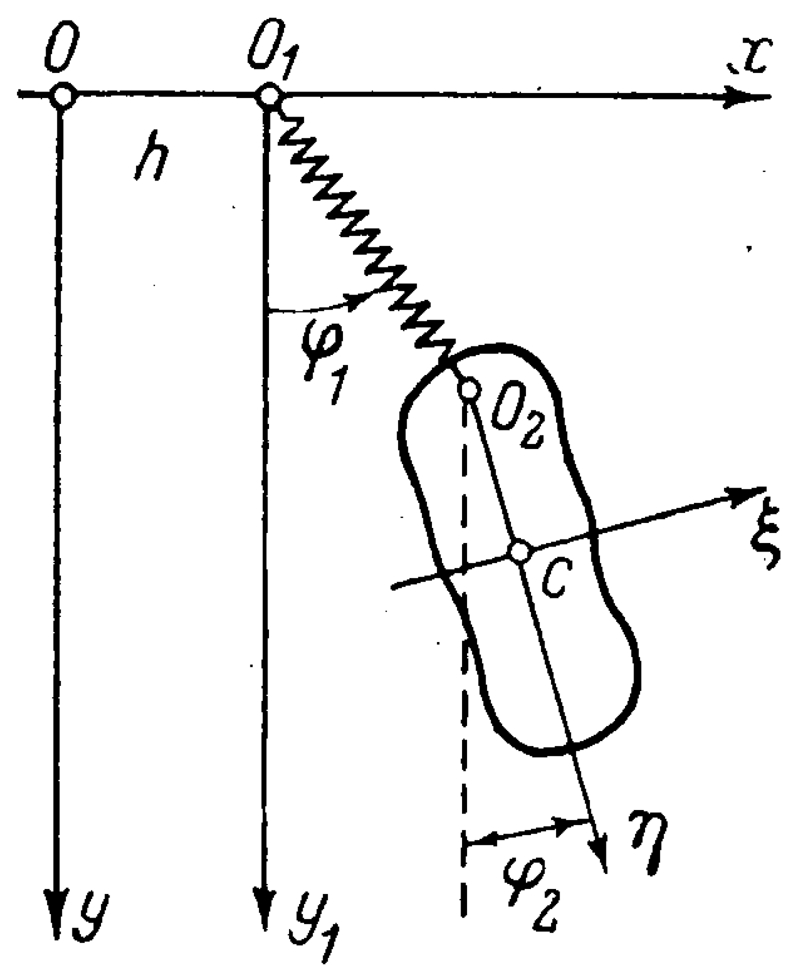
ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МАЯТНИКА

Н. В. Стоянов (София, Болгария)

Рассматриваются свойства относительных периодических движений твердого тела, подвешенного на упругой нити в равномерно вращающейся вертикальной плоскости. Относительные периодические движения математического маятника с упругой нитью рассмотрены в работах [1,2].

1. Обозначим через Oxy равномерно вращающуюся вокруг направленной вниз оси Oy систему координат, по отношению к которой изучим движение твердого тела. Упругая нить, рассматриваемая как линейная безмассовая пружина с упругой постоянной c, подвешена в точке O_1 (см. фигуру), где $\overline{OO_1} = h$. Угол отклонения нити от вертикальной оси O_1y_1 обозначим φ_1, а ее длину — ρ. Тело с массой m подвешено на пружине в точке O_2. Угол между прямой, проходящей через O_2 и центр тяжести C тела, и вертикалью назовем φ_2, и положим $O_2C = a$. Выберем систему координат $C\xi\eta\zeta$, связанную с телом так, чтобы $C\eta$ проходило бы через O_2, $C\xi$ — ортогональной $C\eta$ и лежащей в плоскости Oxy, а $C\zeta$ — ортогональной Oxy.



Принимаем, что оси системы $C\xi\eta\zeta$ — главные оси инерции тела. Обозначим через J_ν ($\nu=1, 2, 3$) главные моменты инерции относительно осей $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$.

Кинетическая энергия системы в ее абсолютном движении, согласно теореме Кенига, равна

$$T = {}^1/_2\, m v_c^2 + {}^1/_2\, [J_3 \dot\varphi_2^2 + \omega^2 (J_1 \sin^2\varphi_2 + J_2 \cos^2\varphi_2)]$$

где v_c — абсолютная скорость точки C. Имея в виду, что координаты центра тяжести тела относительно системы Oxy определяются выражениями

$$x_c = h + \rho\sin\varphi_1 + q\sin\varphi_2, \qquad y_c = \rho\cos\varphi_1 = a\cos\varphi_2$$

и что

$$v_c^2 = \dot x_c^2 + \dot y_c^2 + \omega^2 x_c^2$$

выражение для кинетической энергии приобретает вид

$$T = {}^1/_2\, m\, [\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi_1^2 + a\dot\varphi_2^2 + 2a\dot\rho\dot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2a\rho\dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$+ \omega^2 (h + \rho\sin\varphi_1 + a\sin\varphi_2)^2] + {}^1/_2\, [J_3\dot\varphi_2^2 + \omega^2 (J_1\sin^2\varphi_2 + J_2\cos^2\varphi_2)] \qquad (1.1)$$

Потенциальная энергия системы — сумма энергии упругой деформации нити и энергии тяготения — дается выражением

$$\Pi = {}^1/_2\, c\,(\rho - l)^2 - mg\,(\rho\cos\varphi_1 + a\cos\varphi_2) \qquad (1.2)$$

где l — свободная длина нити.

Имея в виду (1.1) и (1.2), согласно уравнениям Лагранжа, получаем систему дифференциальных уравнений движения

$$\ddot\rho + \rho\,(k^2 - \dot\varphi_1^2 - \omega^2\sin^2\varphi_1) + a\ddot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - a\dot\varphi_2^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) -$$
$$- \omega^2\,(h + a\sin\varphi_2)\sin\varphi_1 - g\cos\varphi_1 - k^2 l = 0$$

$$\rho\ddot\varphi_1 + 2\dot\rho\dot\varphi_1 + a\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a\dot\varphi_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \omega^2\,(h + \rho\sin\varphi_1 +$$
$$+ a\sin\varphi_2)\cos\varphi_1 + g\sin\varphi_1 = 0 \qquad (1.3)$$

$$l_1\ddot\varphi_2 + (\rho\ddot\varphi_1 + 2\dot\rho\dot\varphi_1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (\ddot\rho - \rho\dot\varphi_1^2)\sin(\varphi_1 - \varphi_2) -$$
$$- \omega^2\,(h + \rho\sin\varphi_1 + a\sin\varphi_2)\cos\varphi_2 + [(J_2 - J_1)/2\,am]\sin 2\varphi_2 + g\sin\varphi_2 = 0$$

где

$$l_1 = \frac{1}{a}\left(a^2 + \frac{J_3}{m}\right), \qquad k^2 = \frac{c}{m}$$

Здесь l_1 — приведенная длина физического маятника (тела) относительно точки подвеса O_2.

Рассмотрим колебания системы около положения относительного равновесия. При этом положим

$$J_1 = J_2 \tag{1.4}$$

Можно доказать, что если выполнено (1.4), то в относительном равновесии углы φ_{10} и φ_{20} равны между собой, вследствие чего можем сделать подстановку

$$\rho(t) = b + \xi(t), \qquad \varphi_1(t) = \varphi_0 + \varphi(t), \qquad \varphi_2(t) = \varphi_0 + \psi(t) \tag{1.5}$$

Здесь φ_0 — значение углов φ_{10}, φ_{20}, а b — длина нити маятника с положением относительного равновесия. Величины φ_0 и b определяются равенствами

$$k^2(b-l) = \omega^2(h + b\sin\varphi_0 + a\sin\varphi_0)\sin\varphi_0 + g\cos\varphi_0 \tag{1.6}$$
$$g\sin\varphi_0 = \omega^2(h + b\sin\varphi_0 + a\sin\varphi_0)\cos\varphi_0$$

Имея в виду (1.4) и (1.6), подстановкой (1.5) в (1.3) получаем

$$\xi^{\cdot\cdot} + (k^2 - \omega^2\sin\varphi_0)\xi - {}^1/_2\omega^2 b\sin 2\varphi_0\varphi - {}^1/_2\omega^2 a\sin 2\varphi_0\psi = f_1 + \ldots \tag{1.7}$$
$$b\varphi^{\cdot\cdot} + a\psi^{\cdot\cdot} - \omega^2 a\cos^2\varphi_0\xi + [k^2(b-l) - \omega^2 b\cos^2\varphi_0]\varphi - \omega^2 a\cos^2\varphi_0\psi = f_2 + \ldots$$
$$l_1\psi^{\cdot\cdot} + b\varphi^{\cdot\cdot} - {}^1/_2\omega^2\sin 2\varphi_0\xi - \omega^2 b\cos^2\varphi_0\varphi + [k^2(b-l) - \omega^2 a\cos^2\varphi_0]\psi = f_3 + \ldots$$

где

$$f_1 = b\varphi^{\cdot 2} - a(\varphi - \psi)\psi^{\cdot\cdot} + \omega^2\sin 2\varphi_0\xi\varphi + \omega^2 a\cos^2\varphi_0\varphi\psi - {}^1/_2\omega^2 a\sin^2\varphi_0\psi^2 + a\psi^{\cdot 2} +$$
$$+ {}^1/_2(2\omega^2 b\cos 2\varphi_0 - a\omega^2\sin^2\varphi_0 - \omega^2 h\sin\varphi_0 - g\cos\varphi_0)\varphi^2$$
$$f_2 = -\xi\varphi^{\cdot\cdot} - 2\xi^{\cdot}\varphi^{\cdot} + \omega^2\cos 2\varphi_0\xi\varphi - {}^1/_2\omega^2 a\sin 2\varphi_0\varphi\psi - {}^3/_4\omega^2 b\sin 2\varphi_0\varphi^2 - {}^1/_2\omega^2 a\sin 2\varphi_0\psi^2$$
$$f_3 = -\xi\varphi^{\cdot\cdot} - (\varphi - \psi)\xi^{\cdot\cdot} - 2\xi^{\cdot}\varphi^{\cdot} + \omega^2\cos^2\varphi_0\xi\varphi - {}^1/_2\omega^2 b\sin 2\varphi_0\varphi\psi -$$
$$- \omega^2\sin^2\varphi_0\xi\psi - {}^1/_4\omega^2 b\sin 2\varphi_0\varphi^2 - {}^3/_4\omega^2\sin 2\varphi_0\psi^2 \tag{1.8}$$

Отбрасывая нелинейные члены, получим систему

$$\begin{aligned} \xi^{\cdot\cdot} + a_{11}\xi + a_{12}\varphi + a_{13}\psi &= 0 \\ b\varphi^{\cdot\cdot} + a\psi^{\cdot\cdot} + b_{11}\xi + b_{12}\varphi + b_{13}\psi &= 0 \\ l_1\psi^{\cdot\cdot} + b\varphi^{\cdot\cdot} + c_{11}\xi + c_{12}\varphi + c_{13}\psi &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{array}{lll} a_{11} = k^2 - \omega^2\sin^2\varphi_0, & b_{11} = -\omega^2 a\cos^2\varphi_0, & c_{11} = -{}^1/_2\omega^2\sin 2\varphi_0 \\ a_{12} = -{}^1/_2\omega^2 b\sin 2\varphi_0, & b_{12} = k^2(b-l) - \omega^2 b\cos^2\varphi_0, & c_{12} = -\omega^2 b\cos^2\varphi_0 \\ a_{13} = -{}^1/_2\omega^2 a\sin 2\varphi_0, & b_{13} = -\omega^2 a\cos^2\varphi_0, & c_{13} = k^2(b-l) - \omega^2 a\cos^2\varphi_0 \end{array} \tag{1.10}$$

Фундаментальное уравнение системы будет

$$\begin{vmatrix} a_{11} + r^2 & a_{12} & a_{13} \\ b_{11} & b_{12} + br^2 & b_{13} + ar^2 \\ c_{11} & c_{12} + br^2 & c_{13} + l_1 r^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.11}$$

Условия того, чтобы уравнение (1.11) имело чисто мнимые корни, сводится к следующему неравенству:

$$k^2[g\cos\varphi_0 + \omega^2(h\sin\varphi_0 + l\sin^2\varphi_0 - b\cos^2\varphi_0 - a\cos 2\varphi_0)] +$$
$$+ \omega^4 b\cos^2\varphi_0\sin\varphi_0(\sin\varphi_0 - a\cos\varphi_0) > 0 \tag{1.12}$$

При условии (1.12) система имеет три пары чисто мнимых корней. На основании общей теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами система (1.7) может быть преобразована к виду, подобному виду системы [3] (стр. 435)

$$\frac{dx}{dt} = -ry + X, \qquad \frac{dy}{dt} = rx + Y$$

$$\frac{dx_s}{dt} = b_{s1}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + a_s x + b_s y + X_s \qquad (s = 1, \ldots, m;\ m = 4)$$

где $\pm ir$ — какая-нибудь пара чисто мнимых корней.

Предложенную систему можно рассматривать как систему Ляпунова относительно этой пары чисто мнимых корней. На основании теоремы [3] (стр. 442) можно утверждать, что система допускает периодическое решение, зависящее от произвольного параметра. Этим параметром является начальное значение d величины x.

За «основную» пару чисто мнимых корней можно взять любую пару, поэтому наша система допускает три периодических решения.

2. Теперь изучим свойства периодических движений около положения относительного равновесия, которые имеют приблизительный период $2\pi / r_1$.

Пусть период решения имеет вид

$$T_1 = \frac{2\pi}{r_1}(1 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 + \ldots) \tag{2.1}$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — постоянные, подлежащие определению, а $\lambda = \alpha d$.

Вводим в уравнения вместо переменной t переменную τ с помощью подстановки

$$t = \tau (1 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 + \ldots) \tag{2.2}$$

Тогда задача сводится к отысканию периодических решений с периодом T_1 следующей системы:

$$\begin{gathered}\xi^{\cdot\cdot} + a_{11}\xi + a_{12}\varphi + a_{13}\psi = f_1^* + \ldots \\ b\varphi^{\cdot\cdot} + a\psi^{\cdot\cdot} + b_{11}\xi + b_{12}\varphi + b_{13}\psi = f_2^* + \ldots \\ l_1\psi^{\cdot\cdot} + b\varphi^{\cdot\cdot} + c_{11}\xi + c_{12}\varphi + c_{13}\psi = f_3^* + \ldots\end{gathered} \tag{2.3}$$

где f_1^*, f_2^*, f_3^* получаются из (1.8). Производные здесь и дальше будут относительно τ.

Решения системы (2.3) аналитичны относительно λ, поэтому будем искать их в виде рядов

$$\begin{gathered}\xi (\tau) = \lambda\xi_1 (\tau) + \lambda^2\xi_2 (\tau) + \lambda^3\xi_3 (\tau) + \ldots \\ \varphi (\tau) = \lambda\varphi_1 (\tau) + \lambda^2\varphi_2 (\tau) + \lambda^3 \varphi_3 (\tau) + \ldots \\ \psi (\tau) = \lambda\psi_1 (\tau) + \lambda^2\psi_2 (\tau) + \lambda^3\psi_3 (\tau) + \ldots\end{gathered} \tag{2.4}$$

где ξ_ν, φ_ν, ψ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ — периодические функции τ периода $2\pi / r_1$ (здесь φ_1 и φ_2 — периодические функции τ и не имеют того же смысла, как в п. 1), удовлетворяющие начальным условиям (2.5)

$$\xi_1 (0) = 1, \quad \varphi_1 (0) = k_1, \quad \psi_1 (0) = k_2, \quad \xi_\nu^{\cdot} (0) = \varphi_\nu^{\cdot} (0) = \psi_\nu^{\cdot} (0) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем систему уравнений для определения ξ_ν, φ_ν, ψ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$.

Для функций ξ_1, φ_1, ψ_1 получается основная система (1.9), которая имеет очевидное решение

$$\xi_1 (\tau) = \cos r_1\tau, \qquad \varphi_1 (\tau) = k_1 \cos r_1\tau, \qquad \psi_1 (\tau) = k_2 \cos r_1\tau \tag{2.6}$$

где

$$k_1 = \frac{(a_{11} - r_1^2)(b_{13} - ar_1^2) - a_{13}c_{11}}{a_{13}(b_{12} - br_1^2) - a_{12}(b_{13} - ar_1^2)}, \qquad k_2 = \frac{(a_{11} - r_1^2)(b_{12} - br_1^2) - a_{12}c_{11}}{a_{13}(b_{12} - br_1^2) - a_{12}(b_{13} - ar_1^2)}$$

Далее имеем

$$\begin{gathered}\xi_2^{\cdot\cdot} + a_{11}\xi_2 + a_{12}\varphi_2 + a_{13}\psi_2 = F_0 - 2\delta_1F_1 \cos r_1\tau + F_2 \cos 2r_1\tau \\ b\varphi_2^{\cdot\cdot} + a\psi_2^{\cdot\cdot} + b_{11}\xi_2 + b_{12}\varphi_2 + b_{13}\psi_2 = G_0 - 2\delta_1G_1 \cos r_1\tau + G_2 \cos 2r_1\tau \\ l_1\psi_2^{\cdot\cdot} + b\varphi_2^{\cdot\cdot} + c_{11}\xi_2 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\psi_2 = H_0 - 2\delta_1H_1 \cos r_1\tau + H_2 \cos 2r_1\tau\end{gathered} \tag{2.7}$$

где выражения для F_ν, G_ν, H_ν не приведены из-за их сложности.

Периодическое решение (с периодом $2\pi / r_1$) однородной системы, соответствующей (2.7), будет

$$\begin{gathered}\xi_{21} = C_1 \cos r_1\tau + D_1 \sin r_1\tau, \qquad \varphi_{21} = k_1 (C_1 \cos r_1\tau + D_1 \sin r_1\tau) \\ \psi_{21} = k_2 (C_1 \cos r_1\tau + D_1 \sin r_1\tau)\end{gathered} \tag{2.8}$$

где неизвестные постоянные C_1 и D_1 будут определены ниже.

Частное решение системы (2.7) ищем в виде

$$\begin{gathered}\xi_{22} = P_0 + P_1 \cos r_1\tau + P_2 \cos 2r_1\tau, \qquad \varphi_{22} = Q_0 + Q_1 \cos r_1\tau + Q_2 \cos 2r_1\tau \\ \psi_{22} = R_0 + R_1 \cos r_1\tau + R_2 \cos 2r_1\tau\end{gathered} \tag{2.9}$$

Подставим (2.9) в (2.7); для P_ν, Q_ν, R_ν ($\nu = 0, 1, 2$) получаем системы

$$\begin{aligned} a_{11}P_0 + a_{12}Q_0 + a_{13}R_0 &= F_0 \\ b_{11}P_0 + b_{12}Q_0 + b_{13}R_0 &= G_0 \\ c_{11}P_0 + c_{12}Q_0 + c_{13}R_0 &= H_0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - r_1^2) P_1 + a_{12}Q_1 + a_{13}R_1 &= -2\delta_1 F_1 \\ b_{11}P_1 + (b_{12} - br_1^2) Q_1 + (b_{13} - ar_1^2) R_1 &= -2\delta_1 G_1 \\ c_{11}P_1 + (c_{12} - br_1^2) Q_1 + (c_{13} - l_1 r_1^2) R_1 &= -2\delta_1 H_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - 4r_1^2) P_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}R_2 &= F_2 \\ b_{11}P_2 + (b_{12} - 4br_1^2) Q_2 + (b_{13} - 4ar_1^2) R_2 &= G_2 \\ c_{11}P_2 + (c_{12} - 4br_1^2) Q_2 + (c_{13} - 4l_1 r_1^2) R_2 &= H_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Таким образом, задача сводится к определению условий, при которых эти системы могут быть решены относительно P_ν, Q_ν, R_ν.

Так как 0 и $\pm 2ir_1$ не являются корнями уравнения (1.11), то системы (2.10) и (2.12) имеют единственное решение соответственно для P_0, Q_0, R_0 и P_2, Q_2, R_2.

Характеристическое уравнение определителя системы (2.11) совпадает в точности с уравнением (1.11), для которого $r = \pm ir_1$, будет корнем. Теперь очевидно, что при $\delta_1 = 0$ система (2.11) имеет решение $Q_1 = k_1 P_1$, $R_1 = k_2 P_1$. Таким образом

$$\begin{aligned} \xi_2 &= P_0 + P_1' \cos r_1\tau + D_1 \sin r_1\tau + P_2 \cos 2r_1\tau \\ \varphi_2 &= Q_0 + Q_1' \cos r_1\tau + k_1 D_1 \sin r_1\tau + Q_2 \cos 2r_1\tau \\ \psi_2 &= R_0 + R_1' \cos r_1\tau + k_2 D_1 \sin r_1\tau + R_2 \cos 2r_1\tau \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$P_1' = P_1 + C_1, \qquad Q_1' = Q_1 + k_1 C_1, \qquad R_1' = R_1 + k_2 C_1$$

Непосредственно из условия (2.5) следует, что $D_1 = 0$, поэтому можно написать

$$\xi_2 = P_0 + P_1' \cos r_1\tau + P_2 \cos 2r_1\tau, \qquad \varphi_2 = Q_0 + Q_1' \cos r_1\tau + Q_2 \cos 2r_1\tau$$
$$\psi_2 = R_0 + R_1' \cos r_1\tau + R_2 \cos 2r_1\tau \tag{2.14}$$

Постоянные P_1', Q_1', R_1', а также δ_2 определяются из условий периодичности функций ξ_3, φ_3, ψ_3, которые не приводятся из-за их громоздкости.

Интересно отметить, что коэффициенты при степенях λ в рядах (2.4), представляют собой частные решения соответствующих систем.

Периодические решения системы (1.7) выражаются приближенно следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda \cos r_1\tau + \lambda^2 (P_0 + P_1' \cos r_1\tau + P_2 \cos 2r_1\tau) + \ldots \\ \varphi &= \lambda k_1 \cos r_1\tau + \lambda^2 (Q_0 + Q_1' \cos r_1\lambda + Q_2 \cos 2r_1\tau) + \ldots \\ \psi &= \lambda k_2 \cos r_1\tau + \lambda^2 (R_0 + R_1' \cos r_1\tau + R_2 \cos 2r_1\tau) + \ldots \end{aligned} \tag{2.15}$$

а период движения

$$T_1 = \frac{2\pi}{r_1} (1 + \delta_2\lambda^2 + \ldots)$$

Сила натяжения K нити маятника имеет вид

$$K = c(\rho - l)$$

или, учитывая (2.15),

$$K = c\,[b - l + \lambda \cos r_1\tau + \lambda^2 (P_0 + P_1' \cos r_1\tau + P_2 \cos 2r_1\tau) + \ldots]$$

Таким же образом можно установить, что и корням $\pm ir_2$, $\pm ir_3$, соответствуют периодические решения.

Поступила 12 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Брадистилов Г., Бояджиев Г. Периодични и асимптотични движения на последователно свързани математични махала с еластични нишки. Год. на МЕИ, 1961, т. X, кн. 1.
2. Писарев А. М. Релативни периодични движения на математично еластично махало в равномерно въртяща се вертикална равнина. Год. на МЕИ, 1961, т. X, кн. 1.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.