

6. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
7. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
8. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шилинина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Изд. Вычисл. центра АН СССР, 1961.
9. Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д. Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. Изд. АН СССР, 1962.
10. Rao G. V. R. Spike nozzle contour for optimum thrust. Planet. and Space Sci., 1961, № 4, 92—101.
11. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, v. 23, № 4. Русск. пер. в сб. «Механика», ИЛ, 1957, № 5.

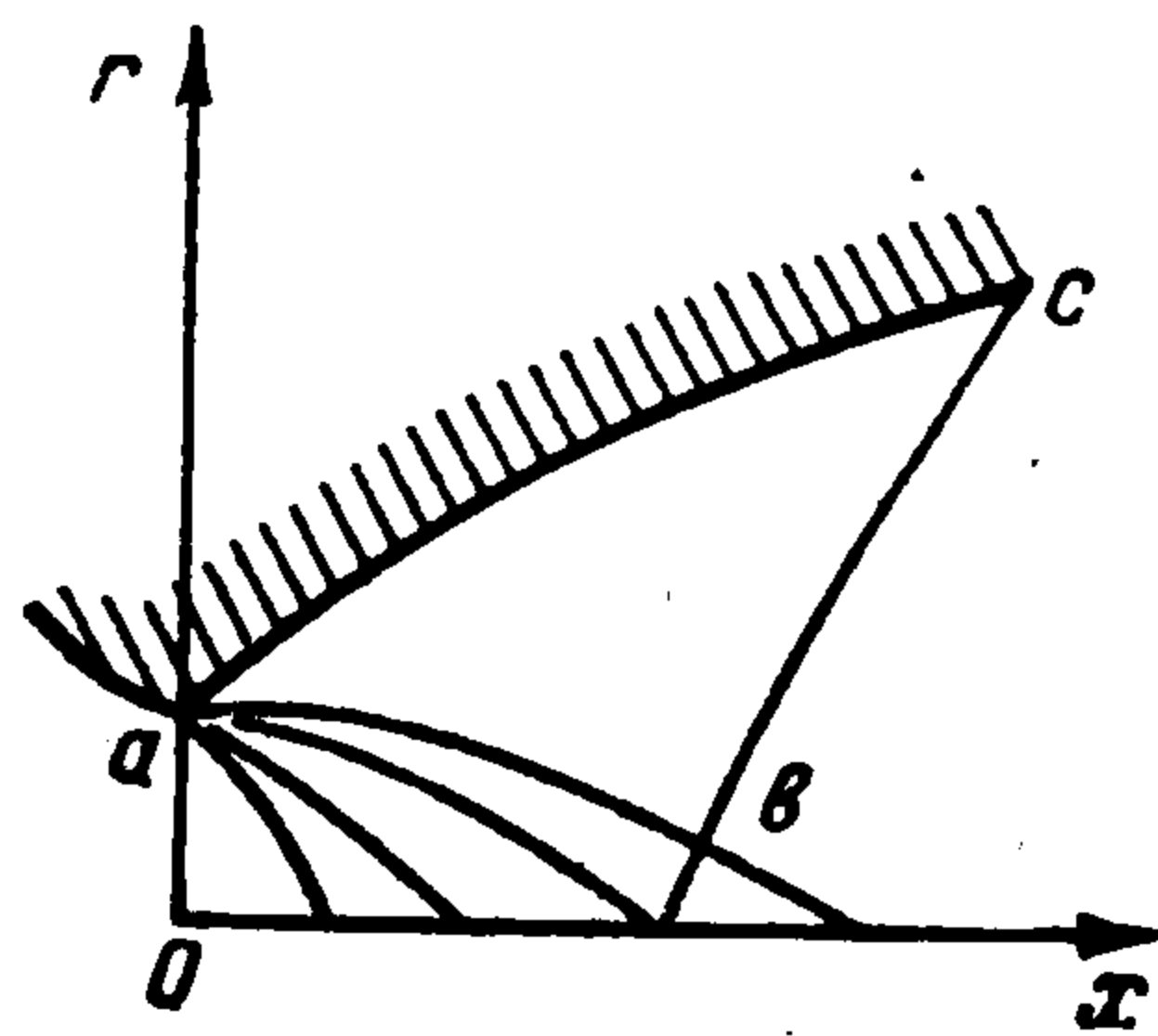
О СОПЛАХ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЯГИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

В. М. Борисов, А. В. Шилин
(Москва)

Гудерлей и Армтейдж [1] получили необходимые условия экстремума в задаче о соплах с наибольшей тягой при произвольных условиях, налагаемых на стенку сопла. Численное решение этой задачи связано с весьма сложной краевой задачей для нелинейных уравнений в частных производных. В предлагаемой статье найден один класс решений этой краевой задачи.

1. В работе [1] рассмотрена следующая задача. Заданы (см. фигуру) характеристика набегающего потока ab и внешнее давление p_0 . Необходимо найти контур сопла ac , обладающий максимальной тягой при некоторых ограничениях. Примером таких ограничений может служить заданная площадь боковой поверхности сопла, объем рабочей части сопла и т. п. Пусть характеристика первого семейства, проходящая в точку c , изображается линией bc . Задача формулируется следующим образом.

При заданном значении p_0 и заданной начальной характеристике ab найти функцию $\eta(x)$, реализующую экстремум функционала



$$\chi = \int_{x_a}^{x_c} \{p[x, \eta(x)] - p_0\} \eta \eta' dx$$

при изопериметрических условиях на ac

$$s^i = \int_{x_a}^{x_c} f^i \{u[x, \eta(x)]; v[x, \eta(x)]; \eta(x); \eta'(x); x; p_0\} dx$$

дифференциальной связи на ac

$$\eta'(x) u - v = 0$$

дифференциальных связях в треугольнике abc

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r p u}{\partial x} + \frac{\partial r p v}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

и связях

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\rho u, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\rho v, \quad a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}, \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{a^2}{u^2 + v^2}$$

Здесь x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости осесимметричного течения; u и v — проекции скорости на оси x и r , p — давление, ρ — плотность, a — скорость звука, α — угол Маха, κ — постоянный показатель адиабаты.

Необходимые условия экстремума χ получены в работе [1] и имеют такой вид:

в треугольнике abc

$$\frac{\partial h_1}{\partial r} + r\rho \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{r\rho uv}{a^2} \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{r\rho uv}{a^2} \frac{\partial h_2}{\partial x} - r\rho \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

на контуре сопла ac

$$h_1 = \eta r v - c_1^i \frac{u}{u^2 + v^2} (f_u^i u + f_v^i v) \quad (4)$$

$$h_2 = u - \frac{c_1^i}{\eta r} \left\{ f_v^i - \frac{v}{u^2 + v^2} (f_u^i u + f_v^i v) + \right. \\ \left. + \eta r \int_x^{x_c} \frac{1}{\eta r u} \left[f_{\eta}^i + f_u^i \frac{\partial u}{\partial r} + f_v^i \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{d}{dx} f_{\eta}^i \right] dx \right\} + c_3 \quad (5)$$

на замыкающей характеристике bc

$$h_1 + h_2 r \rho \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (6)$$

в точке c

$$(p - p_0) \eta \eta' + c_1^i f^i = 0 \quad (7)$$

$$(p - p_0) \eta + c_1^i f_{\eta}^i + \eta r u \left\{ c_3 + u - \frac{c_1^i}{\eta r} \left[f_v^i - \frac{v}{u^2 + v^2} (f_u^i u + f_v^i v) \right] \right\} = 0 \quad (8)$$

Здесь $h_1(x, r)$, $h_2(x, r)$ — множители Лагранжа, соответствующие дифференциальным связям (2); c_1^i — постоянные множители Лагранжа, связанные с изопериметрическими условиями (1), c_3 — константа интегрирования.

Система (3) при сверхзвуковых течениях имеет гиперболический тип и ее характеристические направления совпадают с характеристическими направлениями системы (2). Условие совместности для h_1 и h_2 на характеристике bc имеет вид

$$dh_1 - dh_2 r \rho \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (9)$$

2. Отбросим часть ограничений (1) исходной вариационной задачи. Очевидно, что решение упрощенной задачи одновременно является решением исходной задачи, если значение чисел s^i для отброшенных ограничений вычислено по решению упрощенной задачи. Это позволяет построить простые примеры решений исходной задачи.

Пусть из всех ограничений оставлено, например, только ограничение на величину p_0 . Известно, что сопло с равномерным потоком на выходе дает максимальную тягу при заданной величине p_0 . Вычислим, например, площадь боковой поверхности найденного сопла. Найденное сопло имеет максимальную тягу среди всех сопел с такой же боковой поверхностью и внешним давлением p_0 . Подобные рассуждения могут быть проведены и для ограничений на величины p_0 и x_c , или на x_c и r_c .

Для всех этих примеров необходимые условия экстремума исходной задачи должны переходить в известные условия экстремальности на замыкающей характеристике bc при $c_1^i = 0$. Действительно, равенства

$$h_1 = \eta r v, \quad h_2 = u + c_3 \quad (10)$$

как нетрудно проверить, являются интегралом системы (3). Из условий (6), (9), (10) получаем, что вдоль замыкающей характеристики bc выполняются соотношения

$$r v^2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}, \quad u + v \operatorname{tg} \alpha = -c_3$$

Эти соотношения получены в работе [2] при рассмотрении вариационной задачи с фиксированными точками a и c .

Условие (8) при $c_1^i = 0$ переходит в известное условие Буземана.

Поступила 24 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e J. V. A General Method for the Determination of Best Supersonic Rocket Nozzles. Paper Presented at the Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics, Boeing Scientific Research Laboratories Flight Sciences Laboratory Seattle, Washington, December 3—4, 1962.
2. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2,