ОДНОМЕРНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

В. С. Галкин (Москва)

В работе [1] был указан класс точных решений уравнений кинетических моментов одноатомного максвеллова газа, когда внешние силы отсутствуют, плотность ρ, коэффициент вязкости μ, давление p, напряжения p_{ij} и все остальные моменты функции распределения более высокого порядка зависят только от времени t^*, а компоненты макроскопической скорости, кроме того, линейно зависят от декартовых координат x, y, z. Фундаментальными простейшими решениями этого класса являются сдвиговое решение, при помощи которого изучалась точность известного метода Чепмена — Энскога [2,5] релаксационного кинетического уравнения [4], а также и рассматриваемое здесь одномерное затухающее во времени решение. Ниже основное внимание уделяется применимости метода Чепмена—Энскога.

Пусть вектор скорости газа V направлен по оси x, причем

$$V = x \,/\, (t^* + c), \qquad c = \text{const} \tag{1}$$

Используя соотношения, полученные в работе [1] для указанного класса течений, найдем:

$$\rho = \rho\,(0) \,/\, (1 + t), \qquad t = t^* \,/\, c \tag{2}$$

$$\frac{p_{xy}}{p_{xy}(0)} = \frac{p_{xz}}{p_{xz}(0)} = (1 + t)^{-(2+1/\beta)}, \qquad \frac{p_{yz}}{p_{yz}(0)} = (1 + t)^{-(1+1/\beta)}$$

$$\beta = \frac{\mu\,(0)}{cp\,(0)} = \frac{5}{3}\frac{M^2}{R} \tag{3}$$

$$p_{yy} = -\,{}^1\!/_2 p_{xx} + [p_{yy}(0) + {}^1\!/_2 p_{xx}(0)]\,(1 + t)^{-(1+1/\beta)}, \qquad p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0$$

Здесь M, R—характерные значения чисел Маха и Рейнольдса. Уравнение энергии и уравнение для p_{xx} принимают соответственно вид:

$$\frac{dp}{d\eta} + 5p + 2p_{xx} = 0, \qquad \frac{dp_{xx}}{d\eta} + 4p + \left(7 + \frac{3}{\beta}\right)p_{xx} = 0, \qquad \eta = \frac{\ln\,(t^* + C)}{3} \tag{4}$$

Введем обозначения

$$\Pi = p \,/\, p\,(0), \qquad \Pi_{xx} = p_{xx} \,/\, p \quad \text{или} \quad \Pi_{xx}(0) = p_{xx}(0) \,/\, p\,(0) \tag{5}$$

Решение системы (4) будет иметь следующий вид:

$$\Pi = A\,(1 + t)^{r_1/3}\,[1 + B\,(1 + t)^k], \quad A = \frac{2}{r_2 - r_1}\left[\frac{5 + r_2}{2} + \Pi_{xx}(0)\right], \quad B = \frac{1}{A} - 1$$

$$\Pi_{xx} = -\,\frac{5 + r_1}{2}\,\overset{\circ}{\Pi}_{xx}, \qquad \overset{\circ}{\Pi}_{xx} = [1 + B\,(1 + t)^k]^{-1}\left[1 + B\,\frac{5 + r_2}{5 + r_1}\,(1 + t)^k\right] \tag{6}$$

$$r_{1,2} = -\,\frac{3}{2\beta}\,[1 + 4\beta \mp \sqrt{1 + 4\beta\,({}^1\!/_3 + \beta)}], \qquad k = \frac{r_2 - r_1}{3}$$

При малых β и фиксированных значениях $\Pi_{xx}(0)$ имеем:

$$r_1 = -\,5 + \frac{8}{3}\beta - \frac{16}{9}\beta^2 - \frac{32}{27}\beta^3 + \frac{320}{81}\beta^4 + O\,(\beta^5)$$

$$r_2 - r_1 = -3\beta^{-1} - 2 + O\,(\beta), \; A = 1 - \frac{2}{3}\beta\Pi_{xx}(0) + O\,(\beta^2) \tag{7}$$

При любых фиксированных значениях t, $\Pi_{xx}(0)$ и $\beta \to 0$ из соотношений (6) с учетом (7) получим следующие нулевые члены асимптотического разложения точного решения по малым β

$$\Pi = (1 + t)^{-5/3}, \qquad \Pi_{xx} = -\,{}^4\!/_3\beta \tag{8}$$

которые совпадают с решением задачи в приближениях Эйлера и Навье — Стокса и не зависят от $\Pi_{xx}(0)$.

Решение задачи методом Чепмена — Энскога имеет следующий вид:

$$\Pi = (1 + t)^{1/3 r}$$

$$\Pi_{xx} = -\,{}^1/_2\,(5 + r) \qquad (9)$$

где r совпадает с разложением r_1 (формула (7)): в приближении Навье — Стокса

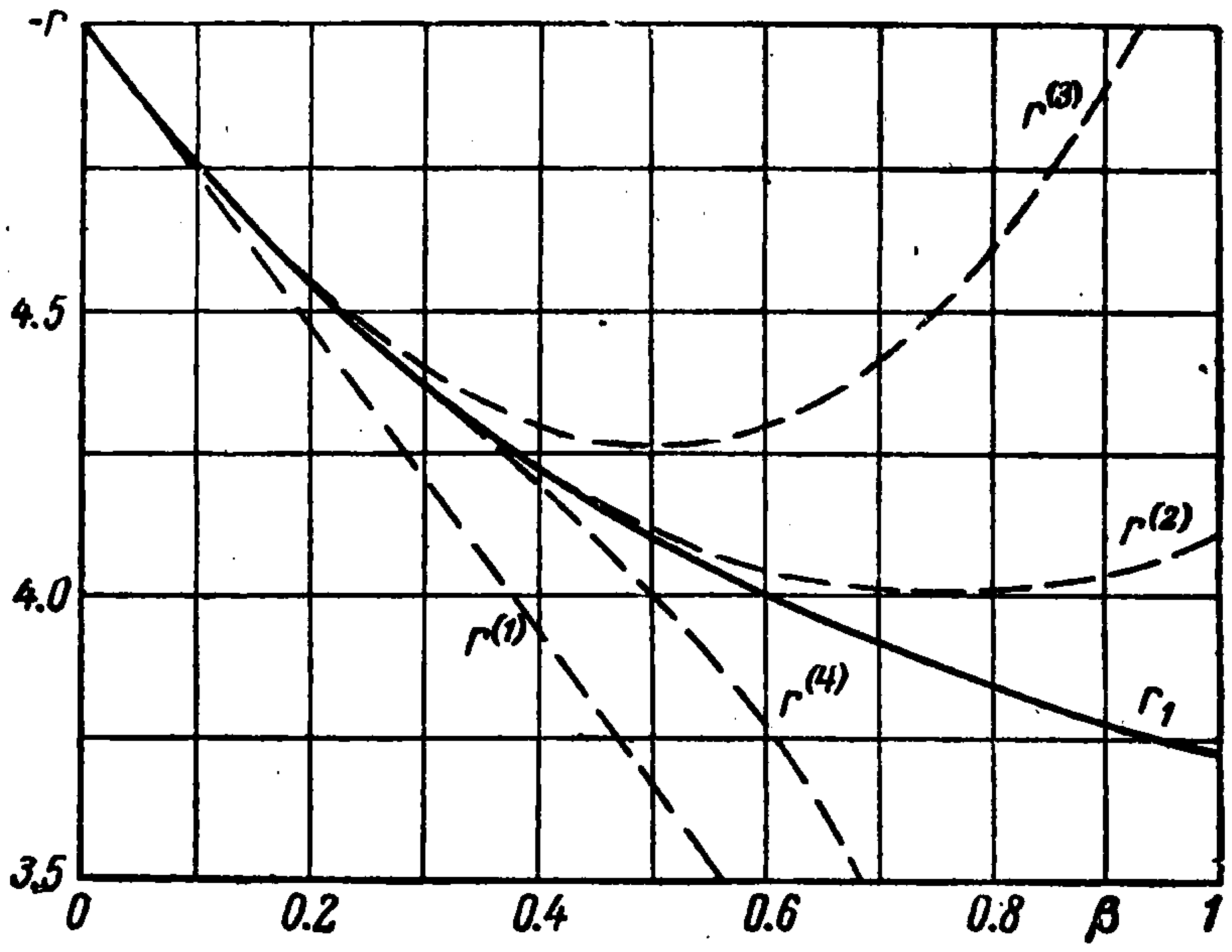
$$r \equiv r^{(1)} = -\,5 + {}^8/_3\beta$$

в приближении Барнетта

$$r \equiv r^{(2)} = -\,5 + {}^8/_3\beta - {}^{16}/_9\beta^2$$

в третьем приближении, рассчитанном при помощи итерационного метода работы [5],

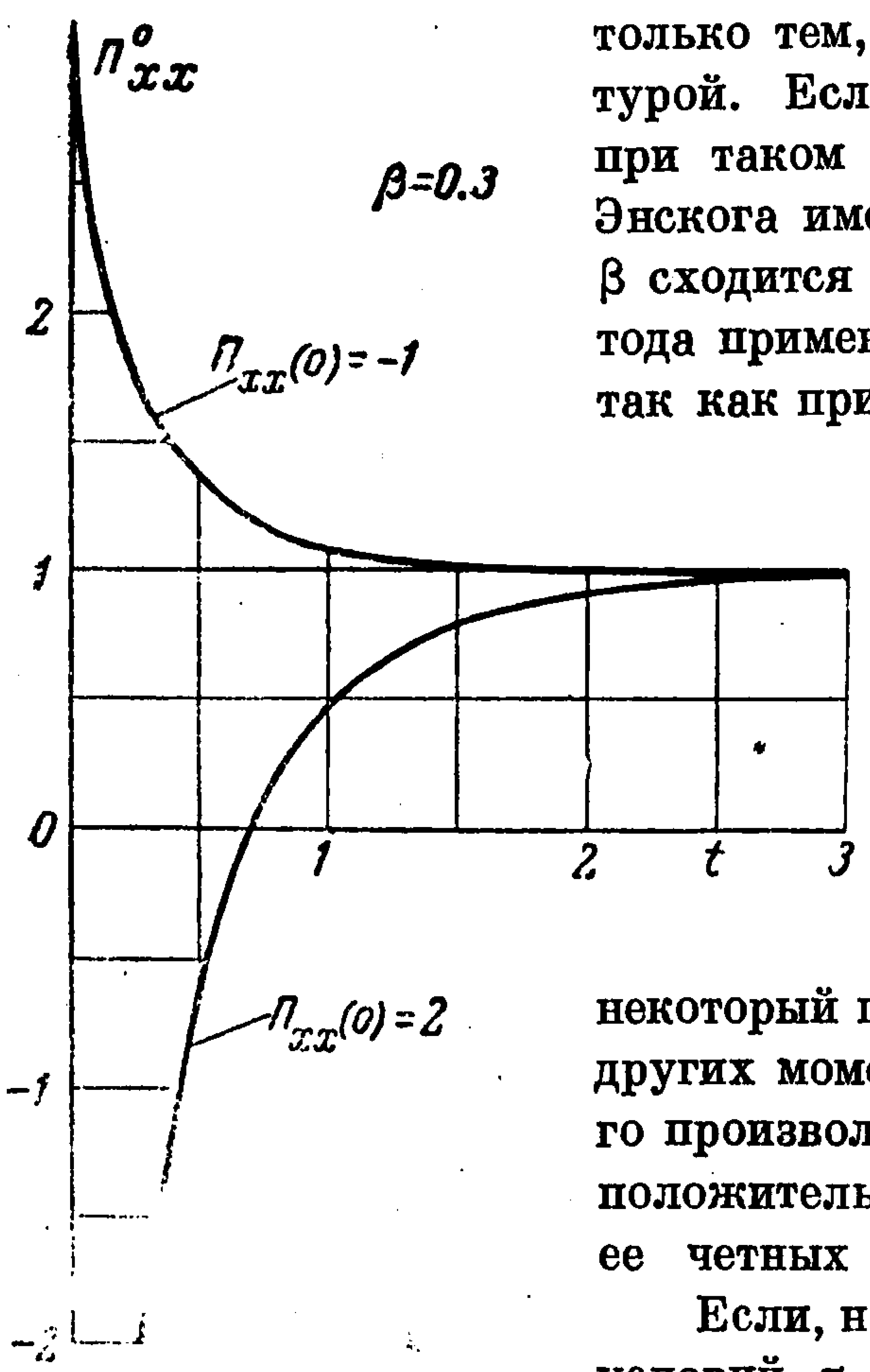
$$r \equiv r^{(3)} = r^{(2)} - {}^{32}/_{27}\beta^3$$



Фиг. 1

На фиг. 1 сравниваются точные значения r_1 с приближенными $(r^{(4)} = r^{(3)} + {}^{320}/_{81}\beta^4)$

Приближение Барнетта значительно более точное, чем приближение Навье — Стокса, и хорошо согласуется с точным решением даже в области расходимости метода Чепмена — Энскога. Тем же самым способом, что и в § 36 работы [2], где рассмотрено сдвиговое течение, легко показать, что ряд для Π_{xx}, получаемый этим методом, сходится по меньшей мере при $\beta < (\sqrt{10} - 1)\,/\,6$ и, следовательно, соответствующий ряд для r по β сходится к r_1.



Фиг. 2

Приближенное решение (9) отличается от точного не только тем, что r есть приближенное значение r_1, но и структурой. Если $A = 1$, то $B = 0$, $\Pi_{xx}(0) = -(5 + r_1)/2$. Только при таком значений $\Pi_{xx}(0)$ решение методом Чепмена — Энскога имеет одинаковую с точным структуру и при малых β сходится к нему. Конечно, каждое приближение этого метода применимо только на конечном интервале значений t, так как при $t \to \infty$ приближенные значения Π могут существенно отличаться от точных.

При произвольных значениях $\Pi_{xx}(0)$ решение методом Чемпена— Энскога имеет асимптотический характер, правильно давая лишь нулевые члены разложения решения по β (8), так как уже в первый член разложения A по β входит отношение $\Pi_{xx}(0)$. Необходимо отметить, что в отличие от метода Чемпена — Энскога в кинетической теории допускается некоторый произвол в начальных значениях $\tau_{ij} = p_{ij} + p\delta_{ij}$ и других моментов более высокого порядка, однако степень этого произвола неизвестна. Естественным ограничением служит положительность функции распределения, и, следовательно, ее четных моментов.

Если, например, $p_{yy}(0) = p_{zz}(0) = -\,{}^1/_2 p_{xx}(0)$, то с учетом условий $\tau_{yy} > 0$, $\tau_{xx} > 0$, имеем $-1 < \Pi_{xx} 0 < 2$.

Для окончательного ответа на этот вопрос необходимо найти функцию распределения или весь спектр ее моментов.

В методе Чепмена — Энскога предполагается, что флюктуации начальных значений моментов функции распределения второго и более высокого порядков затухают и по истечении времени порядка нескольких времен релаксации состояние газа перестает зависеть от них. Это предположение было подвергнуто критике; особенно просто показать неверность этого предположения в рассматриваемом здесь случае.

Рассмотрим случай больших t. Отбрасывая быстро убывающие во времени члены (этот процесс «убывания» иллюстрируется на фиг. 2), из формул (3) получим $p_{ij}=0$ $(i \neq j)$, $p_{yy} = p_{zz} = -{}^1/_2 p_{xx}$, что совпадает с соответствующими результатами метода Чепмена — Энскога. Из формул (6) получим

$$\Pi / A = (1 + t)^{{}^1/_3 r_1}, \qquad \Pi_{xx} = -{}^1/_2 (5 + r_1)$$

Таким образом, при больших t, малых β и произвольных Π_{xx} (0) метод Чепмена — Энскога правильно дает значения отношений Π / A и Π_{xx} и неправильно — абсолютные значения p и p_{xx} (за исключением случая $A = 1$, рассмотренного выше).

Сделанные выше выводы справедливы и в случае сдвигового течения за исключением того обстоятельства, что при $A = 1$ в рассмотренном здесь решении результаты расчетов в приближении Барнетта близки к точным в гораздо более широком интервале значений β, чем в случае сдвигового течения. Относительный успех метода Чепмена—Энскога в задаче о сдвиговом течении в работе [2] был объяснен тем, что в этом случае тождественно равны нулю те члены уравнений этого метода, наличие которых, как утверждается в работах [2,5], ставит под сомнение корректность метода Чепмена—Энскога. Однако в рассмотренном здесь случае эти члены отличны от нуля.

Автор признателен М. Н. Когану и А. А. Никольскому за интерес к работе.

Поступила 19 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwells kinetic theory. J. of Rational Mechan. and Anal., 1956, 5, № 1.
3. Галкин В. С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
4. Галкин В. С. О пределах применимости релаксационной модели кинетического уравнения Больцмана. Инженерный журнал, 1961, № 3.
5. Jkenberry E., Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwells kinetic theory. J. of Rational Mechan. and Anal., 1956, 5, № 1.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ НЕРАВНОМЕРНО ОБОГРЕВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е. М. Шахов (Москва)

В задачах, связанных с аэродинамическим нагреванием, процесс распространения тепла в твердом теле обычно считают одномерным (точнее — квазиодномерным), предполагая параметрической зависимость от координаты вдоль обогреваемой поверхности. Однако измерения тепловых потоков [1] показывают, что влияние продольной теплопроводности может быть существенным даже при сравнительно небольших временах нагревания. В связи с этим представляется целесообразным выяснить и оценить отклонение распределения температуры от одномерного на некоторых простых задачах, учитывающих неравномерный обогрев поверхности. Ниже рассматривается модельная задача о нагревании тела в окрестности критической точки и задача о нагревании тела за движущимся вдоль его поверхности тепловым фронтом.

§ 1. Аэродинамическое нагревание тела в окрестности передней критической точки. Рассмотрим следующую задачу (плоскую $\nu = 1$ и осесимметричную $\nu = 2$) о нагревании полубесконечного тела $y > 0$, имеющего всюду одинаковую температуру T_∞ в начальный момент, при заданной нормальной производной на границе

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\nu - 1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$t = 0, \qquad y = \infty, \qquad T = T_\infty \tag{1.1}$$

$$y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -T_\infty k\,(\beta + \alpha e^{-k^2 r^2}), \qquad r = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$