ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ КВАЗИСИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА

А. Анчев (София, Болгария)

В работе [1] получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого симметричного гиростата. Ниже указываются некоторые достаточные условия.

Будем рассматривать движение гиростата с одной неподвижной точкой O, внутренние движения которого стационарны. Примем точку O за начало неподвижной прямоугольной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$ с направленной вертикально вверх осью $O\zeta$ и за начало подвижной прямоугольной системы осей координат $Oxyz$, неизменным образом связанной с твердой частью гиростата. Оси системы $Oxyz$ совмещены с главными осями инерции гиростата A, B, C относительно осей x, y, z соответственно.

1. Пусть эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения $A \neq B = C$; в этом случае движение тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой, описывается системой

$$A\frac{dp}{dt} + qc - rb = P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \tag{1.1}$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-B)rp + ra - pc = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1$$

$$B\frac{dr}{dt} - (A-B)pq + pb - qa = P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

Здесь P — вес гиростата; x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести G; p, q, r — проекции вектора угловой скорости ω на подвижные оси; a, b, c — проекции гиростатического момента $\mathbf{k}$; γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси $O\zeta$ относительно подвижных осей. Уравнения движения (1.1) допускают частное решение

$$\gamma_{01} = \alpha = 0, \qquad p_0 = 0, \qquad n = \pm\sqrt{(ay_0 - bx_0)^2 + (cx_0 - az_0)^2} \tag{1.2}$$

$$\gamma_{02} = \beta = \frac{ay_0 - bx_0}{n}, \qquad q_0 = \frac{Px_0}{a}\beta, \qquad \gamma_{03} = \gamma = \frac{az_0 - cx_0}{n}, \qquad r_0 = \frac{Px_0}{a}\gamma$$

описывающее перманентное вращение гиростата. Здесь α, β, γ — направляющие косинусы перманентной оси вращения. Каждому знаку n соответствует полупрямая, которая, будучи направлена вертикально вверх, может служить перманентной осью. Движение (1.2) примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость. Полагая в (1.1)

$$p = \xi_1, \quad q = q_0 + \xi_2, \quad r = r_0 + \xi_3, \quad \gamma_1 = \eta_1, \quad \gamma_2 = \beta + \eta_2, \quad \gamma_3 = \gamma + \eta_3$$

получаем уравнения возмущенного движения, которые допускают первые интегралы

$$V_1 = A\xi_1^2 + B(\xi_2^2 + \xi_3^2 + 2q_0\xi_2 + 2r_0\xi_3) + 2P(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \text{const}$$

$$V_2 = A\xi_1\eta_1 + B(\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + q_0\eta_2 + r_0\eta_3 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3) + a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3 = \text{const}$$

$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2(\beta\eta_2 + \gamma\eta_3) = 0 \tag{1.3}$$

Функцию Ляпунова V можно построить в виде

$$V = V_1 - \frac{2Px_0}{a}V_2 + \left(B\frac{P^2x_0^2}{a^2} - \frac{Pn}{a}\right)V_3 = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + B\xi_3^2 - 2\frac{Px_0}{a}A\xi_1\eta_1 -$$

$$-2\frac{Px_0}{a}B\xi_2\eta_2 - 2\frac{Px_0}{a}B\xi_3\eta_3 + \left(B\frac{P^2x_0^2}{a^2} - \frac{Pn}{a}\right)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) \tag{1.4}$$

Согласно критерию Сильвестра, условием определенной положительности функции (1.4) будут неравенства

$$A > 0, \qquad AB > 0, \qquad AB^2 > 0, \qquad (B-A)\frac{P^2x_0^2}{a^2} - \frac{Pn}{a} > 0$$

$$-\left[(B-A)\frac{P^2x_0^2}{a^2} - \frac{Pn}{a}\right]\frac{Pn}{a} > 0, \qquad \left[(B-A)\frac{P^2x_0^2}{a^2} - \frac{Pn}{a}\right]\frac{P^2n^2}{a^2} > 0 \tag{1.5}$$

Первые три неравенства всегда выполнены, а шестое является следствием четвертого и пятого, последние можно записать в виде

$$(B - A)\,Px_0^2 - an > 0, \qquad - an > 0 \tag{1.6}$$

Так как V при условиях (1.6) будет знакоопределенным интегралом возмущенного движения, по теореме Ляпунова об устойчивости движения (1.7) будут достаточными условиями устойчивости перманентных вращений гиростата по отношению к переменным $p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$. Если $A < B = C$, первое из неравенств (1.6) будет следствием второго и достаточным условием устойчивости будет неравенство

$$- an > 0 \tag{1.7}$$

Так как при данном гиростатическом моменте знак n всегда можно выбрать обратным знаку a, то перманентное вращение гиростата устойчиво лишь для одной полуоси. Если же знак гиростатического момента можно выбрать произвольно, то из (1.7) видно, что можно получить перманентные вращения вокруг обеих полуосей устойчивыми, выбирая знак a обратным знаку n. Если $A > B = C$, второе из неравенств (1.6) будет следствием первого и достаточным условием устойчивости будет

$$- an > (A - B)\,Px_0^2 \tag{1.8}$$

Если $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$, то $\omega = 0$, и достаточным условием устойчивости равновесия будет неравенство (1.7). Так как в этом случае $n = \pm a\sqrt{y_0^2 + z_0^2}$, то из (1.7) имеем

$$\mp a^2\sqrt{y_0^2 + z_0^2} > 0$$

Это условие удовлетворяется только при нижнем знаке, т. е. равновесие гиростата устойчиво, если центр тяжести G находится ниже неподвижной точки O гиростата.

2. Пусть эллипсоид инерции шаровой, т. е. $A = B = C$; при этом уравнения движения (1.1) очевидным образом упрощаются и, как известно [2], перманентной осью вращения может служить любая из полупрямых плоскости

$$(bz_0 - cy_0)\,\alpha + (cx_0 - az_0)\,\beta + (ay_0 - bx_0)\,\gamma = 0 \tag{2.1}$$

где α, β, γ — направляющие косинусы полупрямой, которая, будучи направлена вертикально вверх, может служить перманентной осью. Угловая скорость вращения в этом случае

$$\omega = P\,\frac{\beta z_0 - \gamma y_0}{\beta c - \gamma b} = P\,\frac{\gamma x_0 - \alpha z_0}{\gamma a - \alpha c} = P\,\frac{\alpha y_0 - \beta x_0}{\alpha b - \beta a} \tag{2.2}$$

Рассмотрим частное решение системы (1.2), когда $A = B = C$

$$\alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}, \quad p_0 = \alpha\omega, \quad q_0 = \beta\omega, \quad r_0 = \gamma\omega \tag{2.3}$$

где α, β, γ удовлетворяют (2.1), а ω определяется из (2.2). Движение (2.3) примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость, полагая в возмущенном движении

$$p = p_0 + \xi_1,\ q = q_0 + \xi_2,\ r = r_0 + \xi_3,\ \gamma_1 = \alpha + \eta_1,\ \gamma_2 = \beta + \eta_2,\ \gamma_3 = \gamma + \eta_3$$

Уравнения возмущенного движения допускают первые интегралы

$$V_1 = A\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + 2A\,(p_0\xi_1 + q_0\xi_2 + r_0\xi_3) + 2P\,(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \text{const}$$

$$V_2 = A\,(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + p_0\eta_1 + q_0\eta_2 + r_0\eta_3 + \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3) + a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3 = \text{const}$$

$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\,(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) = 0$$

Функцию Ляпунова построим в виде

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + (A\omega^2 + P\lambda)\,V_3 = A\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - 2A\omega\,(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3) + (A\omega^2 + P\lambda)\,(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) \tag{2.4}$$

где постоянную λ на основании (2.1) и (2.2) возьмем в виде

$$\lambda = \frac{ay_0 - bx_0}{b\alpha - a\beta} = \frac{bz_0 - cy_0}{c\beta - b\gamma} = \frac{cx_0 - az_0}{a\gamma - c\alpha} \tag{2.5}$$

Согласно критерию Сильвестра, условием определенной положительности функции (2.4) будет неравенство

$$\lambda > 0 \tag{2.6}$$

При выполнении условия (2.6), функция (2.4) будет знакоопределенным интегралом уравнений возмущенного движения, и по теореме Ляпунова невозмущенное движение будет устойчиво по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.

Достаточному условию (2.6), можно дать следующее геометрическое толкование: постоянная λ, определенная из (2.5), может быть найдена также и из уравнения

$$\lambda\varkappa \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{OG}$$

где вектор $\mathbf{k}\,(a, b, c)$ — гиростатический момент, $\mathbf{OG}\,(x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор центра тяжести, $\varkappa\,(\alpha, \beta, \gamma)$ — единичный вектор перманентной оси. Неравенство (2.6) показывает, что если коллинеарные векторы

$$\varkappa \times \mathbf{k},\ \mathbf{k} \times \mathbf{OG} \tag{2.7}$$

одинаково направлены, движение устойчиво. Прямая, проходящая через неподвижную точку O гиростата параллельно вектору $\mathbf{k}$, делит плоскость (2.1) на две полуплоскости. Векторы (2.7) одинаково направлены, если из двух полупрямых, образующих ось перманентного вращения, вверх направлена та полупрямая, которая расположена в полуплоскости, не содержащей центр тяжести.

Если

$$\alpha = \frac{x_0}{\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \quad \beta = \frac{y_0}{\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \quad \gamma = \frac{z_0}{\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z^2}}$$

имеем $\omega = 0$, и гиростат находится в равновесии. В этом случае

$$\lambda = \mp\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

и достаточное условие устойчивости равновесии (2.6) выполнено, если центр тяжести находится на вертикали ниже точки опоры гиростата.

Поступила 4 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
2. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гиростата. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеоретиздат, 1955.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВЕСОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТЬЮ

Ю. Н. Иванов

(Москва)

В большинстве работ по оптимальным режимам движения с ограниченной мощностью предполагается, что аппарат состоит из трех весовых частей: полезный вес, вес источника мощности и вес рабочего вещества (см. обзор [1]). Более подробный анализ требует включения в весовую формулу дополнительных весовых компонент.

Ниже исследуются качественные особенности оптимальных управлений, которые появляются при учете:

1) веса движителя, 2) веса рабочей массы для источника мощности.

Введем следующие обозначения: q, V, P, N—массовый расход, скорость истечения, тяга и мощность реактивной струи; G_m, G_N, G_n — вес рабочего вещества, вес источника мощности, полезный вес; G_P, G_ε—вес движителя, вес рабочей массы для источника мощности, G — полный вес, $a=Pg\,/\,G$—ускорение от реактивной тяги, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости движущейся точки; $\mathbf{i}$—единичный вектор направления тяги, $\mathbf{R}\,(\mathbf{r}, t)$ — ускорение гравитационных сил, t—время — аргумент задачи. Между весовыми компонентами G_m, G_N и параметрами реактивной струи имеются соотношения:

$$G_N = \alpha N_{\max}, \qquad \dot{G}_m = -gq = -\frac{P^2 g}{2N} = -\frac{a^2 G^2}{2gN} \tag{0.1}$$