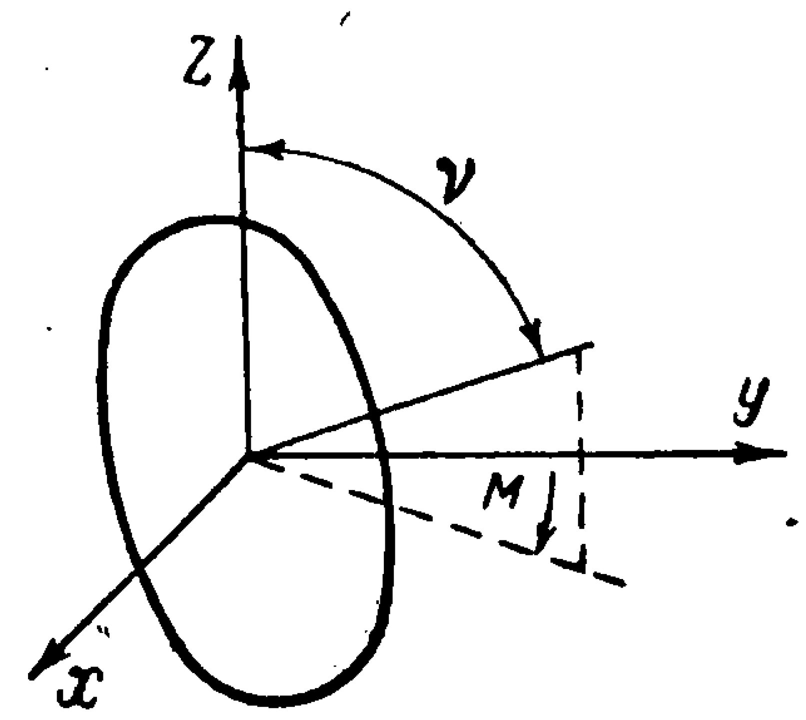
К ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО МАХОВИКА

Б. А. Смольников (Ленинград)

Ниже рассматривается решение задачи о конечном повороте несимметричного твердого тела под действием вращения внутреннего маховика, ось которого произвольно фиксирована в теле. Показано, что в общем случае вращения маховика вокруг произвольной оси несущее тело совершает чистое вращение вокруг другой оси, названной сопутствующей осью. Получены формулы для определения направления оси маховика в теле по заданной величине пространственного поворота несущего тела.

Положим, что направление оси вращения маховика относительно главных осей инерции x, y, z тела определяется (см. фигуру) углами μ и ν, угловая скорость маховика относительно корпуса есть $\Omega(t)$, а его момент инерции относительно оси вращения — J. Кроме того будем считать, что первоначально несущее тело и маховик были неподвижны, т. е. их суммарный кинетический момент равен нулю. Тогда из закона сохранения кинетического момента для системы несущее тело-маховик имеем



$$A\omega_x + J\Omega(t)\sin\nu\sin\mu = 0$$
$$B\omega_y + J\Omega(t)\sin\nu\cos\mu = 0 \qquad (1)$$
$$C\omega_z + J\Omega(t)\cos\nu = 0$$

где A, B, C — главные моменты инерции несущего тела вместе с маховиком, а ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора угловой скорости тела на его главные оси x, y, z. Чтобы найти движение тела под действием вращения маховика, нужно заменить проекции угловой скорости в уравнениях (1) их выражениями через углы и производные углов, определяющих ориентацию несущего тела в пространстве. В рассматриваемой задаче удобнее определять ориентацию тела при помощи параметров Кейли — Клейна α и β, связанных с углами Эйлера θ, ψ, φ соотношениями:

$$\alpha = \cos{}^1/_2\theta e^{{}^1/_2 i(\psi+\varphi)}, \qquad \beta = i\sin{}^1/_2\theta e^{{}^1/_2 i(\psi-\varphi)} \qquad (2)$$

Уравнения, описывающие движение тела, можно записать в таком виде [1]

$$\alpha^{\cdot} = {}^1/_2 i\omega_z\alpha + {}^1/_2(\omega_y + i\omega_x)\beta, \qquad \beta^{\cdot} = -{}^1/_2 i\omega_z\beta - {}^1/_2(\omega_y - i\omega_x)\alpha \qquad (3)$$

Подставляя сюда значения ω_x, ω_y, ω_z, выраженные из уравнений (1), получим

$$\begin{aligned} \alpha^{\cdot} &= -i\frac{J\Omega\cos\nu}{2C}\alpha - \frac{J\Omega\sin\nu}{2}\left(\frac{\cos\mu}{B} + i\frac{\sin\mu}{A}\right)\beta \\ \beta^{\cdot} &= i\frac{J\Omega\cos\nu}{2C}\beta + \frac{J\Omega\sin\nu}{2}\left(\frac{\cos\mu}{B} - i\frac{\sin\mu}{A}\right)\alpha \end{aligned} \qquad (4)$$

Из вида этой системы следует, что поворот корпуса несущего тела полностью определяется углом поворота маховика и не зависит от характера изменения скорости его вращения. Формально это вытекает из того, что в написанной системе можно исключить время t и в качестве независимой переменной ввести угол поворота маховика

$$\tau = \int_0^t \Omega(t)\,dt \qquad (5)$$

После этого система (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -i\frac{J\cos\nu}{2C}\alpha - \frac{J\sin\nu}{2}\left(\frac{\cos\mu}{B} + i\frac{\sin\mu}{A}\right)\beta \\ \beta' &= i\frac{J\cos\nu}{2C}\beta + \frac{J\sin\nu}{2}\left(\frac{\cos\mu}{B} - i\frac{\sin\mu}{A}\right)\alpha \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по τ. Уравнения (6) представляют собой однородную линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение ее, как обычно, будем искать в виде

$$\alpha = Me^{\gamma\tau}, \qquad \beta = Ne^{\gamma\tau} \tag{7}$$

Составляя характеристическое уравнение системы (6), находим

$$\gamma = \pm \frac{i}{2}\left[\left(\frac{J\cos\nu}{C}\right)^2 + \left(\frac{J\sin\nu\cos\mu}{B}\right)^2 + \left(\frac{J\sin\nu\sin\mu}{A}\right)^2\right]^{1/2} = \pm\frac{i\lambda}{2} \tag{8}$$

Легко заметить (обращаясь к исходной системе (1)), что выражение под корнем представляет собой не что иное, как отношение ω^2 / Ω^2, где $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$, так что из (8) следует соотношение, справедливое для любого момента времени

$$\omega / \Omega = \lambda = \text{const} \tag{9}$$

Решения для параметров α и β можно представить в виде

$$\alpha = M_1 e^{1/2 i\lambda\tau} + M_2 e^{-1/2 i\lambda\tau}, \qquad \beta = N_1 e^{1/2 i\lambda\tau} + N_2 e^{-1/2 i\lambda\tau} \tag{10}$$

Постоянные интегрирования M и N связаны следующими зависимостями:

$$N_1 = -ik_1M_1, \qquad N_2 = -ik_2M_2 \tag{11}$$

Здесь коэффициенты k_1 и k_2 определяются формулами

$$k_{1,2} = \left(\frac{\operatorname{ctg}\nu}{C} \pm R\right)\left(\frac{\cos\mu}{B} + i\,\frac{\sin\mu}{A}\right)^{-1} \qquad \left(R = \left(\frac{\operatorname{ctg}^2\nu}{C^2} + \frac{\cos^2\mu}{B^2} + \frac{\sin^2\mu}{A^2}\right)^{1/2}\right) \tag{12}$$

Следует еще иметь в виду условие

$$\alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta = 1 \tag{13}$$

из которого после подстановки в него решений (10) с учетом (11) вытекает

$$M_1\overline{M_1}\,(1 + k_1\bar k_1) + M_2\overline{M_2}\,(1 + k_2\bar k_2) = 1 \tag{14}$$

Таким образом, параметры Кейли — Клейна α и β, выраженные как функции угла поворота управляющего маховика τ, имеют вид

$$\alpha = M_1 e^{1/2 i\lambda\tau} + M_2 e^{-1/2 i\lambda\tau}, \qquad \beta = -\,ik_1M_1 e^{1/2 i\lambda\tau} - ik_2M_2 e^{-1/2 i\lambda\tau} \tag{15}$$

Так как модули постоянных M_1 и M_2 удовлетворяют уравнению (14), полученные решения фактически содержат лишь три независимых вещественных постоянных интегрирования, соответствующих трем степеням свободы при пространственном повороте тела. Умножим первое из уравнений (15) поочередно на k_1 и k_2 и вычтем из него каждый раз второе уравнение. После этого получим

$$(k_1 - k_2)\, M_2 e^{-1/2 i\lambda\tau} = k_1\alpha - i\beta, \qquad (k_2 - k_1)\, M_1 e^{1/2 i\lambda\tau} = k_2\alpha - i\beta \tag{16}$$

Отсюда непосредственно вытекают два комплексных интеграла

$$(k_1\alpha - i\beta)\, e^{1/2 i\lambda\tau} = \text{const}, \qquad (k_2\alpha - i\beta)\, e^{-1/2 i\lambda\tau} = \text{const} \tag{17}$$

Для решения задачи в эйлеровых углах следует выразить α и β согласно соотношениям (2). Интегралы (17) тогда примут вид

$$\begin{aligned} &[k_1 \cos {}^1\!/_2\theta e^{1/2 i(\psi+\varphi)} + \sin {}^1\!/_2\theta e^{1/2 i(\psi-\varphi)}]\, e^{1/2 i\lambda\tau} = \text{const} \\ &[k_2 \cos {}^1\!/_2\theta e^{1/2 i(\psi+\varphi)} + \sin {}^1\!/_2\theta e^{1/2 i(\psi-\varphi)}]\, e^{-1/2 i\lambda\tau} = \text{const} \end{aligned} \tag{18}$$

Если перемножить два последних интеграла между собой и заменить k_1 и k_2 их выражениями, то получим интеграл, не содержащий аргумента τ

$$\begin{aligned} &[C^{-1}\operatorname{ctg}\nu\sin\theta - \cos\theta\,(B^{-1}\cos\varphi\cos\mu + A^{-1}\sin\varphi\sin\mu) - \\ &- i\,(B^{-1}\sin\varphi\cos\mu - A^{-1}\cos\varphi\sin\mu)]\, e^{i\psi} = \text{const} \end{aligned} \tag{19}$$

Этот интеграл содержит все три эйлеровых угла θ, ψ, φ. Можно, однако, получить интеграл, содержащий лишь два эйлеровых угла θ и φ, выражая, например, модуль любого из интегралов (18), также являющийся интегралом задачи

$$\cos\theta + \operatorname{tg}\nu\sin\theta\,(CB^{-1}\cos\varphi\cos\mu + CA^{-1}\sin\varphi\sin\mu) = \text{const} \tag{20}$$

Чтобы осуществить поворот тела из некоторого начального положения θ_0, ψ_0, φ_0 в требуемое конечное положение θ_1, ψ_1, φ_1, необходимо соответствующим образом выбрать углы установки оси маховика μ и ν, а также угол его поворота τ. При этом следует иметь в виду, что как значения моментов инерции A, B и C, так и направления главных осей в теле, вообще говоря, зависят от углов установки маховика μ и ν. Однако при сравнительно малых размерах маховика этой зависимостью практически можно пренебречь. Тогда для определения углов μ и ν можно непосредственно пользоваться полученными интегралами (19) и (20). Окончательные формулы для определения углов установки оси маховика, можно представить в виде

$$\begin{aligned} B\,\mathrm{tg}\,\mu = A\,&[\sin\Delta\psi(\cos\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_0 - \cos\theta_0\cos\varphi_0\sin\theta_1) + \\ &+\cos\Delta\psi(\sin\varphi_1\sin\theta_0+\sin\varphi_0\sin\theta_1) - \sin\theta_1\sin\varphi_1 - \sin\theta_0\sin\varphi_0]\times \\ &\times[\sin\Delta\psi(-\cos\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_0+\cos\theta_0\sin\varphi_0\sin\theta_1) + \\ &+\cos\Delta\psi(\cos\varphi_1\sin\theta_0+\cos\varphi_0\sin\theta_1) - \sin\theta_1\cos\varphi_1 - \sin\theta_0\cos\varphi_0]^{-1} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{tg}\,\nu = [\cos\theta_0 - \cos\theta_1]\,&[B^{-1}\cos\mu(\sin\theta_1\cos\varphi_1 - \sin\theta_0\cos\varphi_0) + \\ &+A^{-1}\sin\mu(\sin\theta_1\sin\varphi_1 - \sin\theta_0\sin\varphi_0)]^{-1} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi_0$$

Зная μ и ν, легко вычислить λ и $k_{1,2}$, а затем, пользуясь любым из интегралов (18), найти и угол τ. Таким образом, приведенные формулы дают возможность определить углы установки маховика и угол его поворота τ, необходимые для осуществления требуемой переориентации несущего тела.

Чтобы выяснить общий характер движения несущего тела под действием вращения внутреннего маховика, обратимся снова к интегралам (17). Выражение (12) представим в виде

$$k_{1,2} = \left(1 \pm \frac{\mathrm{ctg}\,\nu}{CR}\right)\left(\frac{\cos^2\mu}{B^2} + \frac{\sin^2\mu}{A^2}\right)^{-1/2} R\exp\left[-i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{B}{A}\mathrm{tg}\,\mu\right)\right] \tag{23}$$

Введем новые углы μ^* и ν^*, определяемые следующими формулами:

$$\mathrm{tg}\,\mu^* = \frac{B}{A}\mathrm{tg}\,\mu, \qquad \cos\nu^* = \frac{\mathrm{ctg}\,\nu}{CR}, \qquad \sin\nu^* = \frac{1}{R}\left(\frac{\cos^2\mu}{B^2} + \frac{\sin^2\mu}{A^2}\right)^{1/2} \tag{24}$$

Тогда для коэффициентов k_1 и k_2 получим

$$k_1 = \mathrm{ctg}\,{}^1/_2\nu^* e^{-i\mu^*}, \qquad k_2 = -\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\nu^* e^{-i\mu^*} \tag{25}$$

Подставляя эти выражения в интегралы (17) и домножая их на необходимые постоянные множители, запишем их в таком виде

$$\begin{aligned} (\alpha\cos{}^1/_2\nu^* e^{-{}^1/_2 i\mu^*} - i\beta\sin{}^1/_2\nu^* e^{{}^1/_2 i\mu^*})\,e^{{}^1/_2 i\lambda\tau} = \mathrm{const} \\ (-\alpha i\sin{}^1/_2\nu^* e^{-{}^1/_2 i\mu^*} + \beta\cos{}^1/_2\nu^* e^{{}^1/_2 i\mu^*})\,e^{-{}^1/_2 i\lambda\tau} = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{26}$$

Выражения в скобках представляют собой параметры Кейли—Клейна суммарного поворота от системы неподвижных осей к системе осей, связанных с несущим телом, но не совпадающих с его главными осями инерции. Эту последнюю систему осей, связанных с телом, можно назвать сопутствующей системой, так как одна из ее осей, образующая углы μ^* и ν^* с главными осями инерции тела, сопутствует оси маховика в теле; $\mathrm{tg}\,\mu^*$ и $\mathrm{tg}\,\nu^*$ определяются соотношениями (24).

Угол μ^* хотя и не будет эйлеровым углом (углом прецессии), фактически отличается от него на постоянную величину. Поэтому, обозначая эйлеровы углы сопутствующей системы осей по отношению к неподвижной системе как θ^*, ψ^*, φ^*, а соответствующие им параметры Кейли — Клейна как α^* и β^*, можно записать интегралы (26) в виде

$$\alpha^* e^{{}^1/_2 i\lambda\tau} = \mathrm{const}, \qquad \beta^* e^{-{}^1/_2 i\lambda\tau} = \mathrm{const} \tag{27}$$

или в углах θ^*, ψ^*, φ^*

$$\cos{}^1/_2\theta^* e^{{}^1/_2 i(\psi^*+\varphi^*+\lambda\tau)} = \mathrm{const}, \qquad \sin{}^1/_2\theta^* e^{{}^1/_2 i(\psi^*-\varphi^*-\lambda\tau)} = \mathrm{const} \tag{28}$$

Отсюда сразу становится ясным, что углы θ^* и ψ^* сохраняются в процессе движения постоянными, а угол φ^* меняется линейно в зависимости от τ, т. е.

$$\theta^* = \theta_0^* = \text{const}, \qquad \psi^* = \psi_0^* = \text{const}, \qquad \varphi^* = \varphi_0^* - \lambda\tau \tag{29}$$

Таким образом, при вращении внутреннего маховика вокруг произвольной фиксированной оси корпус несущего тела совершает чистое вращение вокруг другой фиксированной оси, направление которой в пространстве задается углами θ^* и ψ^*, а в теле углами μ^* и ν^*. Заметим, что полученные ранее интегралы (19) и (20) выражают не что иное, как постоянство косинусов углов между осью вращения тела и неподвижными осями координат. Очевидно, что ось вращения тела совпадает с осью маховика лишь в тех случаях, когда либо $A = B = C$, либо ось маховика направлена вдоль одной из главных осей инерции тела.

По теореме Эйлера [2] всякая переориентировка твердого тела кинематически может быть выполнена посредством его поворота вокруг некоторой неподвижной оси. Полученный результат свидетельствует, что подобный поворот динамически может быть осуществлен при помощи одного маховика с фиксированной осью. Чтобы по заданному начальному и конечному положению несущего тела найти требуемые углы установки оси маховика в теле, следует на основе кинематических построений [2] определить ось вращения несущего тела, т. е. найти углы μ^* и ν^* и затем, пользуясь формулами (24), вычислить искомые углы μ и ν.

Таким образом, расчет поворота несущего тела вокруг произвольной оси под действием вращения внутреннего маховика можно производить по соотношениям, аналогичным расчету поворота тела вокруг одной из его главных осей инерции, т. е. пользоваться уравнениям плоского поворота при расчете поворота пространственного.

Последний из интегралов (29) в этом случае будет иметь вид

$$J\tau + \varphi^* (C^2\cos^2\nu^* + B^2\sin^2\nu^*\cos^2\mu^* + A^2\sin^2\nu^*\sin^2\mu^*)^{1/2} = \text{const} \tag{30}$$

где квадратный корень играет роль некоторого приведенного момента инерции несущего тела относительно оси его вращения. Разумеется, этот вывод остается справедливым лишь в том случае, когда начальный кинетический момент системы несущее тело-маховик равен нулю.

Поступила 16 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.

ДИФФУЗИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Н. П. Марьин (Москва)

Рассмотрим задачу о диффузии и поглощении частиц в атмосфере Земли. Пусть $u = u(r, z)$ — концентрация диффузирующих частиц. Будем считать, что плотность атмосферы меняется по экспоненциальному закону, а Земля — плоская. В цилиндрической системе координат r, φ, z, ось которой oz направлена перпендикулярно земной поверхности, уравнение диффузии

$$u_t = \operatorname{div}[D(z)\operatorname{grad} u] - \beta(z)\,u$$

имеет вид

$$u_t = D(z)(u_{rr} + r^{-1}n_r + u_{zz}) - \beta(z)\,u + \alpha D(z)\,u_z \tag{1}$$

Здесь $D(z)$ — коэффициент диффузии, H — приведенная высота атмосферы, $\beta(z)$ — средняя частота поглощения частиц

$$D(z) = D_0 e^{\alpha(z-z_0)}, \qquad \beta(z) = \beta_0 e^{-\alpha(z-z_0)}$$
$$\alpha = 1/H, \qquad D_0 = D(z_0), \qquad \beta_0 = \beta(z_0) \tag{2}$$