ОДНО РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

П. В. Харламов (Новосибирск)

§ 1. Если указанное тело находится под действием силы тяжести и несет на себе вращающиеся массы (маховик или жидкость, циркулирующую в многосвязных полостях), то его движение описывается уравнениями [1]

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad \left(\begin{matrix}1\,2\,3\\ ABC\\ pqr\end{matrix}\right) \tag{1.2}$$

Здесь e_1, e_2, e_3 — орт луча, идущего из неподвижной точки через центр тяжести системы; γ_1, γ_2, γ_3 — вектор, имеющий направление силы тяжести и равный по величине произведению веса тела на длину отрезка, соединяющего центр тяжести с неподвижной точкой; λ_1, λ_2, λ_3 — постоянные, характеризующие циклические движения; остальные обозначения — обычные [1].

Известны интегралы уравнений (1.1), (1.2)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3) = 2E \tag{1.3}$$

$$(Ap + \lambda_1)\,\gamma_1 + (Bq + \lambda_2)\,\gamma_2 + (Cr + \lambda_3)\,\gamma_3 = k \tag{1.4}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \Gamma^2 \tag{1.5}$$

Распределение массы в теле и внутренние циклические движения характеризуют девять параметров A, B, C, Γ, λ_1, λ_2, λ_3 и две из трех величин e_1, e_2, e_3, связанных соотношением

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{1.6}$$

Общее решение, содержащее 15 независимых параметров (здесь приняты во внимание шесть параметров, характеризующих начальные условия), неизвестно, поэтому общность каждого частного решения будем определять числом сохраненных в нем независимых параметров. Н. Е. Жуковский [1] указал решение уравнений (1.1), стеснив параметры системы тремя условиями, а именно, он положил центр тяжести совпадающим с точкой опоры. Его решение содержит, следовательно, 12 независимых параметров. При трех дополнительных условиях $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ из решения Жуковского следует решение Эйлера, содержащее 9 параметров.

При пяти условиях: $B = C$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $e_2 = e_3 = 0$ получаем из (1.1), (1.2) решение Лагранжа, содержащее 10 параметров.

Недавно Л. Н. Сретенский указал еще два решения [2,3]. Первое решение Сретенского обобщает решение Горячева—Чаплыгина и содержит 8 параметров, второе, обобщающее решение Гесса, содержит 11 параметров. В настоящей работе дано решение рассматриваемой задачи, содержащее 10 независимых параметров.

§ 2. Пусть центр тяжести находится в одной из главных плоскостей эллипсоида измененных моментов инерции $e_2 = 0$; тогда вследствие (1.)

$$e_1 = \cos\alpha, \qquad e_3 = \sin\alpha \tag{2.1}$$

Оставляя параметр λ_2 произвольным (индекс 2 в дальнейшем опущен), подчиним λ_1, λ_3 условию

$$(2B - C)\,\lambda_1 \sin\alpha = (2B - A)\,\lambda_3 \cos\alpha \tag{2.2}$$

Посредством нового параметра ν это условие представим в виде

$$\lambda_1 = (2B - A)\,\nu\cos\alpha, \qquad \lambda_3 = (2B - C)\,\nu\sin\alpha \tag{2.3}$$

Будем искать решение, у которого две из компонент угловой скорости постоянны: $p = p_0$, $r = r_0$. При этом первое и третье уравнения (1.1) устанавливают зависимость γ_2 от q, если

$$p_0 = \nu\cos\alpha, \qquad r_0 = \nu\sin\alpha \tag{2.4}$$

и эта зависимость такова

$$\gamma_2 = \nu\,(\lambda - Bq) \tag{2.5}$$

Вследствие (2.1) — (2.5) интегралы (1.3), (1.5) дают

$$\gamma_1 = (H + {}^1/_2Bq^2)\cos\alpha - \sqrt{\Gamma^2 - (H + {}^1/_2Bq^2)^2 - \nu^2(\lambda - Bq)^2}\sin\alpha \tag{2.6}$$
$$\gamma_3 = (H + {}^1/_2Bq^2)\sin\alpha + \sqrt{\Gamma^2 - (H + {}^1/_2Bq^2)^2 - \nu^2(\lambda - Bq)^2}\cos\alpha$$
$$H = {}^1/_2\nu^2(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha) - E$$

Второе уравнение (1.1) при подстановке в него выражений (2.1), (2.3), (2.4), (2.6) определяет q как эллиптическую функцию времени

$$t = -B\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{\Gamma^2 - (H + {}^1/_2Bq^2)^2 - \nu^2(\lambda - Bq)^2}} \tag{2.7}$$

Найденные значения удовлетворяют уравнениям (1.2), а при подстановке в (1.4) определяют константу $k = \nu(BH + \lambda^2)$.

Углы нутации и собственного вращения находятся из формул

$$\gamma_1 = \Gamma\sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma_2 = \Gamma\cos\theta, \qquad \gamma_3 = \Gamma\sin\theta\sin\varphi$$

Для угла прецессии имеем

$$\frac{d\psi}{dt} = \Gamma\frac{p\gamma_1 + r\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}, \qquad \psi = \psi_0 + \Gamma\int_0^t\frac{H + {}^1/_2Bq^2(\tau)}{\Gamma^2 - \nu^2[\lambda - Bq(\tau)]^2}d\tau$$

Таким образом, в найденном решении сохранены независимые параметры A, B, C, Γ, α, λ, ν, H, q_0, ψ_0.

Частный случай полученного решения при условии $\alpha = 0$ указан в работе [4].

При условиях $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ из найденного решения следуют два известных решения задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку.

1°. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{при } \nu \neq 0 \tag{2.8}$$

Из (2.3) заключаем, что эти условия выполнены, если

$$\alpha = 0, \qquad A = 2B \tag{2.9}$$

При условиях (2.8), (2.9) из (2.4) — (2.7) находим

$$p = \nu, \qquad r = 0, \qquad \gamma_1 = H + \frac{B}{2}q^2, \qquad \gamma_2 = -B\nu q$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\Gamma^2 - \nu^2B^2q^2 - (H + {}^1/_2Bq^2)^2}, \qquad t = -B\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{\Gamma^2 - \nu^2B^2q^2 - (H + {}^1/_2Bq^2)^2}}$$

что совпадает с решением Бобылева [5] — Стеклова [6]. Последнее содержит семь независимых параметров.

2°. Пусть $\nu = 0$, тогда из (2.3), (2.4) и (2.5)

$$p = r = 0, \qquad \gamma_2 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \tag{2.10}$$

т. е. ось вращения неподвижна и горизонтальна. Из (2.8), (2.9) и (2.10) имеем

$$\theta = {}^1/_2\pi, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \gamma_1 = \Gamma\cos\varphi, \qquad \gamma_3 = \Gamma\sin\varphi$$

Одно из кинематических уравнений Эйлера дает $q = d\varphi / dt$. Подставив эти значения во второе уравнение (1.1), получаем случай физического маятника.

Поступила 4 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Изв. Моск. о-ва испытателей природы, № 2, 1886, Полное собр. соч., т. III, ОНТИ, 1936.
2. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
3. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. Вестн. Моск. ун-та, 1963, № 3.
4. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 4.
5. Бобылев Д. Н. Об одном частном решении дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естеств., 1896, т. 8, вып. 2.
6. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естеств., 1896, т. 8, вып. 2.