющее по формуле (1.1) оптимальное управление в задаче 2, доставляет относительный минимум функции

$$F_1(X_0, T) = \min F(\Lambda_0, X_0, T) = 0 \qquad \left(F = \Lambda_0^* X_0 + \int_0^T u_*(t)\,|B^*\Psi\Lambda_0|\,dt\right) \tag{3.1}$$

при условиях

$$|\Lambda_0| = 1, \quad K_0\Lambda_0 = 0, \quad K_1\Psi(T)\Lambda_0 = 0$$

Этот минимум будет единственным относительным экстремумом функции F, а значения Λ_0' и T', доставляющие минимум F, равный нулю, не зависят от $X_0 \in G_0$.

Доказательство. Из условия теоремы 2.1 параграфа 2 следует, что $\operatorname{rang}(K_0, K_1, \Psi(T)) \leqslant n$. Очевидно, что теорема имеет смысл только в том случае, когда $\operatorname{rang}(K_0, K_1\Psi(T)) < n$, что в дальнейшем и будем предполагать. Допустим, что Λ_0' — значение вектора Λ_0, определяющее по формуле (1.5) оптимальное по быстродействию управление, которое переводит за время T' точку $X_0 \in G_0$ в точку $X_1 \in G_1$ по траектории системы (0.5). Тогда в силу краевых условий

$$X^*(T')\Lambda(T') = 0, \qquad \Lambda_0'^* X_0 = \Lambda_0'^* X_0' \qquad \Lambda(T') = \Psi(T')\Lambda_0', \quad X_0' \in G_0 \tag{3.2}$$

Отсюда

$$X_0'^*\Lambda_0' + \int_0^T u_*(t)\,|B^*\Psi\Lambda_0'|\,dt = 0 \tag{3.3}$$

причем значение $F(\Lambda_0', X_0, T')$ не зависит от $X_0 \in G_0$. Если утверждение теоремы несправедливо, то $F_1(X_0, T') < 0$. Нетрудно видеть, что $F_1(\mu X_0, T')$ будет непрерывной функцией μ, причем $\lim F_1(\mu X_0, T') > 0$ при $\mu \to +0$, так как выполнено условие A. Поэтому найдется такое μ_0, $0 < \mu_0 < 1$, что

$$F_1(\mu_0 X_0, T') = 0 \tag{3.4}$$

Используя метод множителей Лагранжа, необходимое условие минимума (3.4) получим в следующем виде

$$\mu_0 X_0 + \int_0^{T'} \frac{\Psi^* B B^* \Psi \Lambda_0''}{|B^*\Psi\Lambda_0''|}\,u_*\,dt + K_0^* Y + \Psi^*(T') K_1^* Z + \lambda\Lambda_0'' = 0$$

$$K_0\Lambda_0'' = 0, \qquad K_1\Psi(T')\Lambda_0'' = 0, \qquad \Lambda_0''^2 = 1$$

$$Y^* = (y_1, \ldots, y_n), \qquad Z^* = (z_1, \ldots, z_n)$$

Здесь Y^*, Z^*, λ — множители Лагранжа. Умножим на $\Lambda_0''^*$ первое из этих соотношений; тогда с учетом остальных соотношений, а также (3.4) получим $\lambda = 0$; откуда

$$\mu_0 X_0 + \int_0^{T'} \frac{\Psi^* B B^* \Psi \Lambda_0''}{|B^*\Psi\Lambda_0''|}\,u_*\,dt + K_0^* Y + (K_1\Psi(T'))^* Z = 0 \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) преобразуем к виду

$$\Phi(T')\,[\mu_0 X_0 + K_0^* Y + \int_0^{T'} \Psi^* B U(t, \Lambda_0'')\,dt] + K_1^* Z = 0$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная нормированная матрица системы $\dot X = AX$, а $U(t, \Lambda_0'')$ определено по формуле (1.5). Перепишем последнее выражение в виде

$$X(\mu_0, T') + K_1^* Z = 0$$

тогда нетрудно видеть, что управление $U(t, \Lambda_0'')$ переводит за время T' точку $\mu_0 X_0 + K_0^* Y$, лежащую в плоскости $L_0(\mu_0 X_0 + K_0^* Y) = \mu_0 Y_0$, в точку $X_0(\mu_0, T') \in G_1$ по траектории системы (0.5), и потому будет оптимальным по быстродействию управлением. С другой стороны, управление $\mu_0 U(t, \Lambda_0')$ переводит за время T' точку $\mu_0 X_0$ из плоскости $L_0 \mu_0 X_0 = \mu_0 Y_0$ в точку $\mu_0 X(T') \in G_1$ по траектории системы (0.3), что противоречит единственности оптимального управления $U(t, \Lambda_0')$ Теорема доказана.

Теорема 3.1 ничего не говорит о множестве значений Λ_0, доставляющих относительный минимум (3.1). Нетрудно доказать, что это множество будет выпуклым и замкнутым. Действительно, ввиду выпуклости функции F множество Λ_0 таких, что $F(\Lambda_0, X_0, T) \leqslant 0$, будет выпуклым и замкнутым. Если при этом нуль будет наименьшим значением функции F, то $F(\Lambda_0, X_0, T) \geqslant 0$ при любом Λ_0, откуда следует, что множество тех Λ_0, при которых $F(\Lambda_0, X_0, T) = 0$ совпадает с множеством Λ_0, для которых $F(\Lambda_0, X_0, T) \leqslant 0$, что и требовалось установить.

Выше указывалось, что для выяснения условий разрешимости большую роль играет область управляемости, определяемая уравнением (0.5), ограничением (0.1) и краевым условием (0.4). Теорема 3.1 показывает, что область управляемости совпадает с множеством всех X_0 $(L_0 = E)$, для которых функция F (при $K = 0$) достигает неположительного наименьшего значения на пересечении сферы $|\Lambda_0| = 1$ с множеством $k_1\Psi(T)\Lambda_0 = 0$.

Рассмотрим теперь задачу 1, предполагая, что $T > T_0(Y_0)$, где $T_0(Y_0)$ — время быстродействия в соответствующей задаче 2. Случай $T = T_0(Y_0)$ неинтересен, ибо тогда единственным допустимым управлением будет управление, оптимальное по быстродействию. В задаче 1 оптимальное управление определяется формулой

$$U(t) = \begin{cases} \dfrac{B^*\Psi\Lambda_0}{|B^*\Psi\Lambda_0|}\,\sigma(|B^*\Psi\Lambda_0|) & \text{при } t \in S \\ \dfrac{B^*\Psi\Lambda_0}{|B^*\Psi\Lambda_0|}\,u_*(t) & \text{при } t \in S' \end{cases} \tag{3.6}$$

где через S и S' обозначены множества всех $t \in [0, T]$, для которых выполнены соответственно неравенства

$$\sigma(|B^*\Psi\Lambda_0|) < u_*(t) \quad \text{или} \quad \sigma(|B^*\Psi\Lambda_0|) \geqslant u_*(t)$$

Если управление (3.6) переводит точку $X_0 \in G_0$ в точку $X(T) \in G_1$ по траектории системы (0.5), то, как показано при доказательстве теоремы 2.1 параграфа 2, справедливо следующее равенство

$$W_1 = \Lambda_0^* X_0 + \int_S |B^*\Psi\Lambda_0|\,\sigma(|B^*\Psi\Lambda_0|)\,dt + \int_{S'} |B^*\Psi\Lambda_0|\,u_*\,dt = 0 \tag{3.7}$$

Теперь нетрудно установить теорему, аналогичную теореме 1.

Теорема 3.2. Значение начального вектора Λ_0, определяющее по формуле (3.6) оптимальное управление в задаче 1, доставляет функции

$$W_2 = \int_S f(\sigma(|B^*\Psi\Lambda_0|))\,dt$$

максимум при условиях $W_1 = 0$, $K_0\Lambda_0 = 0$, $K_1\Psi(T)\Lambda_0 = 0$. Указанное значение Λ_0 определяется единственным образом и не зависит от $X_0 \in G_0$.

Доказательство. Покажем, что при фиксированном $X_0 \in G_0$ множество Λ_0, удовлетворяющих соотношению (3.7) и условиям трансверсальности, будет ограниченным множеством полупространства $X_0^*\Lambda_0 < 0$. Действительно, при любом Λ_0 таком, что $X_0^*\Lambda_0<0$ мера множества $S(\Lambda_0)$ будет не меньше некоторой положительной величины, так как в противном случае соотношение (3.1) нарушается. Поэтому, в силу условий (0.6) и условия A при $\mu\to\infty$ справедливо неравенство $\lim' \mu^{-1}W_1(X_0, \mu\Lambda_0)>0$ равномерно по $|\Lambda_0|=1$, удовлетворяющих условиям трасверсальности. Отсюда следует, что найдется такое $\mu_0 > 0$, что $W_1(X_0, \mu\Lambda_0) > 0$ при $\mu > \mu_0$ для всех Λ_0, подчиненных указанным ограничениям, что и доказывает требуемую ограниченность определенного выше множества Λ_0. Следовательно, функция W_2 достигает своего наибольшего значения при указанных в условии теоремы ограничениях. Допустим, что этот максимум достигается при Λ_0'. Используя метод множителей Лагранжа, необходимые условия относительного экстремума функции W_2 можно записать в следующей форме

$$\mu\left[X_0 + \int_S \sigma(|B^*\Psi\Lambda_0'|)\frac{\Psi^*BB^*\Psi\Lambda_0'}{|B^*\Psi\Lambda_0'|}dt + \int_{S'}\frac{\Psi^*BB^*\Psi\Lambda_0'}{|B^*\Psi\Lambda_0'|}u_*\,dt + \right.$$

$$\left. + (\mu + 1)\int_S \sigma'(|B^*\Psi\Lambda_0'|)\,\Psi^*BB^*\Psi\Lambda_0'\,dt + K_0^*Y + \Psi^*(T)K_1^*Z = 0 \right. \qquad (3.8)$$

$$K_0\Lambda_0' = 0, \qquad K_1\Psi(T)\Lambda_0' = 0, \qquad W_1 = 0$$

Умножая первое из равенств (3.8) слева на $\Lambda_0'^*$, получим

$$(\mu + 1)\int_S \sigma'(|B^*\Psi\Lambda_0'|)(|B^*\Psi\Lambda_0'|)^2\,dt = 0$$

Отсюда вытекает $\mu + 1 = 0$. Поэтому справедливо равенство

$$\Phi(T)\left[X_0 - K_0^*Y_0 + \int_0^T \Psi^*BU(t,\Lambda_0')\,dt\right] - K_1^*Z = 0$$

где $U(t, \Lambda_0')$ определяется по формуле (3.6). Полученное равенство показывает, что управление $U(t, \Lambda_0')$ будет экстремальным управлением в задаче 1. Таким образом, если W_2 достигает при $\Lambda_0 \neq 0$ относительного экстремума при условиях (1.2), (3.7), то Λ_0 определяет по формуле (3.6) экстремальное управление в задаче 1. Так как экстремальное управление единственно, то при любых Λ_0, доставляющих условный экстремум функции W_2, формула (3.6) определяет одно и то же управление $U(t, \Lambda_0)$. Из совпадений управлений $U(t, \Lambda_0)$ при разных Λ_0 на множестве S ненулевой меры следует совпадение при различных Λ_0 векторов $B^*\Psi\Lambda_0$ на S, что невозможно в силу условия А. Таким образом, единственность Λ_0, доставляющего условный экстремум функции W_2, установлена, что и доказывает требуемое утверждение.

Теоремы 3.1 и 3.2 показывают, что для нахождения оптимальных управлений в задачах 1 и 2 достаточно найти относительный экстремум некоторых функций. Однако на практике значительно удобнее решать задачи на отыскание абсолютного экстремума некоторых функций. В рассматриваемых случаях нахождение относительных экстремумов удается свести к задачам отыскания абсолютных экстремумов. Действительно, для нахождения оптимального управления в задаче 1 достаточно найти абсолютный максимум функции

$$W_2 - |W_1| - {}^1/_2\,(K_0\Lambda_0)^2 - {}^1/_2\,(K_1\Psi\,(T)\,\Lambda_0)^2 \tag{3.9}$$

Аналогично, для нахождения оптимального управления в задаче 2 достаточно найти абсолютный минимум функции

$$|F\,(\Lambda_0,\ X_0,\ T)| + {}^1/_2\,(K_0\Lambda_0)^2 + {}^1/_2\,(K_1\Psi\,(T)\,\Lambda_0)^2 \tag{3.10}$$

равный нулю. Указанный переход от относительных к абсолютным экстремумам возможен в силу единственности относительных экстремумов. При нахождении экстремумов (3.9) и (3.10) можно использовать градиентный метод, сходимость которого не вызывает сомнений, так как искомый экстремум единственный. В качестве начального приближения можно выбирать в первом случае $\Lambda_0 = \lambda X_0 / |X_0|$, где $\lambda < 0$ такое, что $W_1 \geqslant 0$, а во втором $\Lambda_0 = -\ X_0 \,/\, |\, X_0|$. В обоих случаях точку X_0 можно выбирать на плоскости G_0 так, чтобы величина $|\, X_0 \,|$ была минимальной. Остается описать метод нахождения градиента функций (3.9), (3.10). В том случае, когда $W_1 \geqslant 0$, градиент функции (1.10) имеет следующий вид:

$$\Delta\Lambda_0 \equiv X_0 + \int\limits_0^T \Psi^*\,BU\,(t,\ \Lambda_0)\,dt + K_0^*\,K_0\Lambda_0 + \Psi^*\,(T)\,K_1^*\,K_1\,\Psi\,(T)\,\Lambda_0 \tag{3.11}$$

Градиент функции (1.11) имеет вид

$$\Delta\Lambda_0 \equiv \operatorname{sign} F\Big(X_0 + \int\limits_0^T \Psi^* BU\,(t,\Lambda_0)\,dt\Big) + \tag{3.12}$$

$$+ K_0^*K_0\Lambda_0 + \Psi^*\,(T)\,K_1^*\,K_1\Psi\,(T)\,\Lambda_0$$

В формуле (3.11) функция $U\,(t,\ \Lambda_0)$ определяется выражением (3.6), а в формуле (3.12) функция $U\,(t,\ \Lambda_0)$ имеет вид (1.5). Остановимся более подробно на вычислении градиента функции (3.9) по формуле (3.11). Решение системы уравнений (0.5), где U определяется по формуле (3.6), с начальными данными $X\,(0) = X_0$ можно записать в следующей форме

$$X\,(T) = \Phi\,(T)\,\Big(X_0 + \int\limits_0^T \Psi^* BU\,(t,\Lambda_0)\,dt\Big) \tag{3.13}$$

Рассмотрим решение системы уравнений

$$Z^{\cdot} = -AZ + B\,(T-t)\,U\,(T-t) \tag{3.14}$$

с начальными условиями $Z\,(0) = Z_0$. Тогда при $t = T$ получим

$$Z\,(T) = \Phi\,(-T)\Big[Z_0 + \int\limits_0^T \Phi\,(t)\,B\,(T-t)\,U\,(T-t)\,dt\Big] \tag{3.15}$$

Если в интеграле полученного выражения сделать замену переменной $v = T - t$, то выражение (1.15) примет вид:

$$\dot{\mathbf{Z}}(T) = \Psi^*(T)\,\mathbf{Z}_0 + \int_0^T \Psi^*(t)\,B(t)\,\mathbf{U}(t)\,dt \tag{3.16}$$

Если положить $\mathbf{Z}_0 = K_1{}^*K_1\Psi(T)\,\Lambda_0$ в формуле (3.16), то получим для градиента (3.10) следующее выражение

$$\Delta\Lambda_0 = \mathbf{Z}(T) + \mathbf{X}_0 + K_0{}^*\,K_0\Lambda_0 \tag{3.17}$$

При выводе формулы (3.17) учитывалось, что $\dot{U}(T - t)$ получается по формуле (3.6) путем замены в ней t на $T - t$. Нетрудно видеть, что вектор $\Psi(T - t)\,\Lambda_0 = \Psi(-t)\,\Psi(T)\,\Lambda_0$ получается при интегрировании системы уравнений

$$\Omega^{\boldsymbol{\cdot}} = A^*\Omega \tag{3.18}$$

с начальными данными $\Omega(0) = \Psi(T)\,\Lambda_0$. Таким образом, искомый градиент $\Delta\Lambda_0$ можно получить по формуле (3.17), где $\mathbf{Z}(T)$ находится путем интегрирования от 0 до T системы уравнений

$$\dot{\mathbf{Z}} = -A\mathbf{Z} + B(T - t)\,\mathbf{U}(T - t, \Omega), \qquad \dot{\Omega} = A^*\Omega \tag{3.19}$$

с начальными условиями $\mathbf{Z}(0) = K_1{}^*\,K_1\Psi(T)\,\Lambda_0$, $\Omega(0) = \Psi(T)\,\Lambda_0$. Здесь $\mathbf{U}(T - t, \Omega)$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{U}(T - t, \Omega) = \begin{cases} \dfrac{B^*(T-t)\,\Omega}{|B^*(T-t)\,\Omega|}\,\sigma(|B^*(T-t)\,\Omega|) & \text{при } T - t \in S \\[2ex] \dfrac{B^*(T-t)\,\Omega}{|B^*(T-t)\,\Omega|}\,u^*(T-t) & \text{при } T - t \in S' \end{cases}$$

При этом вектор $\Psi(T)\,\Lambda_0$ находится интегрированием от 0 до T системы $\Lambda^{\boldsymbol{\cdot}} = -A^*\Lambda$ с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_0$. Градиент (3.12) вычисляется аналогично с той лишь разницей, что $\mathbf{U}(t, \Lambda_0)$ находится теперь по формуле (1.5).

Поступила 1 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954, стр. 91.
3. Полиа Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Гостехтеоретиздат, 1956, т. 1, стр. 33.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехтеоретиздат, 1954.
5. Красовский Н. Н. Выбор параметров оптимальных устойчивых систем. Труды 1 Международного конгресса по автоматическому управлению. Изд. АН СССР, 1961.