При выполнении условия (2.6), функция (2.4) будет знакоопределенным интегралом уравнений возмущенного движения, и по теореме Ляпунова невозмущенное движение будет устойчиво по отношению к переменным $p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$.

Достаточному условию (2.6), можно дать следующее геометрическое толкование: постоянная λ, определенная из (2.5), может быть найдена также и из уравнения

$$\lambda\boldsymbol{\varkappa}\times\mathbf{k}=\mathbf{k}\times\mathbf{OG}$$

где вектор $\mathbf{k}\,(a, b, c)$ — гиростатический момент, $\mathbf{OG}\,(x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор центра тяжести, $\boldsymbol{\varkappa}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ — единичный вектор перманентной оси. Неравенство (2.6) показывает, что если коллинеарные векторы

$$\boldsymbol{\varkappa}\times\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{OG} \tag{2.7}$$

одинаково направлены, движение устойчиво. Прямая, проходящая через неподвижную точку O гиростата параллельно вектору $\mathbf{k}$, делит плоскость (2.1) на две полуплоскости. Векторы (2.7) одинаково направлены, если из двух полупрямых, образующих ось перманентного вращения, вверх направлена та полупрямая, которая расположена в полуплоскости, не содержащей центр тяжести.

Если

$$\alpha=\frac{x_0}{\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\quad \beta=\frac{y_0}{\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\quad \gamma=\frac{z_0}{\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}}$$

имеем $\omega=0$, и гиростат находится в равновесии. В этом случае

$$\lambda=\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

и достаточное условие устойчивости равновесии (2.6) выполнено, если центр тяжести находится на вертикали ниже точки опоры гиростата.

Поступила 4 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
2. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гиростата. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеоретиздат, 1955.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВЕСОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТЬЮ

Ю. Н. Иванов

(Москва)

В большинстве работ по оптимальным режимам движения с ограниченной мощностью предполагается, что аппарат состоит из трех весовых частей: полезный вес, вес источника мощности и вес рабочего вещества (см. обзор [1]). Более подробный анализ требует включения в весовую формулу дополнительных весовых компонент.

Ниже исследуются качественные особенности оптимальных управлений, которые появляются при учете:

1) веса движителя, 2) веса рабочей массы для источника мощности.

Введем следующие обозначения: q, V, P, N—массовый расход, скорость истечения, тяга и мощность реактивной струи; G_m, G_N, G_n — вес рабочего вещества, вес источника мощности, полезный вес; G_p, G_ε—вес движителя, вес рабочей массы для источника мощности, G — полный вес, $a=Pg\,/\,G$—ускорение от реактивной тяги, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости движущейся точки; $\mathbf{i}$—единичный вектор направления тяги, $\mathbf{R}\,(\mathbf{r}, t)$ — ускорение гравитационных сил, t—время — аргумент задачи. Между весовыми компонентами G_m, G_N и параметрами реактивной струи имеются соотношения:

$$G_N=\alpha N_{\max},\qquad \dot{G}_m=-gq=-\frac{P^2g}{2N}=-\frac{a^2G^2}{2gN} \tag{0.1}$$

Движение точки подчиняется системе уравнений и краевым условиям:

$$\mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}^{\cdot} = (Pg\,/\,G)\,\mathbf{i} + \mathbf{R} = a\mathbf{i} + \mathbf{R} \tag{0.2}$$
$$\mathbf{r}\,(0) = \mathbf{r}^{(0)}, \qquad \mathbf{v}\,(0) = \mathbf{v}^{(0)}, \qquad \mathbf{r}\,(T) = \mathbf{r}^{(1)}, \qquad \mathbf{v}\,(T) = \mathbf{v}^{(1)}$$

(T — время движения, верхние индексы 0,1 относятся к началу и концу движения).

Управляющие функции задачи выбираются оптимальными в следующем смысле: требуется обеспечить максимум полезной нагрузки G_n при фиксированном начальном весе $G^{(0)}$ и заданных начальной ($\mathbf{r}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(0)}$) и конечной ($\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$) точках в фазовом пространстве; время движения T также задается.

1. Сформулируем вариационную задачу для идеальной двигательной системы при учете веса движителя

$$G = G_n + G_m + G_N + G_P \tag{1.1}$$

Вес движителя G_P является функцией максимальной мощности $N_{\max}$ и максимальной тяги $P_{\max}$, отдаваемой движителем, а также ряда параметров $b_1, \ldots, b_s$

$$G_P = f\,(N_{\max}, P_{\max}, b_1, \ldots, b_s) \tag{1.2}$$

Параметры $b_1, \ldots, b_s$ в случае идеального двигателя не входят в уравнения динамики (0.2) и в весовой формуле (1.1) участвуют только в виде (1.2), поэтому они могут быть выбраны до решения полной вариационной проблемы из условия минимума G_P. В результате будут получены выражения вида:

$$b_1 = \varphi_1\,(N_{\max}, P_{\max}), \ldots, b_s = \varphi_s\,(N_{\max}, P_{\max}) \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в (1.2) определится функциональная зависимость

$$G_P = F\,(N_{\max}, P_{\max}) \tag{1.4}$$

Параметры $N_{\max}$, $P_{\max}$ следует находить из решения полной вариационной проблемы. Изложим дальнейшую процедуру для случая линейной функции (1.4)

$$G_P = \alpha' N_{\max} + \gamma P_{\max} \tag{1.5}$$

По оценкам [2] величина $\gamma \equiv 10^3 - 10^5$.

В силу того, что веса G_P и G_N входят аддитивно в полную весовую формулу (1.1), член $\alpha' N_{\max}$ из (1.4) может быть добавлен к G_N ($G_N + \alpha' N_{\max} = (\alpha + \alpha')\,N_{\max}$). Таким образом, составляющая веса движителя в (1.5), пропорциональная $N_{\max}$, может быть исключена из рассмотрения; далее будет принята следующая формула для веса движителя

$$G_P = \gamma P_{\max} \tag{1.6}$$

Отнесем тягу P к максимальной тяге $P_{\max} = G_P\,/\,\gamma$, мощность N—к максимальной мощности $N_{\max} = G_N\,/\,\alpha$ и все веса G_n, G_m, G_N, G_P — к начальному весу $G^{(0)}$, оставив для новых безразмерных величин старые обозначения. Аналогично [3] введем в рассмотрение вес G_Σ

$$G_\Sigma = G_n + G_m \qquad (G_\Sigma{}^{(1)} = G_n) \tag{1.7}$$

Тогда система уравнений расхода и динамики запишется следующим образом:

$$G^{\cdot}_\Sigma = -\frac{\alpha g}{2\gamma^2}\frac{G_P{}^2P^2}{G_N N}, \qquad \mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}^{\cdot} = \frac{g}{\gamma}\frac{PG_P}{G_\Sigma + G_N + G_P}\,\mathbf{i} + \mathbf{R} \tag{1.8}$$

Начальное условие для веса G_Σ имеет вид

$$G_\Sigma{}^{(0)} = 1 - G_P{}^{(0)} - G_N{}^{(0)} \tag{1.9}$$

Следуя поставленной выше вариационной проблеме, необходимо отыскать оптимальные управляющие функции $\mathbf{i}$, N, P, G_N, G_P, доставляющие максимум относительной полезной нагрузке $G_n = G_\Sigma{}^{(1)}$, если движение подчиняется дифференциальным уравнениям (1.8) и краевым условиям (1.1), (1.9).

По определению управляющие функции $N(t)$, $P(t)$ ограничены снизу и сверху

$$1 \geqslant N(t) \geqslant 0, \qquad 1 \geqslant P(t) \geqslant 0$$

Управляющие функции $G_N(t)$, $G_P(t)$ отличаются от остальных тем, что их начальные значения $G_N^{(0)}$, $G_P^{(0)}$ связаны условием (1.9). Чтобы применить стандартную методику вариационного анализа, добавим к системе (1.8) следующие связи

$$G_N^{\cdot} = -q_N, \qquad G_P^{\cdot} = -q_P \qquad (q_N(t),\ q_P(t) \geqslant 0) \tag{1.10}$$

После такой замены функции G_N, G_P — фазовые координаты, а q_N, q_P— новые управления (этот прием уже был использован в работе [5]). Если веса G_N, G_P по условиям задачи остаются неизменными вдоль траектории, то $q_N = 0$, $q_P = 0$.

Для решения вариационной проблемы по методу Л. С. Понтрягина составим гамильтонову функцию H и выпишем уравнения для импульсов

$$H = -p_\Sigma \frac{\alpha g}{2\gamma^2} \frac{G_P^2 P^2}{G_N N} - p_N q_N - p_P q_P + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \left(\frac{g}{\gamma} \frac{P G_P}{G_\Sigma + G_N + G_P}\, \mathbf{i} + \mathbf{R}\right) \tag{1.11}$$

$$p_\Sigma^{\cdot} = \frac{g}{\gamma} \frac{P G_P}{(G_\Sigma + G_N + G_P)^2} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{p}_v), \qquad \mathbf{p}_r^{\cdot} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{R})$$

$$p_N^{\cdot} = -p_\Sigma \frac{\alpha g}{2\gamma^2} \frac{G_P^2 P^2}{G_N^2 N} + \frac{g}{\gamma} \frac{P G_P}{(G_\Sigma + G_N + G_P)^2} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{p}_v), \quad \mathbf{p}_v^{\cdot} = -\mathbf{p}_r \tag{1.12}$$

$$p_P^{\cdot} = p_\Sigma \frac{\alpha g}{2\gamma^2} \frac{G_P P^2}{G_N N} + \frac{g}{\gamma} \frac{P (G_\Sigma + G_N)}{(G_\Sigma + G_N + G_P)^2} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{p}_v)$$

Граничные условия для импульсов имеют вид:

$$p_N^{(0)} = p_P^{(0)} = p_\Sigma^{(0)}, \qquad p_N^{(1)} = p_P^{(1)} = 0, \qquad p_\Sigma^{(1)} = -1 \tag{1.13}$$

Из условия минимума H по управлению $\mathbf{i}$ следует:

$$\mathbf{i} = -\mathbf{p}_v / p_v \tag{1.14}$$

Функция $1/N$ входит в H линейно, поэтому управление N принимает граничные значения 0, 1 в зависимости от знака импульса $p_\Sigma(t)$.

Покажем, что $p_\Sigma(t) < 0$ на всем интервале $[0, T]$. Если $p_\Sigma(t) > 0$ на какой-то части интервала, то при этом оптимальные значения $P(t)$ и $N(t)$ будут предельными: $P = 1$, $N = 0$ (см. (1.11)). Это соответствует бесконечному расходу через двигатель с нулевой скоростью истечения. Такой режим работы явно не оптимален, поэтому предположение $p_\Sigma(t) > 0$ неверно, и, следовательно, $p_\Sigma(t) < 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

В силу знакопостоянства функции $p_\Sigma(t)$ управление $N(t)$ постоянно

$$N(t) = 1 \tag{1.15}$$

Управление $P(t)$ меняется в пределах замкнутого интервала $1 \geqslant P(t) \geqslant 0$: внутри интервала

$$P(t) = P_{\mathrm{opt}} \qquad \left(P_{\mathrm{opt}} = -\frac{p_v}{p_\Sigma} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{G_N N}{G_P (G_\Sigma + G_N + G_P)}\right) \tag{1.16}$$

на верхней границе

$$P(t) = 1 \quad \text{при } P_{\mathrm{opt}} \geqslant 1 \tag{1.17}$$

на нижней границе

$$P = 0 \quad \text{при } \Delta > 0 \quad \left(\Delta = -p_\Sigma \frac{\alpha g}{2\gamma^2} \frac{G_P^2 P^2}{G_N N} - p_v \frac{g}{\gamma} \frac{P G_P}{G_\Sigma + G_N + G_P}\right) \tag{1.18}$$

При помощи выражения (1.16) для P_{opt} преобразуем комбинацию Δ

$$\Delta = p_\Sigma \frac{\alpha g}{2\gamma^2} \frac{G_P^2 P^2}{G_N N} \left(-1 + \frac{2P_{\mathrm{opt}}}{P}\right)$$

Отношение $P_{\mathrm{opt}} / P \geqslant 1$, поэтому на всем интервале $\Delta < 0$, и нижняя граница (1.18) в состав оптимального управления $P(t)$ не входит — двигатель включен на всей траектории.

Если на управления q_P, q_N не наложены ограничения типа $q_P \leqslant Q_P$, $q_N \leqslant Q_N$, то импульсы p_P, p_N, неположительны всюду на $[0\ T]$. Доказательство проведем для импульса p_P. Предположим обратное: пусть в некоторый момент $t = t'$ импульс $p_P(t') > 0$; тогда управление q_P принимает оптимальное значение $q_P' = \infty$ (см. (1.11)), что соответствует мгновенному сбросу конечной части веса G_P. Производная $p^{\cdot}_P$ остается конечной при $q_P' = \infty$, поэтому импульс $p_P(t)$ не меняет знака на конечном интервале времени в окрестности момента $t = t'$. Следовательно, на конечном интервале времени $q_P(t) = \infty$; это отвечает бесконечно большому сбрасываемому весу G_P, что невозможно из-за конечности компоненты G_P. Поэтому исходное предположение неверно и

$$p_P(t) \leqslant 0, \qquad p_N(t) \leqslant 0 \qquad (T \geqslant t \geqslant 0) \tag{1.19}$$

В том случае, когда на управляющие функции q_p, q_N наложены ограничения упомянутого типа и, в частности, предполагается $q_N = q_P = 0$, $(T \geqslant t \geqslant 0)$, то выводы относительно знаков $p_N(t)$, $p_P(t)$ становятся несправедливыми.

Анализ оптимальных управлений q_N, q_P, заменивших согласно предложенному приему старые управления G_N, G_P, дает два типа режимов: режимы граничных управлений $q_N = 0$, $q_P = 0$ при $p_N < 0$, $p_P < 0$, соответствующие $G_N = \text{const}$, $G_P = \text{const}$, и режимы особых управлений $p^{\cdot}_N(t) = 0$, $p^{\cdot}_P(t) = 0$ при $p_N(t) = 0$, $p_P(t) = 0$, соответствующие минимуму функции H по G_N и по G_P. Следует заметить, что наличие двух указанных типов режимов является общим свойством задач с граничными условиями типа (1.9), наложенными на управляющие функции.

Выражения для $p^{\cdot}_N$, $p^{\cdot}_P$ при помощи (1.16) можно преобразовать к виду:

$$\begin{gathered}
p^{\cdot}_N = p_v \frac{g}{\gamma} \frac{PG_P}{2G_N(G_\Sigma + G_N + G_P)} \left(\frac{P}{P_{\text{opt}}} - \frac{2G_N}{G_\Sigma + G_N + G_P}\right) \\
p^{\cdot}_P = p_v \frac{g}{\gamma} \frac{P}{G_\Sigma + G_N + G_P} \left(-\frac{P}{P_{\text{opt}}} + \frac{G_\Sigma + G_N}{G_\Sigma + G_N + G_P}\right)
\end{gathered} \tag{1.20}$$

Режим особого управления для q_N и q_P соответственно реализуется при

$$\frac{P}{P_{\text{opt}}} = \frac{2G_N}{G_\Sigma + G_N + G_P}, \qquad \frac{P}{P_{\text{opt}}} = \frac{G_\Sigma + G_N}{G_\Sigma + G_N + G_P} \tag{1.21}$$

Если $P = P_{\text{opt}}$, то второе условие (1.21) заведомо не реализуется, и $p^{\cdot}_P < 0$. Следовательно, на участках траектории, на которых вес G_P убывает, управление P — граничное ($P = 1$).

Для выполнения граничного условия $p_P^{(1)} = 0$ в случае, когда на управление $q_P(t)$ нет ограничений сверху, необходимо, чтобы траектория замыкалась участком $P = 1$. В самом деле, в каждый момент времени импульс $p_P(t)$ неположителен (1.19); поэтому для достижения верхней границы $p_P = 0$ производная $p^{\cdot}_P$ в окрестности слева от точки $p_P = 0$ должна быть неотрицательной, что, согласно (1.20), имеет место только при $P = 1$.

В заключение этого раздела приведем интеграл [4] систем (1.8), (1.12), существующий при $P = P_{\text{opt}}$, $G_N = \text{const}$, $G_P = \text{const}$

$$(G_\Sigma + G_N + G_P)^2\, p_\Sigma = \text{const}$$

2. Рассмотрим вариационную задачу для идеальной двигательной системы при учете веса рабочей массы для источника мощности $G = G_n + G_m + G_N + G_\varepsilon$.

Вес рабочей массы G_ε выражается через энергию E, отдаваемую массой, так

$$G_\varepsilon = Eg / c^2\eta \qquad (\eta \approx 5 \cdot 10^{-4})[6] \tag{2.1}$$

где c — скорость света, η — коэффициент преобразования массы в энергию.

Мощность и располагаемая в момент t энергия связаны зависимостью

$$E^{\cdot} = -N \tag{2.2}$$

Введем суммарный вес $G_s = G_n + G_m + G_\varepsilon$.

Отнесем мощность, как и в п. 1, к максимальной мощности $N_{\max} = G_N / \alpha$ и веса G_s, G_n, G_N — к начальному весу $G^{(0)}$, оставив для новых безразмерных величин старые обозначения. Дифференциальные уравнения расхода веса G_s и динамики, а также начальное условие для веса G_s будут иметь вид

$$G_s^{\cdot} = -\frac{g}{c^2\eta\alpha} N G_N - \frac{\alpha}{2g}\frac{(G_s + G_N)^2}{N G_N} a^2, \qquad \mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{v} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = a\mathbf{i} + \mathbf{R}; \qquad G_s^{(0)} + G_N^{(0)} = 1$$

Вариационная задача состоит в определении оптимальных управлений N, G_N, $\mathbf{i}$, a, доставляющих максимум функционалу $G_s^{(1)} = G_n$.

Составим гамильтонову функцию и выпишем уравнения для импульсов

$$H = -p_s\left[\frac{g}{c^2\eta\alpha} N G_N + \frac{\alpha}{2g}\frac{(G_s + G_N)^2}{N G_N} a^2\right] + \mathbf{p}_r\cdot\mathbf{v} + \mathbf{p}_v\cdot(a\mathbf{i} + \mathbf{R}) \tag{2.4}$$

$$p_s^{\cdot} = p_s \frac{\alpha}{g}\frac{G_s + G_N}{N G_N} a^2, \qquad \mathbf{p}_r^{\cdot} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{R}), \qquad \mathbf{p}_v^{\cdot} = -\mathbf{p}_r \tag{2.5}$$

$$p_s(T) = -1$$

Управление $\mathbf{i}(t)$, доставляющее минимум функции H, дается формулой (1.12). Для определения оптимального управления $G_N(t)$ следует применить прием, развитый в п. 1. Здесь будем считать $G_N = \text{const}$.

Выпишем часть функции H с управлениями $a(t)$, $N(t)$

$$H^* = -p_s\left[\frac{g}{c^2\eta\alpha} N G_N + \frac{\alpha}{2g}\frac{(G_s + G_N)^2}{N G_N} a^2\right] - p_v a \tag{2.6}$$

Импульс p_s отрицателен всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Действительно, функция $p_s(t)$ определяется граничным условием и однородным линейным дифференциальным уравнением (2.5) с ограниченными коэффициентами, поэтому функция $p_s(t)$ не меняет знака, оставаясь всюду отрицательной.

Минимум функции H^* по управлениям $a(t)$, $N(t)$ достигается при условиях:

$$a = -\frac{p_v}{p_s}\frac{g}{\alpha}\frac{G_N}{(G_s + G_N)^2}, \qquad N = 1 \quad \text{при } \Delta_\varepsilon < 0$$

$$a = 0, \qquad N = 0 \quad \text{при } \Delta_\varepsilon > 0 \tag{2.7}$$

$$\Delta_\varepsilon = -p_s \frac{g}{c^2\eta\alpha} G_N + \frac{p_v^2}{p_s}\frac{g}{2\alpha}\frac{G_N}{(G_s + G_N)^2}$$

Таким образом, учет веса рабочей массы для источника мощности приводит к возможному включению в состав оптимальной траектории пассивных участков. Это имеет место, когда ускорение, вычисленное по (2.7), удовлетворяет неравенству

$$a < g\frac{\sqrt{2/\eta}}{c\alpha}\frac{G_N}{G_s + G_N}, \qquad \text{или} \qquad V > c\sqrt{2\eta}$$

последнее в терминах скорости истечения.

Поступила 13 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. 1. Инж. ж., 1963, № 3.
2. Au G. F. Entwicklungsstand Zukünftiger Raumfahrtantriebe, Luftfahrttechnik, 1961, vol. 7, № 1.
3. Иванов Ю. Н. О движении тела переменной массы с ограниченной мощностью и заданным активным временем. ПММ, 1963; т. XXVII, вып. 5.
4. Иванов Ю. Н. Оптимальное изменение мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
5. Токарев В. В. Оптимальное управление источником мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле с активным сбросом мощности. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
6. Shepherd L. R., Cleaver A. V. The Atomic Rocket. J. Brit. Interpl. Soc., 1948, vol. 7, № 5; 1949, vol. 8, № 2, Realities of Travel, 1957, London.