

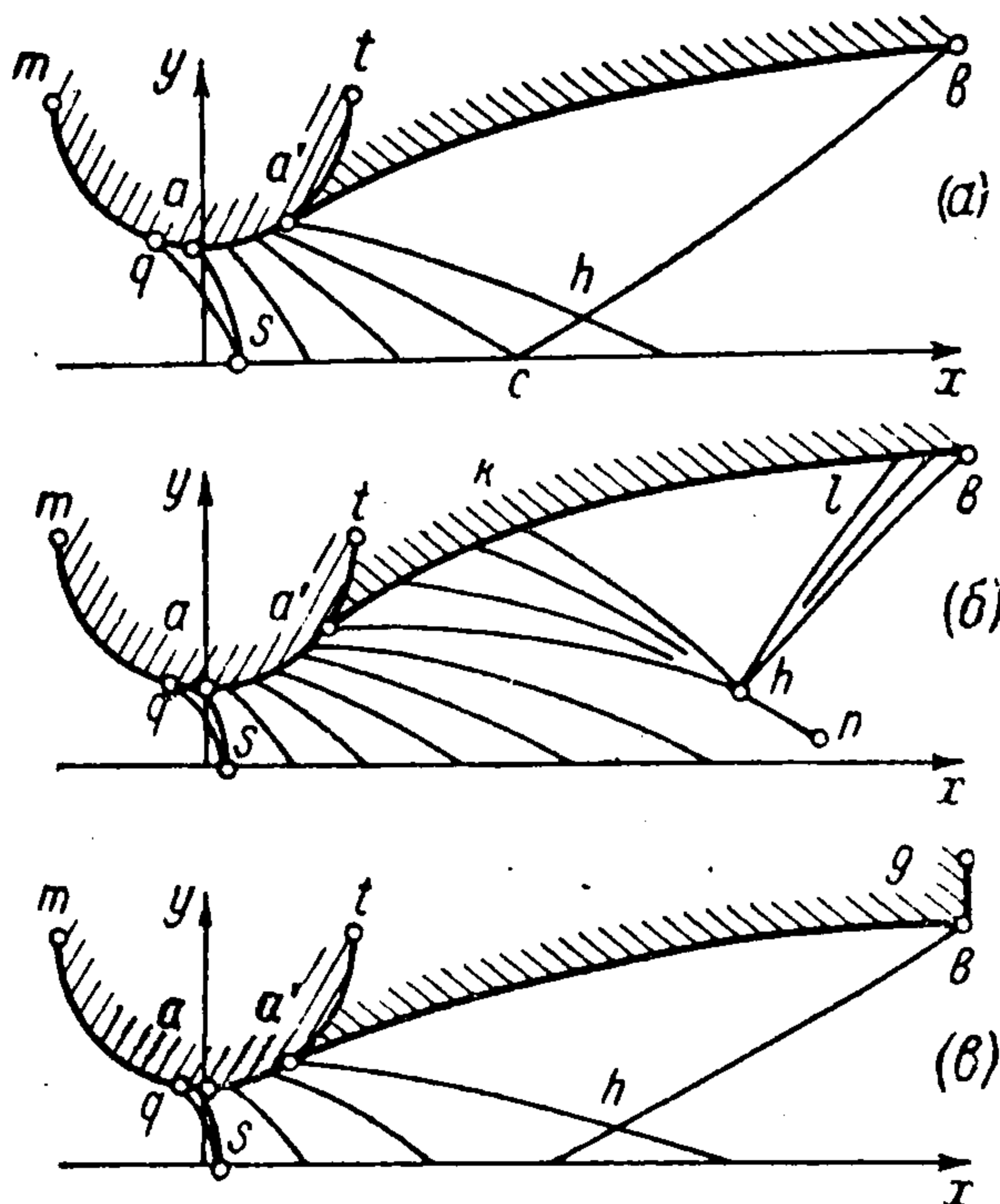
К ПОСТРОЕНИЮ ТЕЛ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

А. Н. Крайко, И. Н. Наумова, Ю. Д. Шмыглевский
(Москва)

Определение тел с минимальным сопротивлением и сопел с максимальной тягой при заданных размерах рассмотрено в работах [1-7]. В них найдены различные схемы решений и области их применимости в плоскости годографа скоростей. Определение области существования этих решений в плоскости течения требует использования численных методов и до настоящего времени не проводилось. Недостаточное внимание к этой стороне вопроса приводит к потере некоторых решений. Последние могут содержать участки краевого экстремума, обусловленного ограничением размеров тел.

Ниже определяются области существования различных решений в плоскости течения и построены новые схемы решений. Основное рассмотрение проведено на примере сопел.

1. Пусть необходимо построить контур ab сверхзвуковой части плоского или осесимметричного сопла (фиг. 1а), обладающего максимальной тягой при заданном положении начальной точки a , длине X и максимальном поперечном размере Y . Через x, y обозначены прямоугольные координаты в плоскости течения; в осесимметричном случае ось x совпадает с осью симметрии. Контур входной части сопла ma , полностью определяющий звуковую линию sq , также задан. Ограничения могут налагаться и на кривизну начального участка контура ab .



Фиг. 1

В решениях, полученных до настоящего времени, концевой участок контура a реализует двусторонний экстремум.

Переход к характеристическому контрольному контуру сводит задачу к общей задаче Лагранжа при одной независимой переменной. Непрерывное решение (в смысле непрерывности функций на характеристике cb) получено в работах [1-3, 6, 7], а решение с изэнтропическими разрывами — в работах [5-7].

В последнем случае (фиг. 1б) контур ab содержит два участка краевого экстремума aa' и $a'k$. Первый из них ограничен допустимой кривизной контура, второй вызывает такое торможение потока, при котором ударная волна hn начинается на границе области влияния.

Помимо рассмотренных участков контур сопла может содержать участки краевого экстремума $x = X$ и $y = Y$, связанные с ограничением размеров сопла. Рассмотрим участок $x = X$. При наличии торца bg для определения силы χ , действующей на стенку сопла, необходимо знать распределение давления по этой линии (фиг. 1в). При истечении газа в пустоту такая задача решается просто. При ненулевом внешнем давлении за торцом образуется застойная зона, и расчет течения представляет собой весьма сложную задачу. Здесь рассмотрение будет ограничено простейшим случаем постоянного давления p_T на участке bg , не зависящего от формы контура ag . Изучение этой схемы приведет к заключению о том, что введение торца при определенных условиях позволяет увеличить тягу сопла.

С точностью до постоянного множителя

$$\chi = \int_{y_a}^{y_g} p y^v dy$$

где p — давление. Величины χ и X выражаются через интегралы по характеристикам

ac и cb и по линии bg (при совпадении a и a')

$$\chi = \int_{\psi_a}^{\psi_c} \left[w \cos \vartheta - \frac{p \sin(\vartheta - \alpha)}{\rho w \sin \alpha} \right] d\psi - \int_{\psi_b}^{\psi_c} \left[w \cos \vartheta + \frac{p \sin(\vartheta + \alpha)}{\rho w \sin \alpha} \right] d\psi + p_T \int_{y_b}^{y_g} y' dy \quad (1.1)$$

$$X = - \int_{\psi_a}^{\psi_c} \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{y' \rho w \sin \alpha} d\psi - \int_{\psi_b}^{\psi_c} \frac{\cos(\vartheta + \alpha)}{y' \rho w \sin \alpha} d\psi + \int_{y_b}^{y_g} x' dy \quad (1.2)$$

где ψ — функция тока, отнесенная к $y_a^{v+1} \rho^* w^*$; ρ — плотность, отнесенная к ρ^* ; w — модуль скорости, отнесенный к w^* ; ϑ — угол наклона вектора скорости к оси потока; α — угол Маха; v равно 0 и 1 соответственно для плоского и осесимметричного случаев; производная $x' = dx/dy$ берется вдоль контура тела; w^* и ρ^* — соответственно критические значения скорости и плотности.

Для решения задачи используется метод множителей Лагранжа. Составляется функционал J , включающий выражения для χ и X и дифференциальные соотношения на замыкающей характеристике bc . Из выражения для первой вариации J следует, что в силу постоянства p_T участок ab должен быть оптимальным и при фиксированном положении точки b , т. е. форма контура ab определяется теми же уравнениями, что и при отсутствии торца bg . Изменение координат точки b с учетом необходимых условий экстремума для части ab дает

$$\delta\chi = y_b^v (p - p_T - \rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_b \delta y_b + y_b^v (p_b - p_T) \operatorname{tg} \vartheta_b \delta x_b \quad (1.3)$$

где δy_b и δx_b — вариации координат точки b .

Если решение с участком bg имеет место, то величина δy_b произвольна, а $\delta x_b \leq 0$. Из (1.3) следуют необходимые условия экстремума χ

$$p_b - p_T - \rho_b w_b^2 \operatorname{tg} \alpha_b \sin \vartheta_b \cos \vartheta_b = 0, \quad (p_b - p_T) \operatorname{tg} \vartheta_b \geq 0 \quad (1.4)$$

Первое равенство определяет ординату точки b . Оно называется условием Буземана и было получено ранее [1, 6, 7] в задаче определения оптимального сопла при свободном поперечном размере. Второе условие с учетом (1.4) имеет вид

$$\rho_b w_b^2 \operatorname{tg} \alpha_b \sin^2 \vartheta_b \geq 0 \quad (1.5)$$

При отсутствии торца допустимые δy_b отрицательны. Необходимым условием максимума χ в этом случае будет

$$p_b - p_T - \rho_b w_b^2 \operatorname{tg} \alpha_b \sin \vartheta_b \cos \vartheta_b \geq 0 \quad (1.6)$$

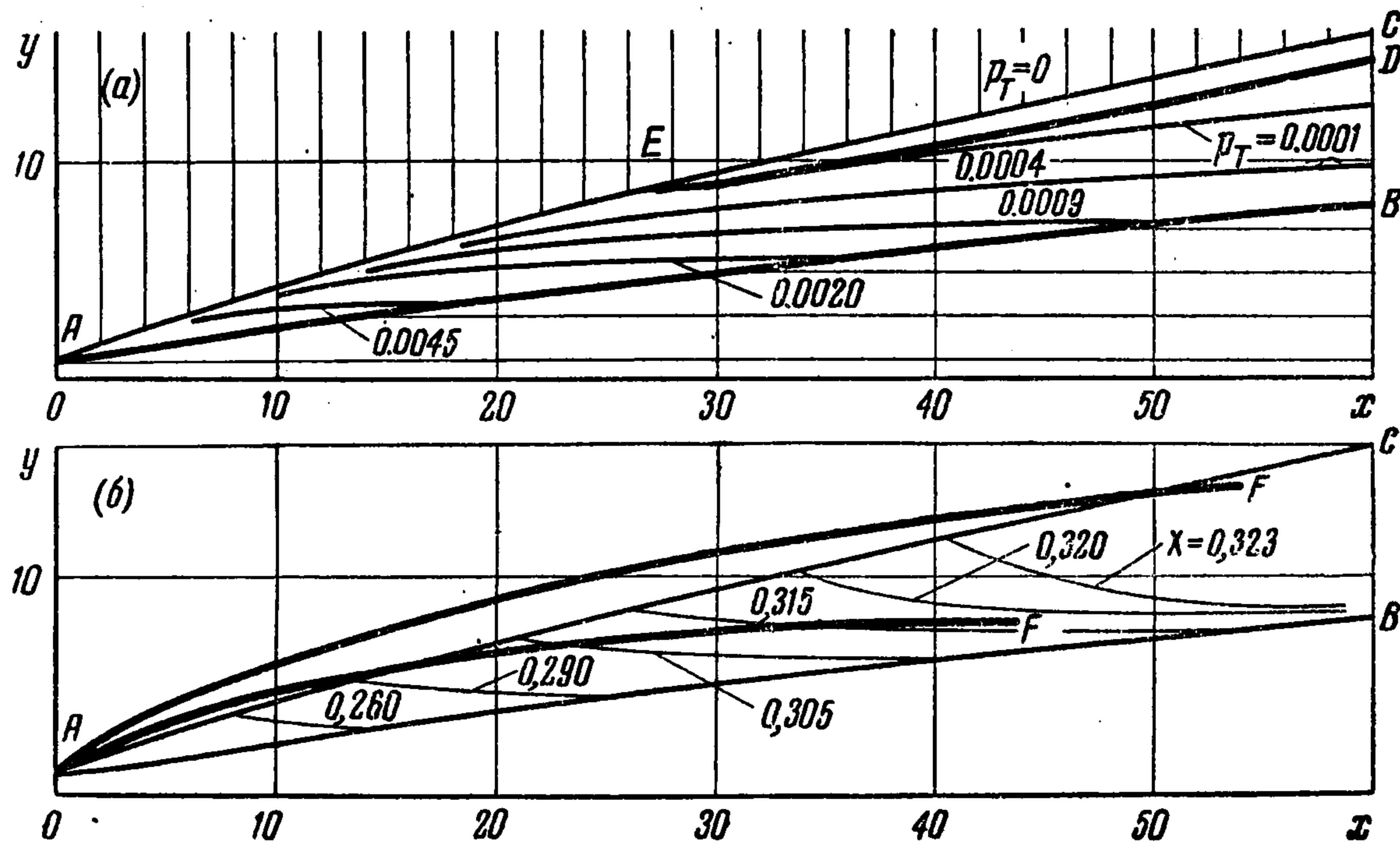
В случае невыполнения этого условия замена контура близким контуром с торцом ведет к увеличению тяги χ . Цилиндрический участок контура сопла $y = Y$ возможен лишь тогда, когда X превосходит наименьшую длину сопла, дающего на выходе равномерный поток при заданной величине Y . Впрочем, в этом случае существует бесчисленное множество решений с тем же значением тяги.

2. В соответствии со сказанным были выполнены расчеты оптимальных осесимметричных сопел с плоской переходной поверхностью. В расчетах совершенный газ имеет показатель адиабаты $\kappa = 1.4$. Отход от переходной поверхности осуществлялся разложением в ряды [9], а расчет сверхзвукового течения — методом характеристик [8]. Экстремальная характеристика определялась по соотношениям работы [6].

Результаты расчетов представлены на фиг. 2a и б. На фиг. 2a показаны области различных решений в плоскости течения. Линия AB изображает геометрическое место концов контуров сопел минимальной длины с равномерным потоком на выходе. Тонкие линии изображают геометрические места концевых точек b , в которых выполняется условие (1.4), при различных значениях p_T . Например, линия AC соответствует $p_T = 0$. Точки b принадлежат области $DEAB$ при непрерывных решениях. Точки b принадлежат области DEC для решений с изэнтропическими разрывами.

Возможны различные случаи задания концевой точки сопла. Если заданная концевая точка сопла лежит между кривой AB и прямой $y = 1$, то оптимальный контур

может состоять из контура, дающего равномерный поток и заканчивающегося на AB , и цилиндрического участка $y = Y$. Если точка b лежит между линией с заданным значением p_T и линией AB , то решение задачи дает контур, проходящий в эту точку.

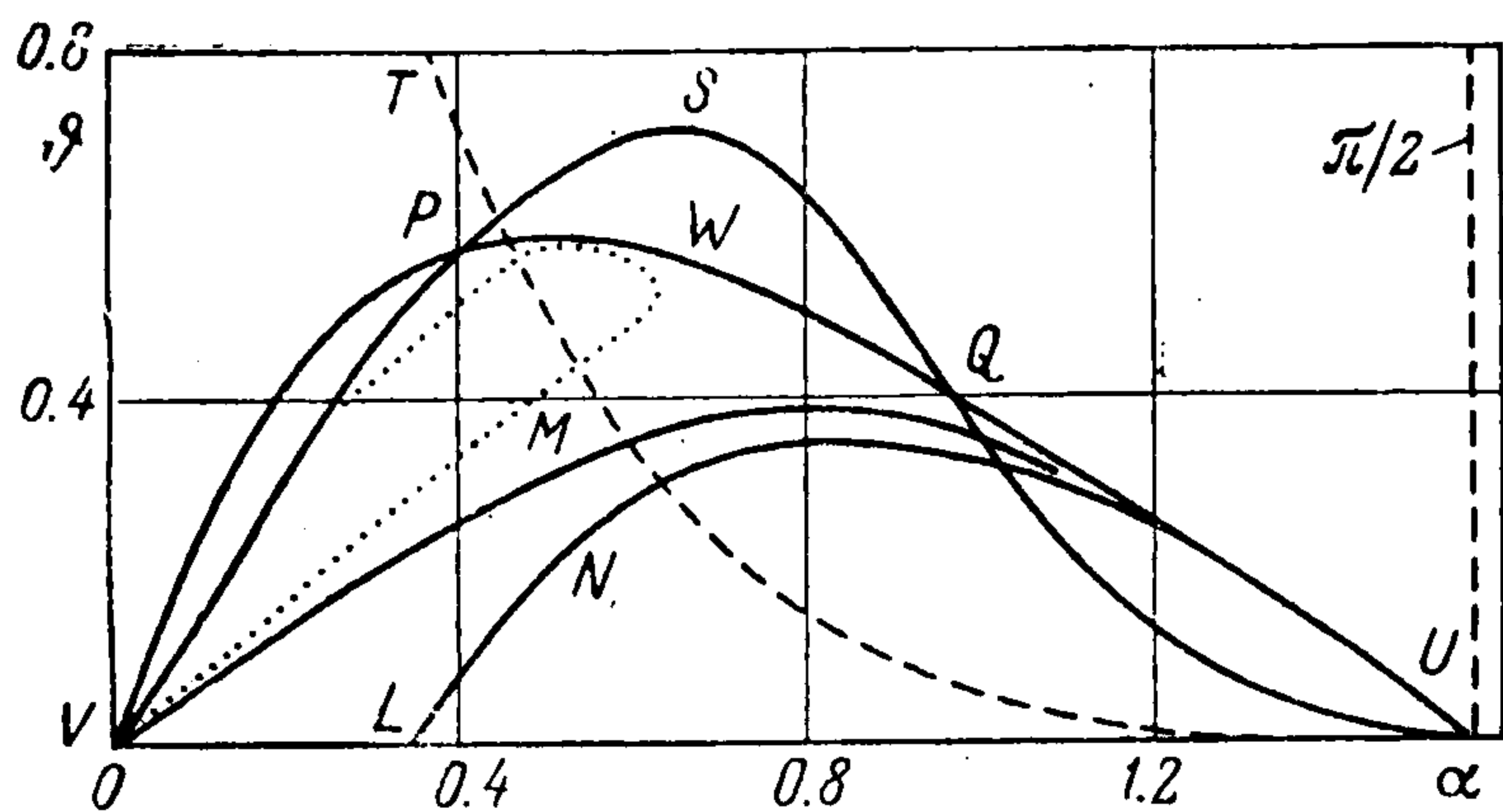


Фиг. 2

Если, наконец, конечная точка лежит выше соответствующей линии $p_T = \text{const}$, то сопло должно иметь торцевую часть bg . Точка b лежит на пересечении кривой $p_T = \text{const}$ и прямой $x = X$.

На фиг. 2б тонкие линии в области CAB являются геометрическими местами концов оптимальных сопел без торцов с постоянными значениями χ . Там же жирными линиями AF показаны два примера контуров сопел.

3. Рассмотрим плоскость $\alpha\vartheta$. В точке b величины p, ρ, w будут функциями от α . Условия (1.4) и (1.6) определяют в плоскости $\alpha\vartheta$ области, которым должны принадлежать



Фиг. 3

лежать конечные точки экстремальных характеристик при различных значениях p_T .

На фиг. 3 область VMU отвечает условиям (1.4) и (1.6) при $p_T = 0$, область LNU — при $p_T = 0.0778$. Величина χ равна 1.4. Пусть конечная точка искомого контура задана. Попробуем найти решение, при котором конечная точка b экстремальной характеристики совпадает с заданной точкой. Если полученные значения α_b и ϑ_b не принадлежат области (1.6), то найденный контур может быть проварьирован так, что тяга χ увеличится. В этом случае искомым контуром состоит из гладкого участка ab и торцевой части bg . Участок ab определяется необходимыми условиями экстремума при $x_b = X$, причем α_b и ϑ_b должны удовлетворять условию (1.4).

Условия (1.4) и (1.6) выделяют из всех экстремалей те, которые дают решение задачи. Минимальное возможное значение $p_T = 0$, следовательно, область возможных α_b и ϑ_b ограничена. На фиг. 3 ниже кривых VSU и VWU расположена область, в которой экстремальные характеристики hb удовлетворяют необходимым условиям максимума тяги [6]. Пунктирная линия ограничивает область, в которую попадают точки h экстремальной характеристики hb после изэнтропического разрыва [5]. Штриховая линия UT дает связь α и ϑ в точке a при течении Прандтля — Майера. Расчеты показывают [9], что эта линия будет верхней границей области, соответствующей пучку характеристик при обтекании излома a в осесимметричном случае.

Это справедливо и в плоском течении с плоской переходной поверхностью.

В плоском изэнтропическом течении величины α и ϑ постоянны на экстремальной характеристике. Поэтому из взаимного расположения кривых на фиг. 3 следует, что при $\kappa = 1.4$ в плоских соплах реализуется непрерывное решение с торцевой частью или без нее. В осесимметричном случае движение по экстремали от h к b соответствует движению к плоскости $\alpha\vartheta$ по направлению к оси $\vartheta = 0$. Поэтому здесь реализуются и решения с изэнтропическими разрывами, которым на фиг. 2а соответствует область CED. С ростом p_T область таких решений сокращается, а затем исчезает.

4. Аналогичное исследование может быть проведено и в случае внешнего обтекания. При этом фиг. 3 заменяется ее зеркальным отражением относительно оси α , а соотношения (1.4) — (1.6) заменяются следующими

$$p_b - p_T \mp \rho_b w_b^2 \operatorname{tg} \alpha_b \sin \vartheta_b \cos \vartheta_b = 0 \quad (4.1)$$

$$- (p_b - p_T) \operatorname{tg} \vartheta_b \geq 0 \quad (4.2)$$

$$p_b - p_T \mp \rho_b w_b^2 \operatorname{tg} \alpha_b \sin \vartheta_b \cos \vartheta_b \geq 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (4.1) было получено ранее при решении задач со свободным поперечным размером [10, 7]. Из (4.3) следует, что при $p_T < p_b$ и $\vartheta_b > 0$ торец отсутствует. В случае изэнтропических осесимметричных течений решения с изэнтропическими разрывами не реализуются, так как движение по экстремали от h к b в плоскости $\alpha\vartheta$ приводит к удалению от оси $\vartheta = 0$.

Для трех плоских профилей в случае равномерного набегающего потока, параллельного оси x , с числом Маха $M = 2.858$ при $p_T = 0$ и $Y/X = -0.5530$ вычисления коэффициентов сопротивления c_x дали следующие результаты:

$$c_{x_1} = 0.1441, \quad c_{x_2} = 0.1640, \quad c_{x_3} = 0.1628$$

Профиль 1 дает решение задачи. Он состоит из прямолинейного участка с $\vartheta = -0.1977$ и торцевой части. Профиль 2 прямолинеен и соединяет точки a и g . Профиль 3 соединяет точки a и g и реализует решение с изэнтропическим разрывом. Величина c_x определена формулой

$$c_x = -2 (\chi \mp p_\infty Y) / Y \rho_\infty w_\infty^2$$

где индекс ∞ приписан параметрам набегающего потока.

5. Итак, здесь найдены области различных решений в плоскости течения, рассмотрена плоскость годографа скоростей и получено решение с торцевыми частями в предположении, что давление на торце постоянно и не зависит от формы искомого контура. Однако обычно давление на торце зависит от формы контура ab . Качественное исследование работы [7], в которой наличие торца постулировалось, показывает, что решение при учете этой зависимости отличается от решения, полученного выше. В то же время неравенства (1.6) и (4.3) сохраняются. Это позволяет находить область, в которой контур без торца дает решение. Для проверки (1.6) и (4.3) достаточно использовать приближенное значение p_T , определяемое, например, по методу работы [11].

Существенно, что, если решение в предположении постоянства p_T приводит к контуру с торцевой частью, когда в качестве p_T взято его наименьшее возможное значение, то в действительности этот контур, не будучи оптимальным, обеспечивает большую тягу, чем решения без торца, полученные ранее.

Поступила 24 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y G., H a n t s c h E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwissenschaften, 1955, 3, Н. 9, 305—315. Русск. пер. в сб. «Механика», Изд-во иностр. лит-ры, 1956, № 4, 53—69.
2. R a o G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, v. 28, № 6, 377—382.
3. G u d e r l e y G. On Rao's method for the computation of exhaust nozzles. Z. Flugwissenschaften, 1959, 7, Н. 12, 345—350.
4. С т е р н и н Л. Е. О границе области существования безударных оптимальных сопел. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2, 335—336.
5. Ш и п и л и н А. В. Область разрывных решений вариационных задач газовой динамики. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2, 342.

6. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
7. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
8. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шилинина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Изд. Вычисл. центра АН СССР, 1961.
9. Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д. Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. Изд. АН СССР, 1962.
10. Rao G. V. R. Spike nozzle contour for optimum thrust. Planet. and Space Sci., 1961, № 4, 92—101.
11. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, v. 23, № 4. Русск. пер. в сб. «Механика», ИЛ, 1957, № 5.

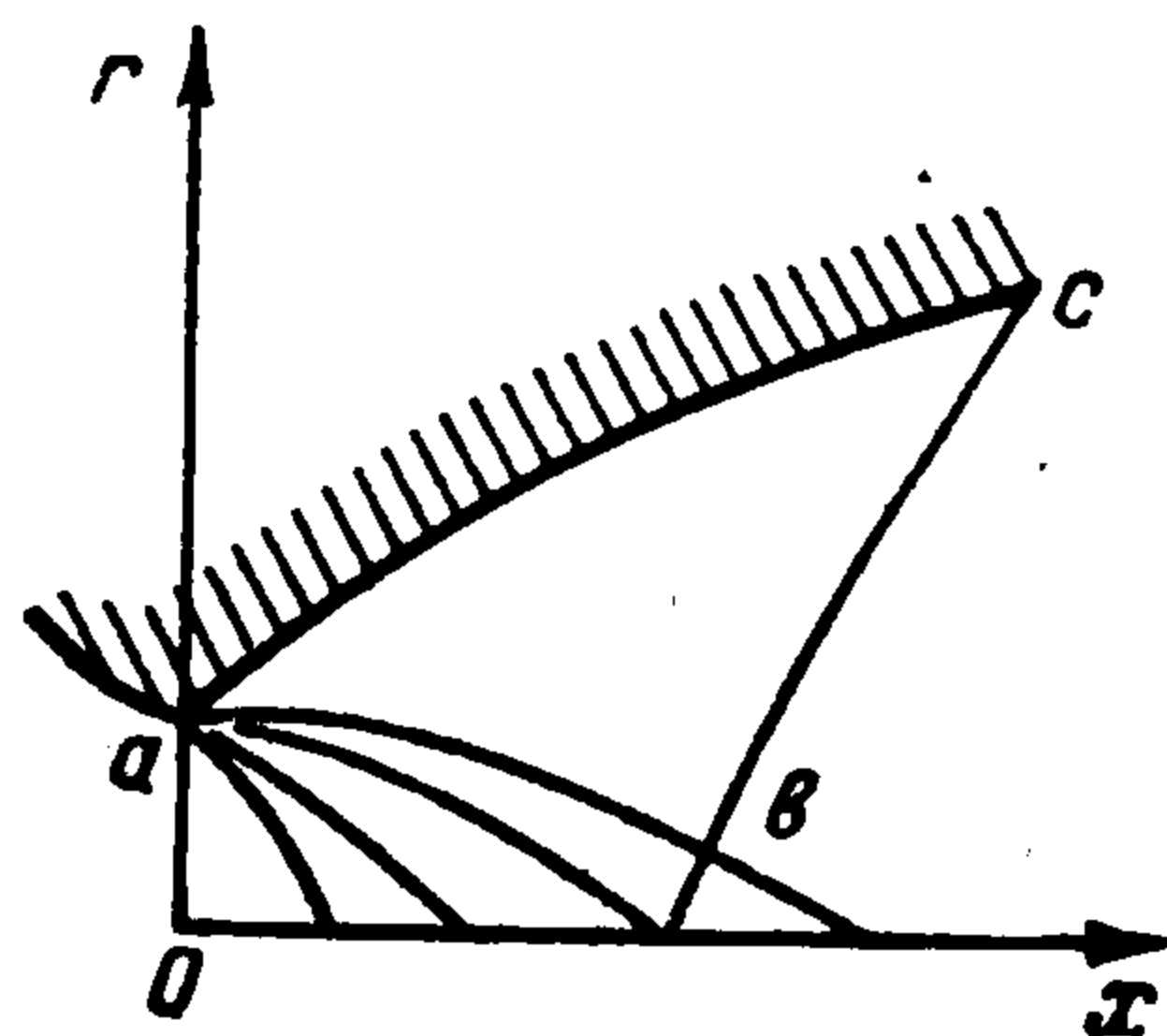
О СОПЛАХ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЯГИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

В. М. Борисов, А. В. Шилинин
(Москва)

Гудерлей и Армитейдж [1] получили необходимые условия экстремума в задаче о соплах с наибольшей тягой при произвольных условиях, налагаемых на стенку сопла. Численное решение этой задачи связано с весьма сложной краевой задачей для нелинейных уравнений в частных производных. В предлагаемой статье найден один класс решений этой краевой задачи.

1. В работе [1] рассмотрена следующая задача. Заданы (см. фигуру) характеристика набегающего потока ab и внешнее давление p_0 . Необходимо найти контур сопла ac , обладающий максимальной тягой при некоторых ограничениях. Примером таких ограничений может служить заданная площадь боковой поверхности сопла, объем рабочей части сопла и т. п. Пусть характеристика первого семейства, проходящая в точку c , изображается линией bc . Задача формулируется следующим образом.

При заданном значении p_0 и заданной начальной характеристике ab найти функцию $\eta(x)$, реализующую экстремум функционала



$$\chi = \int_{x_a}^{x_c} \{p[x, \eta(x)] - p_0\} \eta \eta' dx$$

при изопериметрических условиях на ac

$$s^i = \int_{x_a}^{x_c} f^i \{u[x, \eta(x)]; v[x, \eta(x)]; \eta(x); \eta'(x); x; p_0\} dx$$

дифференциальной связи на ac

$$\eta'(x) u - v = 0 \quad (1)$$

дифференциальных связях в треугольнике abc

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r p u}{\partial x} + \frac{\partial r p v}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

и связях

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\rho u, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\rho v, \quad a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}, \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{a^2}{u^2 + v^2}$$

Здесь x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости осесимметричного течения; u и v — проекции скорости на оси x и r , p — давление, ρ — плотность, a — скорость звука, α — угол Маха, κ — постоянный показатель адиабаты.

Необходимые условия экстремума χ получены в работе [1] и имеют такой вид:

в треугольнике abc

$$\frac{\partial h_1}{\partial r} + r\rho \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{r\rho uv}{a^2} \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{r\rho uv}{a^2} \frac{\partial h_2}{\partial x} - r\rho \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0 \quad (3)$$