стает зависеть от них. Это предположение было подвергнуто критике; особенно просто показать неверность этого предположения в рассматриваемом здесь случае.

Рассмотрим случай больших t. Отбрасывая быстро убывающие во времени члены (этот процесс «убывания» иллюстрируется на фиг. 2), из формул (3) получим $p_{ij}=0$ $(i \neq j)$, $p_{yy} = p_{zz}=-{}^1/_2 p_{xx}$, что совпадает с соответствующими результатами метода Чепмена — Энскога. Из формул (6) получим

$$\Pi / A = (1 + t)^{{}^1/_3 r_1}, \qquad \Pi_{xx} = -{}^1/_2 (5 + r_1)$$

Таким образом, при больших t, малых β и произвольных Π_{xx} (0) метод Чепмена — Энскога правильно дает значения отношений Π / A и Π_{xx} и неправильно — абсолютные значения p и p_{xx} (за исключением случая $A = 1$, рассмотренного выше).

Сделанные выше выводы справедливы и в случае сдвигового течения за исключением того обстоятельства, что при $A = 1$ в рассмотренном здесь решении результаты расчетов в приближении Барнетта близки к точным в гораздо более широком интервале значений β, чем в случае сдвигового течения. Относительный успех метода Чепмена—Энскога в задаче о сдвиговом течении в работе [2] был объяснен тем, что в этом случае тождественно равны нулю те члены уравнений этого метода, наличие которых, как утверждается в работах [2,5], ставит под сомнение корректность метода Чепмена—Энскога. Однако в рассмотренном здесь случае эти члены отличны от нуля.

Автор признателен М. Н. Когану и А. А. Никольскому за интерес к работе.

Поступила 19 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwells kinetic theory. J. of Rational Mechan. and Anal., 1956, 5, № 1.
3. Галкин В. С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
4. Галкин В. С. О пределах применимости релаксационной модели кинетического уравнения Больцмана. Инженерный журнал, 1961, № 3.
5. Jkenberry E., Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwells kinetic theory. J. of Rational Mechan. and Anal., 1956, 5, № 1.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ НЕРАВНОМЕРНО ОБОГРЕВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е. М. Шахов (Москва)

В задачах, связанных с аэродинамическим нагреванием, процесс распространения тепла в твердом теле обычно считают одномерным (точнее — квазиодномерным), предполагая параметрической зависимость от координаты вдоль обогреваемой поверхности. Однако измерения тепловых потоков [1] показывают, что влияние продольной теплопроводности может быть существенным даже при сравнительно небольших временах нагревания. В связи с этим представляется целесообразным выяснить и оценить отклонение распределения температуры от одномерного на некоторых простых задачах, учитывающих неравномерный обогрев поверхности. Ниже рассматривается модельная задача о нагревании тела в окрестности критической точки и задача о нагревании тела за движущимся вдоль его поверхности тепловым фронтом.

§ 1. Аэродинамическое нагревание тела в окрестности передней критической точки. Рассмотрим следующую задачу (плоскую $\nu = 1$ и осесимметричную $\nu = 2$) о нагревании полубесконечного тела $y > 0$, имеющего всюду одинаковую температуру T_∞ в начальный момент, при заданной нормальной производной на границе

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\nu - 1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$t = 0, \qquad y = \infty, \qquad T = T_\infty \qquad (1.1)$$

$$y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -T_\infty k (\beta + \alpha e^{-k^2 r^2}), \qquad r = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Задачу (1.1) можно рассматривать как модельную для описания процесса распространения тепла в лобовой части тупого тела, подверженного аэродинамическому нагреванию. Перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$r' = kr, \qquad y' = ky, \qquad t' = k^2a^2t, \qquad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}$$

В безразмерных величинах задача (1.1) формулируется в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial\theta}{\partial t'} = \frac{\partial^2\theta}{\partial r'^2} + \frac{\nu - 1}{r'}\frac{\partial\theta}{\partial r'} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y'^2} \\ t' = 0, \qquad y = \infty, \qquad \theta = 0 \\ y' = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y'} = -(\beta + \alpha e^{-r'^2}), \qquad r' = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial r'} = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Ниже для простоты записи штрихи в обозначениях опущены. Таким образом, решение задачи (1.2) зависит от двух безразмерных параметров α и β, причем вследствие линейности проблемы можно записать

$$\theta = \theta\,(t, r, y; \alpha, \beta) = \theta_1\,(t, r, y; \alpha) + \theta_2\,(t, y; \beta)$$

Для функции θ_2, удовлетворяющей граничному условию

$$\partial\theta_2 / \partial y = -\beta \quad \text{при } y \to 0,$$

имеем

$$\theta_2\,(t, y; \beta) = \beta \int_0^t \exp\left(-\frac{y^2}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}$$

Функцию θ_1 будем искать в виде интеграла Фурье,

$$\theta_1\,(t, r, y; \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \vartheta\,(t, s, y) \cos sr\, ds \qquad \text{для } \nu = 1$$

или в виде интеграла Фурье — Бесселя

$$\theta_1\,(t, r, y; \alpha) = \int_0^\infty \vartheta\,(t, s, y)\, J_0\,(sr)\, s ds \qquad \text{для } \nu = 2$$

Здесь $J_0\,(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Тогда для ϑ будем иметь задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} - s^2\vartheta \\ t = 0, \qquad \vartheta = 0; \qquad y = 0, \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{1}{(\sqrt{2})^\nu}\,\alpha \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Задачу (1.3) можно решать операционным методом. Для $\vartheta\,(t, s, y)$ получим

$$\vartheta\,(t, s, y) = \frac{\varkappa}{(\sqrt{2})^\nu} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{y^2}{4\tau}\right) e^{-s^2\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}$$

Используя формулы обратных преобразований Фурье и Фурье — Бесселя для функции $\exp\,(-ks^2)$ (см. [2], стр. 216, 585), находим θ_1

$$\theta_1 = \alpha \int_0^t \exp\left(-\frac{y^2}{4\tau} - \frac{r^2}{4\tau + 1}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau\,(4\tau + 1)^\nu}} \tag{1.4}$$

Таким образом, задача (1.1) решена. Сравним полученное решение с квазиодномерным решением. Последнее имеет вид

$$\theta_0 = (\beta + \alpha e^{-r^2}) \int_0^t \exp\left(-\frac{y^2}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} = (\beta + \alpha e^{-r^2})\, 2\sqrt{t}\, \mathrm{i\,erfc}\, \frac{y}{2\sqrt{t}} \tag{1.5}$$

Здесь (см. [3])

$$\operatorname{ierfc} x = \int_x^\infty \operatorname{erfc} x dx$$

Примем за меру отклонения квазиодномерного решения от точного относительную разность температур, даваемых обоими решениями, в точке $r = y = 0$. Определенная таким образом разность, обозначим ее через $\Delta\theta_*$, равна

$$\Delta\theta_* = \frac{\theta_0(t, 0, 0) - \theta(t, 0, 0)}{\theta_0(t, 0, 0)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^t \left[\frac{1}{(4\tau+1)^{1/2\nu}} - 1\right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

Пусть для определенности $\nu = 2$. Тогда

$$\Delta\theta_* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg} 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\right) \tag{1.6}$$

Для малых t величина $\Delta\theta_*$ возрастает линейно со временем

$$\Delta\theta_* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{4}{3} t \tag{1.7}$$

Чтобы полученный результат можно было применить к установившимся задачам выразим $\Delta\theta_*$ через безразмерную характерную толщину δ теплового слоя. Толщину δ определим как расстояние от поверхности, на котором градиент температуры, рассчитанный по квазиодномерному решению, составляет 0.5% от той же величины на поверхности. Так как

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial y} = -(\beta + \alpha e^{-r^2}) \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{t}}$$

то $\delta = 4\sqrt{t}$. Поэтому из (1.6) получаем

$$\Delta\theta_* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{2}{\delta} \operatorname{arctg}\frac{\delta}{2}\right) \tag{1.8}$$

Для малых δ

$$\Delta\theta_* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\delta^2}{12} \tag{1.9}$$

Из полученных формул следует, что отклонение распределения температуры от одномерного будет заметным в том случае, если толщина теплового слоя превосходит характерную длину изменения теплового потока на границе.

§ 2. Нагревание стенки за движущимся тепловым фронтом, Г. А. Тирский [4] рассмотрел установившуюся (в подвижной системе координат) задачу о нагревании полупространства за движущимся скачком уплотнения, пренебрегая перетеканием тепла вдоль поверхности тела за счет теплопроводности (квазиодномерное решение). Ниже рассматривается та же задача, не обязательно установившаяся, однако только для твердого тела, без предположения о квазиодномерности процесса. Принимается, что тепловой поток на поверхности тела известен.

Пусть вдоль поверхности тела-полупространства $y > 0$ в положительном направлении оси x перемещается тепловой фронт со скоростью V. В момент $t = 0$ фронт находится в плоскости $x = 0$. Примем, что тело разделено тепловой изоляцией вдоль плоскости $x = 0$ на две четверти пространства. Определим процесс распространения тепла в области $x > 0$, $y > 0$.

В безразмерных переменных, введенных таким же образом, как и в предыдущем параграфе, задача формулируется в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}; \qquad t = 0, \quad \theta = 0$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0; \qquad y = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \begin{cases} -\alpha(x, t), & x < Rt \\ 0, & x > Rt \end{cases} \qquad \left(R = \frac{V}{ka^2}\right) \tag{2.1}$$

Отметим, что безразмерный параметр R аналогичен числу Рейнольдса в теории пограничного слоя, так как $[k] = L^{-1}$, $[a^2] = L^2T^{-1}$. Отметим также, что решение работы [4] для твердого тела представляет собою решение типа пограничного слоя именно по этому параметру.

Построим функцию Грина сформулированной задачи. Если найти решение $U(x, y, t; \xi)$, удовлетворяющее начальному условию, условию теплоизоляции и условию при $y = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \begin{cases} -1, & x < \xi,\ t > 0 \\ 0, & x > \xi,\ t > 0 \end{cases}$$

тогда $\partial^2 U / \partial\xi\partial t$ даст функцию влияния точечного источника тепла, выделившегося в момент $t = 0$ в точке $x = \xi$, и значит функция Грина представима в форме

$$G(x, y, t; \xi, \tau) = \frac{\partial^2 U(x, y, t-\tau; \xi)}{\partial\xi\partial t} \tag{2.2}$$

Функцию $U(x, y, t; \xi)$ будем искать в виде косинус-интеграла Фурье по x

$$U(x, y, t; \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(s, y, t; \xi) \cos \xi s\, ds$$

Для определения $U(s, y, t; \xi)$ имеем задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - s^2 U; \qquad t = 0, \quad U = 0; \qquad y = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi s}{s}$$

которую можно решить операционным методом. В результате получим

$$\frac{\partial U(s, y, t; \xi)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi s}{s} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) e^{-s^2 t} \tag{2.3}$$

Дифференцируя (2.3) по ξ и используя интеграл Пуассона [2], найдем согласно (2.2) функцию Грина

$$G(x, y, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi(t-\tau)} \exp\left[-\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right] \left\{\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]\right\} \tag{2.4}$$

Теперь, на основании принципа сложения эффектов от элементарных возмущений, можно записать решение задачи (2.1) в виде интеграла

$$\theta(x, y, t) = \int_0^t \int_0^{R\tau} G(x, y, t; \xi, \tau)\, \alpha(\xi, \tau)\, d\xi d\tau \tag{2.5}$$

Используем полученные результаты для оценки точности квазиодномерного решения. Если, в соответствии с [4], взять $\alpha(x, t)$ в виде

$$\alpha(x, t) = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\pi(Rt - x)}} \tag{2.6}$$

то из квазиодномерного решения ($\partial^2\theta / \partial x^2 \equiv 0$) получим, что температура поверхности за скачком равна единице, а впереди скачка температурное поле остается невозмущенным. (Наличие температурного фронта связано с тем, что при отбрасывании $\partial^2\theta / \partial x^2$ уравнение из эллиптического превратилось в параболическое.) Посмотрим теперь, что дает для температуры поверхности формула (2.5) при выбранном $\alpha(x, t)$

$$\theta(x, 0, t) = \theta_0 = \frac{\sqrt{R}}{2\pi^{3/2}} \int_0^t \int_0^{R\tau} \frac{1}{t-\tau} \left\{\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]\right\} \frac{d\xi\, d\tau}{\sqrt{R\tau - \xi}} \tag{2.7}$$

Чтобы сравнить результат с квазиодномерным решением, необходимо в формуле (2.7) перейти к пределу при $t \to \infty$ и исследовать поведение интеграла в окрестности $x = Rt$. При этих условиях первая экспонента в подынтегральном выражении (2.7) может быть отброшена. Тогда получим

$$\theta(x, 0, t) = \frac{\sqrt{R}}{2\pi^{3/2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^{R\tau} \frac{1}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\xi\, d\tau}{\sqrt{R\tau - \xi}} \qquad (2.8)$$

Произведем асимптотическую оценку интеграла (2.8) для больших R. При $R \gg 1$ треугольная область интегрирования на плоскости (ξ, τ) мало отличается от сектора круга с центром в точке (Rt, t). Принимая этот факт во внимание, перейдем к полярным координатам с центром в точке (Rt, t). Пусть r — расстояние от произвольной точки (ξ, τ) до центра (Rt, t), а φ / R — полярный угол, отсчитываемый от линии $\tau = t$ по часовой стрелке. В дальнейшем слагаемыми порядка R^{-2} и выше по сравнению с единицей будем пренебрегать. С принятой точностью формулы перехода к новым переменным интегрирования имеют вид

$$t - \tau = r\frac{\varphi}{R}, \qquad Rt - \xi = r \qquad (2.9)$$

При $t \to \infty$ с точностью до величин порядка R^{-2} будем иметь для температуры поверхности выражение

$$\theta_0(\lambda) = \frac{\sqrt{R}}{2\pi^{3/2}} \int\limits_0^1 \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{1-\varphi}} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(r-\lambda)^2 R}{4\varphi r}\right] \frac{dr}{\sqrt{r}}, \qquad \lambda = Rt - x \qquad (2.10)$$

Интеграл (2.10) вычисляется непосредственно.

Проинтегрируем сначала по r. Положим

$$r = |\lambda| e^{-\rho}, \qquad \beta = \frac{R|\lambda|}{2\varphi}$$

Тогда, согласно [5] (стр. 323), получим

$$\frac{\sqrt{R}}{2\pi^{3/2}} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(r-\lambda)^2 R}{4\varphi r}\right] \frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{|\lambda| R}}{2\pi^{3/2}} \exp\left(\frac{R\lambda}{2\varphi}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\rho}{2} - \beta \operatorname{ch} \rho\right] d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{|\lambda| R}}{2\pi^{3/2}} \exp\left(\frac{R\lambda}{2\varphi}\right)\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{1/2} e^{-\beta} = \begin{cases} \pi^{-1}\sqrt{\varphi} & (\lambda > 0) \\ \pi^{-1}\sqrt{\varphi}\exp(R\lambda/\varphi) & (\lambda < 0) \end{cases}$$

После интегрирования по φ найдем $\theta_0(\lambda)$

$$\theta_0(\lambda) = 1 \quad (\lambda > 0), \qquad \theta_0(\lambda) = \operatorname{erfc}\sqrt{-\lambda R} \qquad (\lambda < 0)$$

Таким образом, за скачком, как и в квазиодномерном решении, температура поверхности равна единице. Зона возмущения перед скачком имеет протяженность порядка $1/R$.

Поступила 14 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Korobkin I. and Grunewald K. H. Jnvestigation of local laminar heat transfer on a hemisphere for supersonic Mach numbers at a low rates of heat flux. J. Aeronaut. Sci., 1957, v. 24, No. 3. Русск. пер. в сб. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. ИЛ, 1959.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехтеоретиздат, 1951.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехтеоретиздат, 1952.
4. Тирский Г. А. Нагрев теплопроводящей стенки за движущимся скачком уплотнения. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 6.
5. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.