ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВДАЛИ ОТ ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТИ ОСИ ПРИ ЧИСЛЕ M_∞, БЛИЗКОМ К ЕДИНИЦЕ

Ф. В. Шугаев (Москва)

Пусть осесимметричное тупое тело обтекается потоком, число M_∞ которого мало отличается от единицы. Рассматривается течение в окрестности оси на большом расстоянии от тела вверх по потоку. Начало координат находится в критической точке тела, ось x совпадает с направлением невозмущенного потока. В окрестности оси

$$u = f(\tau_1) + \sum_1^\infty \alpha_i(\tau_1)\, y^{2i}, \qquad v = \sum_1^\infty \beta_i(\tau_1)\, y^{2i-1}, \qquad \tau = \frac{2\Psi(x, y)}{y^2}$$

Здесь u, v — составляющие скорости вдоль осей x, y, отнесенные к критической скорости, $\Psi(x, y)$ — функция тока, $f(\tau_1)$ — значение скорости на оси [1].

Удобно произвести замену переменных $\tau = \varepsilon\tau_1$, где

$$\varepsilon = \begin{cases} k^{-1/2}\left[\gamma\left(1-\dfrac{1}{ak^2}\right)\right]^{1/(\varkappa-1)}, & M_\infty > 1, \quad a = 1 + \dfrac{2}{\varkappa-1}\dfrac{1}{M_\infty^2}, \quad \gamma = \dfrac{\varkappa+1}{2} \\ k^{1/2}\left[\gamma\dfrac{(a-1)}{a}\right]^{1/(\varkappa-1)}, & M_\infty < 1, \quad k = \dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\dfrac{1}{a}, \quad \varkappa = \dfrac{c_p}{c_v} \end{cases}$$

Прямая $\tau = \varepsilon$ представляет собой [1] ударную волну ($M_\infty > 1$) или невозмущенный поток на бесконечности ($M_\infty \leqslant 1$). Прямая $\tau = 1$ есть предельная линия.

В самом деле, предельная линия пересекает ось [2] в точке $\tau = 1$. Из условия $D(\tau, y) / D(u, v) = 0$, определяющего существование предельной линии, находим

$$F = A_1B_2 - A_2B_1 \tag{1}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — коэффициенты при производных u, v по τ_1 в уравнениях газодинамики в плоскости $\tau_1 y$. Если $\tau = L(y)$ есть уравнение предельной линии, то

$$\frac{dL}{dy} = -\left[\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial \tau}\right]_{\tau=L}$$

Вследствие ограниченности числителя и обращения в бесконечность знаменателя $L = \text{const} = 1$. Коэффициенты α_1, β_1 представим так: $\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}$, $\beta_1 = \beta_{10} + \beta_{11}$, где α_{10}, β_{20} — соответственно, значения α_1, β_1 при $M_\infty = 1$, а α_{11}, β_{11} — поправки, обусловленные отклонением числа M_∞ от единицы. Величины α_{10}, β_{10} определяются выражением возмущающего потенциала [3] для околозвукового течения ($M_\infty = 1$)

$$\Phi = y^{-2/7} g(C\zeta)\, C^{-3}, \qquad \zeta = (\varkappa + 1)^{-1/3} x y^{-4/7} \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная. Пользуясь формулой (2), находим

$$\alpha_{10} = 6c^2\Delta\tau^{5/4}, \qquad \beta_{10} = 3c\Delta\tau^{4/4}, \qquad \Delta\tau = 1 - \tau, \qquad c = C^{7/3}(\varkappa + 1)^{-4/9} \tag{3}$$

Уравнение движения в переменных τy записывается в виде [1]

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon k^{-1/2} p + 2\tau u)\, y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 u)$$

где p есть давление, отнесенное к скоростному напору $^1/_2\rho_\infty u_\infty^2$, u_∞, ρ_∞ — скорость и плотность потока на бесконечности. Интегрируя это уравнение по τ от $1 - \Delta\tau$ до 1 и ограничиваясь членами с низшими степенями относительно y, будем иметь

$$\frac{4}{\varkappa + 1}\Delta M_\infty^2 h\alpha_1(\varepsilon)\,[1 - (1 - \Delta\tau)N] + \frac{\beta_1^2}{2}N - \frac{\beta_1^2(1)}{2} = 2\int_{1-\Delta\tau}^{1} \alpha_1 d\tau \tag{4}$$

$$h = 1 + O(\Delta M_\infty), \qquad \Delta M_\infty = |M_\infty - 1|, \qquad N = \gamma^{1/(\varkappa-1)}\left(1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}f^2\right)^{1/(\varkappa-1)}$$

Функция $f(\tau)$ определяется равенством [1]

$$fN = \tau \qquad (f = 1 - \gamma^{-1/2}\Delta\tau^{1/2} + \ldots, (\tau \sim 1)) \tag{5}$$

Величины $\alpha_1(\varepsilon)$, $\beta_1(\varepsilon)$ при $M_\infty > 1$ должны удовлетворять соотношению на ударной волне

$$\beta_1^2(\varepsilon) = 4q\gamma^{-1}\alpha_1(\varepsilon)\,\Delta M_\infty^2, \qquad q = 1 + O(\Delta M_\infty), \qquad M_\infty > 1 \tag{6}$$

а при $M_\infty < 1$ должны обращаться в нуль (условие того, что на бесконечности невозмущенное течение)

$$\alpha_1(\varepsilon) = 0, \qquad \beta_1(\varepsilon) = 0, \qquad M_\infty < 1 \tag{7}$$

Разлагая $\alpha_{11}(\tau)$, $\beta_{11}(\tau)$ в ряд в окрестности точки $\tau = 1$ и используя равенства (3) — (5), а также условия (1), (6), (7), получим, сохраняя члены с низшими степенями относительно ΔM_∞ и полагая $\eta = \gamma^{-4/3}$ (8)

$$\alpha_1 = 6c^2\Delta\tau^{1/3}[\Delta\tau^{4/3} - \eta\Delta M_\infty^{8/3}] + \ldots, \quad \beta_1 = 3c\,[\Delta\tau^{4/3} - \eta\Delta M_\infty^{8/3}] + \ldots \quad (M_\infty < 1)$$

$$\alpha_1 = 6c^2\Delta\tau^{1/3}[\Delta\tau^{4/3} + {}^5/_3\,\eta\Delta M_\infty^{8/3}] + \ldots, \quad \beta_1 = 3c\,[\Delta\tau^{4/3} + {}^5/_3\,\eta\Delta M_\infty^{8/3}] + \ldots \quad (M_\infty > 1)$$

Таким образом, поправки к составляющим скорости u, v на ударной волне ($\tau = \varepsilon$, $M_\infty > 1$), отнесенные к критической скорости течения, имеют разный порядок, а именно

$$u_1 \sim \alpha_{11}y^2 \sim c_1\Delta M_\infty^{10/3}y^2, \qquad v_1 \sim \beta_{11}y \sim c_2\Delta M_\infty^{8/3}y \qquad (c_1, c_2 \neq 0)$$

Гудерлей [3] записывает потенциал для осесимметричного околозвукового течения ($M_\infty > 1$) в виде

$$\Phi_1 = a_0y^{-2/7}g\,(C\zeta) + a_1(M_\infty - 1)^{8/3}y^{8/7}g\,(\zeta, {}^8/_7) + \ldots \qquad (a_0,\ a_1 = \mathrm{const}) \tag{9}$$

Поправка, вызванная отклонением числа M_∞ от единицы, пропорциональна $\Delta M_\infty^{5/3}$. Эта формула не удовлетворяет граничному условию на ударной волне. Сравнение с результатами настоящей работы показывает неприменимость формулы (9) для течения на большом расстоянии от тупого тела в окрестности оси.

Из равенства (8) можно, в частности, получить асимптотическую формулу для функции $D(M_\infty)$ при $M_\infty \sim 1$ (D — расстояние между ударной волной и осесимметричным тупым телом). Величина D равна [4]

$$D = \frac{1}{2\varepsilon k^{1/2}}\int_0^\varepsilon \frac{p_1}{[\rho\partial v / \partial y]_{y=0}}$$

где ρ — плотность, отнесенная к ρ_∞. Пользуясь (8), находим, что при $M_\infty \sim 1$

$$D \sim \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \frac{d\tau}{[\rho\partial v / \partial y]_{y=0}} \sim \frac{1}{6}c^{-1}(\varkappa + 1)^{4/9}\int \frac{d\tau}{\Delta\tau^{4/3} + {}^5/_3\,\eta\Delta M_\infty^{8/3}}$$

Отсюда следует

$$D \sim 0.32353\,(\varkappa + 1)^{11/9}C^{-7/3}(M_\infty - 1)^{-2/3}$$

Поступила 24 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaglio-Laurin R., Ferri A. Theoretical investigation of the flow field about blunt-nosed bodies in supersonic flight. J. Aero/Space Sci., 1958, v. 25, № 12. (См. также русск. пер. Вальо-Лаурин Р., Ферри А. Теоретическое исследование течения около тупоносных тел при сверхзвуковом полете. Сб. «Механика», 1959, № 4).
2. Vaglio-Laurin R. On the PLK method and the supersonic blunt-body problem. J. Aero/Space Sci., 1962, v. 29, № 2. (См. также русск. пер. Вальо-Лаурин Р. О методе ПЛГ и задаче сверхзвукового обтекания затупленного тела. Сб. «Механика», 1963, № 1).
3. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. ИЛ, 1960, гл. XI.
4. Шугаев Ф. В. Сверхзвуковое обтекание осесимметричных тупых тел с отошедшей ударной волной. Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем. мех., 1961, № 2.