Отсюда сразу становится ясным, что углы θ^* и ψ^* сохраняются в процессе движения постоянными, а угол φ^* меняется линейно в зависимости от τ, т. е.

$$\theta^* = \theta_0^* = \text{const}, \qquad \psi^* = \psi_0^* = \text{const}, \qquad \varphi^* = \varphi_0^* - \lambda\tau \tag{29}$$

Таким образом, при вращении внутреннего маховика вокруг произвольной фиксированной оси корпус несущего тела совершает чистое вращение вокруг другой фиксированной оси, направление которой в пространстве задается углами θ^* и ψ^*, а в теле углами μ^* и ν^*. Заметим, что полученные ранее интегралы (19) и (20) выражают не что иное, как постоянство косинусов углов между осью вращения тела и неподвижными осями координат. Очевидно, что ось вращения тела совпадает с осью маховика лишь в тех случаях, когда либо $A = B = C$, либо ось маховика направлена вдоль одной из главных осей инерции тела.

По теореме Эйлера [2] всякая переориентировка твердого тела кинематически может быть выполнена посредством его поворота вокруг некоторой неподвижной оси. Полученный результат свидетельствует, что подобный поворот динамически может быть осуществлен при помощи одного маховика с фиксированной осью. Чтобы по заданному начальному и конечному положению несущего тела найти требуемые углы установки оси маховика в теле, следует на основе кинематических построений [2] определить ось вращения несущего тела, т. е. найти углы μ^* и ν^* и затем, пользуясь формулами (24), вычислить искомые углы μ и ν.

Таким образом, расчет поворота несущего тела вокруг произвольной оси под действием вращения внутреннего маховика можно производить по соотношениям, аналогичным расчету поворота тела вокруг одной из его главных осей инерции, т. е. пользоваться уравнениям плоского поворота при расчете поворота пространственного.

Последний из интегралов (29) в этом случае будет иметь вид

$$J\tau + \varphi^* (C^2 \cos^2 \nu^* + B^2 \sin^2 \nu^* \cos^2 \mu^* + A^2 \sin^2 \nu^* \sin^2 \mu^*)^{1/2} = \text{const} \tag{30}$$

где квадратный корень играет роль некоторого приведенного момента инерции несущего тела относительно оси его вращения. Разумеется, этот вывод остается справедливым лишь в том случае, когда начальный кинетический момент системы несущее тело-маховик равен нулю.

Поступила 16. X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.

ДИФФУЗИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Н. П. Марьин (Москва)

Рассмотрим задачу о диффузии и поглощении частиц в атмосфере Земли. Пусть $u = u(r, z)$ — концентрация диффузирующих частиц. Будем считать, что плотность атмосферы меняется по экспоненциальному закону, а Земля — плоская. В цилиндрической системе координат r, φ, z, ось которой oz направлена перпендикулярно земной поверхности, уравнение диффузии

$$u_t = \operatorname{div} [D(z) \operatorname{grad} u] - \beta(z)\, u$$

имеет вид

$$u_t = D(z)(u_{rr} + r^{-1}n_r + u_{zz}) - \beta(z)\, u + \alpha D(z)\, u_z \tag{1}$$

Здесь $D(z)$ — коэффициент диффузии, H — приведенная высота атмосферы, $\beta(z)$ — средняя частота поглощения частиц

$$D(z) = D_0 e^{\alpha(z-z_0)}, \qquad \beta(z) = \beta_0 e^{-\alpha(z-z_0)}$$
$$\alpha = 1/H, \qquad D_0 = D(z_0), \qquad \beta_0 = \beta(z_0) \tag{2}$$

Найдем решение (1) при граничных условиях

$$u<\infty \quad \text{при } 0\leqslant r<\infty, \quad -\infty<z<\infty, \quad u\to 0 \quad \text{при } \sqrt{r^2+z^2}\to\infty \tag{3}$$

и начальных условиях

$$u=f(r,z) \quad \text{при } t=0 \tag{4}$$

где $f(r, z)$ — заданная функция.

Полагая $u = T(t)\,V(r)\,W(z)$, после подстановки в (1) получим разделение переменных

$$T_t+\lambda^2 D_0 T=0, \qquad U_{rr}+r^{-1}U_r+\varkappa^2 U=0 \tag{5}$$

$$W_{zz}^*+\left[\lambda^2 e^{-\alpha(z-z_0)}-\frac{\beta_0}{D_0}e^{-2\alpha(z-z_0)}-\varkappa^2-\frac{\alpha^2}{4}\right]W^*=0 \tag{6}$$

$$\left(W=W^*\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{\alpha}{2}\,dz\right]\right)$$

Уравнение (6) подстановкой

$$\xi=2\delta e^{-\alpha(z-z_0)}, \qquad \delta^2=\frac{\beta_0}{D_0\alpha^2}, \qquad \lambda^*=\frac{\lambda^2}{2\delta\alpha^2}, \qquad \frac{s^2}{4}=\frac{\varkappa^2}{\alpha^2}+\frac{1}{4}$$

приводится к виду

$$W_{\xi\xi}^*+\frac{1}{\xi}W_\xi^*+\left[\lambda^*\frac{1}{\xi}-\frac{1}{4}-\frac{s^2}{4\xi^2}\right]W^*=0 \quad \left(\lambda^*=\frac{s+1}{2}+n,\ n=0,1,2,\ldots\right) \tag{7}$$

Ограниченным решением уравнения (7) на $(0, \infty)$ будет функция Лагерра [1]

$$\omega_n^{(s)}(\xi)=A_n\xi^{-1/2 s}e^{1/2\xi}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^{s+n}e^{-\xi})$$

Частное ограниченное решение (1) представим следующим образом:

$$u=A_n\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{\alpha}{2}\,dz\right]J_0(\varkappa r)\,\omega_n^{(s)}(\xi)\,e^{-\lambda^2 D_0 t}$$

Так как уравнение (1) однородно и линейно, то, рассматривая A_n как функцию $\varkappa$, общее решение можно записать в виде суммы интегралов по $\varkappa$. Интегрируя по $\varkappa$ от 0 до ∞ и суммируя по n от 0 до ∞, получим

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty A_n(\varkappa)\exp\left(-\int_{z_0}^{z}\frac{\alpha}{2}\,dz\right)J_0(\varkappa r)\,e^{-\lambda^2 D_0 t}\,d\varkappa\right]\omega_n^{(s)}(\xi) \tag{8}$$

Чтобы определить $A_n(\varkappa)$, полагаем $t=0$ и, учитывая условия (4), имеем

$$\exp\left(\int_{z_0}^{z}\frac{\alpha}{2}\,dz\right)f(r,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty A_n(\varkappa)\,J_0(\varkappa r)\,d\varkappa\right]\omega_n^{(s)}(\xi)$$

Последнее выражение представляет собой ряд Лагерра по переменной ξ. Коэффициенты ряда равны

$$\int_0^\infty A_n(\varkappa)\,J_0(\varkappa r)\,d\varkappa=\frac{1}{I_n}\int_0^\infty\exp\left(\int_{z_0}^{z^\circ}\frac{\alpha}{2}\,dz\right)f(r,z^\circ)\,\omega_n^{(s)}(\xi^\circ)\,d\xi^\circ$$

$$(I_n=n!\,\Gamma(n+s+1))$$

Получившееся выражение для коэффициентов ряда Лагерра позволяет определить величину $A_n(\varkappa)$, если использовать представление заданной функции в виде интеграла Фурье — Бесселя

$$A_n(\varkappa)=\frac{\varkappa}{I_n}\int_0^\infty r^\circ J_0(\varkappa r^\circ)\int_0^\infty\exp\left(\int_{z_0}^{z^\circ}\frac{\alpha}{2}\,dz\right)f(r^\circ,z^\circ)\,\omega_n^{(s)}(\xi^\circ)\,d\xi^\circ dr^\circ$$

Подставляя полученное значение A_n (ϰ) в общее решение и меняя местами порядок интегрирования и суммирования, получим

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty f(r^\circ, z^\circ) \exp\left(-\int_{z_0}^{z^\circ} \frac{\alpha}{2} dz\right) \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{I_n} \omega_n^{(s)}(\xi) \omega_n^{(s)}(\xi^\circ) e^{-\lambda^2 D_0 t} \times$$
$$\times \varkappa J_0(\varkappa r) J_0(\varkappa r^\circ)\, d\varkappa r^\circ dr^\circ d\xi^\circ$$

Если учесть, что

$$\lambda^2 D_0 t = \lambda^* 2\delta\alpha D_0 t = (s + 1 + 2n)\, \alpha t \sqrt{D_0 \beta_0}$$

после суммирования по n будем иметь

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty f(r^\circ, z^\circ) \exp\left(-\int_{z_0}^{z^\circ} \frac{\alpha}{2} dz\right) \frac{1}{2 \operatorname{sh} \alpha t \sqrt{\beta_0 D_0}} \exp\left[-\frac{(\xi + \xi^\circ)}{2} \operatorname{cth}(\alpha t \sqrt{\beta_0 D_0})\right] \times$$
$$\times \int_0^\infty I_s \left[\frac{2\sqrt{\xi\xi^0}}{2 \operatorname{sh}(\alpha t \sqrt{\beta_0 D_0})}\right] \varkappa J_0(\varkappa r) J_0(\varkappa r^\circ)\, d\varkappa r^\circ dr^\circ d\xi^\circ$$

Введем переменные

$$\xi_1 = \frac{\xi}{2 \operatorname{sh} C}, \qquad \xi_1^\circ = \frac{\xi^\circ}{2 \operatorname{sh} C}, \qquad C = \alpha t \sqrt{\beta_0 D_0}$$

и окончательно решение (1) представим в виде

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty f(r^\circ, z^\circ) \frac{\xi_1^{\circ 1/2}}{\xi_1^{1/2}} \exp\left[-(\xi_1 + \xi_1^\circ) \operatorname{ch} C\right] \int_0^\infty I_s(2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ})\, \varkappa J_0(\varkappa r) J_0(\varkappa r^\circ) \times d\varkappa r^\circ dr^\circ d\xi^\circ \tag{9}$$

Концентрацию частиц в пространстве можно рассматривать как результат действия мгновенных точечных источников частиц, распределение которых определяется функцией $f(r^\circ, z^\circ)$. Меняя в (9) переменную интегрирования ξ° на z°, получим

$$u = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(r^\circ, z^\circ)\, G r^\circ dr^\circ dz^\circ.$$

Функция влияния мгновенного точечного источника равна

$$G = \frac{\alpha \xi_1^{1/2} \xi_1^{\circ 1/2}}{2\pi} \exp\left[-(\xi_1 + \xi_1^\circ) \operatorname{ch} C\right] \int_0^\infty I_s(2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ})\, \varkappa J_0(\varkappa r^\circ) J_0(\varkappa r)\, d\varkappa \tag{10}$$

При этом

$$2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(r^\circ, z^\circ)\, r^\circ dr^\circ dz^\circ = 1$$

Для оценки полученных величин и определения характера распределения частиц в пространстве с течением времени воспользуемся асимптотическим поведением $I_s(2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ})$. При больших значениях аргумента $2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ}$ функция I_s может быть представлена рядом

$$I_s(2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ}) = \frac{e^{2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ}}}{(4\pi \sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ})^{1/2}} \left\{1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k (4s^2 - 1)(4s^2 - 3^2) \ldots [4s^2 - (2k-1)^2]}{k!\, 2^{3k} (2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ})^k}\right\}$$

Подставим это выражение в (10), после интегрирования приближенно получим

$$G = \frac{\alpha^3 \xi_1^{1/4} \xi_1^{\circ 1/4}}{8\pi^{3/2}} \exp\left[-(\xi_1 + \xi_1^\circ) \operatorname{ch} C + 2\sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ} - \frac{1}{(2\xi_1 \xi_1^\circ)^{1/2}} -\right.$$
$$\left. - \frac{(r^2 + r^{\circ 2})\, \alpha^2 \sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ}}{4}\right] I_0\left(\frac{r r^\circ \alpha^2 \sqrt{\xi_1 \xi_1^\circ}}{2}\right) \tag{11}$$

В предельном случае, когда $\alpha \to 0$, среда становится однородной, а функция G переходит в функцию влияния мгновенного точечного источника для среды с постоянной плотностью, т. е.

$$G = \frac{1}{(2\pi D_0 t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(z-z^\circ)^2+r^2+r^{\circ 2}}{4D_0 t}\right] I_0\left(\frac{rr^\circ}{2D_0 t}\right)$$

Этот предельный переход подтверждает правомерность сделанных допущений. Количество поглощенных частиц равно

$$q = \beta(z)\, G \tag{12}$$

где G определяется согласно (11), а $\beta(z)$ — согласно (2). Если источник действовал в точке $\xi_1 = \xi_1^\circ$, $r = r^\circ = 0$, то (12) имеет вид

$$q = \frac{\alpha^3\beta_0}{\delta}\,\frac{\operatorname{sh} C}{8\pi^{3/2}}\,\xi_1^{5/4}\xi_1^{\circ 1/4}\exp\left[-(\xi_1+\xi_1^\circ)\operatorname{ch} C + 2\sqrt{\xi_1\xi_1^\circ} - \frac{1}{4\sqrt{\xi_1\xi_1^\circ}} - \frac{r^2\alpha^2\sqrt{\xi_1\xi_1^\circ}}{2}\right]$$

В качестве примера рассмотрим поведение экстремальных точек облака, образовавшегося в результате действия источника в точке с координатами $r = 0$, $\xi_1 = \xi_1^\circ$ или $r = 0$, $z = z^\circ$. Для этого приравняем нулю производную

$$\frac{dq}{d\xi_1} = \left(\frac{5}{4\xi_1} - \operatorname{ch} C + \frac{\xi_1^{\circ 1/2}}{\xi_1^{1/2}} - \frac{1}{8}\,\frac{r^2\alpha^2\xi_1^{\circ 1/2}}{\xi_1^{1/2}} + \frac{1}{8}\,\xi_1^{-3/2}\xi_1^{-1/2}\right) q$$

В точках с координатами $z = \pm\infty$ функция q обращается в нуль, а геометрическое место точек, в которых q имеет максимальное значение, определяется уравнением

$$\xi_1 \operatorname{ch} C - \xi_1^{1/2}\xi_1^{\circ 1/2}\left(1 - \frac{1}{8}r^2\alpha^2\right) - \frac{5}{4} + \frac{1}{8}\,\xi_1^{-1/2}\xi_1^{\circ -1/2} = 0 \tag{13}$$

В этом уравнении можно пренебречь последним слагаемым, тогда относительно $\xi_1^{1/2}$ получится квадратное уравнение, решая которое будем иметь

$$\xi_1^{1/2} = \xi_1^{\circ 1/2}\,\frac{1}{2\operatorname{ch} C}\,(1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2)\left[1 \pm \left(1 + \frac{5\operatorname{ch} C}{\xi_1^\circ(1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2)^2}\right)^{1/2}\right]$$

Представим это выражение следующим образом:

$$\frac{\xi_1^{1/2}}{\xi_1^{\circ 1/2}} = \frac{1}{2\operatorname{ch} C}\,(1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2)\left[1 \pm \left(1 + \frac{5\operatorname{ch} C \operatorname{sh} C}{\delta\exp(-\alpha(z-z^\circ))\,(1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2)^2}\right)^{1/2}\right] \tag{14}$$

Анализ (14) показывает, что когда $t \approx 0$

$$\frac{\xi_1^{1/2}}{\xi_1^{\circ 1/2}} = \begin{cases} 1 & \text{при } {}^1/_8 r^2\alpha^2 = 0 \\ 1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2 & \text{при } 0 \leqslant {}^1/_8 r^2\alpha^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{при } 1 \leqslant {}^1/_8 r^2\alpha^2 \end{cases} \tag{15}$$

Если

$$\frac{5\operatorname{ch} C}{\xi_1^\circ(1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2)^2} \gg 1$$

то из (14) можно получить

$$\frac{\xi_1^{1/4}}{\xi_1^{\circ 1/2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\operatorname{th} C\,\alpha\sqrt{D_0\exp[\alpha(z^\circ - z_0)]}}{\sqrt{\beta_0\exp[-\alpha(z^\circ - z_0)]}}\right)^{1/2} & \text{при } 0 \leqslant {}^1/_8 r^2\alpha^2 < 1 \qquad (16) \\[2ex] -\dfrac{5}{4}\,\dfrac{\operatorname{sh} C\,\alpha\sqrt{D_0\exp[\alpha(z^\circ - z_0)]}}{\sqrt{\beta_0\exp[-\alpha(z^\circ - z_0)]}\,(1 - {}^1/_8 r^2\alpha^2)} & \text{при } {}^1/_8 r^2\alpha^2 \gg 1 \qquad (17) \end{cases}$$

Эти соотношения показывают, что слой с максимальной концентрацией частиц перемещается в пространстве. Скорость перемещения уменьшается с увеличением t.

Из (16) следует, что высота слоя с максимальной концентрацией частиц практически не зависит от больших значений t. Слой останавливается. При малых значениях величины $\beta_0 \exp[-\alpha(z^\circ - z_0)]$ он будет расположен ниже линии $z = z^\circ$. Если $\beta_0 \exp[-\alpha(z^\circ - z_0)]$ велико, то высота слоя с максимальной концентрацией частиц будет больше или совпадает с линией $z = z^\circ$. Выражение (17) показывает, что по мере увеличения ${}^1/_8 r^2\alpha^2$ высота этого слоя увеличивается.

Автор приносит благодарность П. И. Кузнецову за полезные советы.

Поступила 1/IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Физматгиз, М., 1958, изд. 7, т. III, ч. 2.