ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ СПУТНИКА

Ф. Л. Черноусько (Москва)

Рассматривается движение твердого тела (спутника) в поле неподвижного притягивающего центра. Выводятся достаточные условия устойчивости регулярной прецессии спутника, которые сравниваются с необходимыми условиями.

С точностью до членов порядка l^2/R^2 (l — характерный линейный размер спутника, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор его центра масс, проведенный из центра притяжения) можно считать, что движение центра масс спутника не зависит от относительного движения и происходит, следовательно, по законам Кеплера. Пусть спутник обладает динамической симметрией, а A, C — его главные центральные моменты инерции (экваториальный и осевой соответственно). Момент гравитационных сил относительно центра масс спутника с точностью до членов высшего порядка малости по l/R равен [1]

$$\mathbf{L} = 3\mu R^{-5} (C - A) (\mathbf{Rz}) (\mathbf{R} \times \mathbf{z}) \qquad (1)$$

Здесь μ — гравитационная постоянная, $\mathbf{z}$ — орт оси динамической симметрии спутника. Найдем условия, при которых спутник может совершать регулярную прецессию. Момент внешних сил при этом должен быть равен

$$\mathbf{L} = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{z}) \, [C\Omega + (C - A) \, \omega_1 \cos\theta] \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_1$ — постоянный вектор угловой скорости прецессии, Ω — угловая скорость собственного вращения, а θ — угол нутации. Сравнивая (1) и (2), найдем, что если $L \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{z}$ компланарны. Из кинематических свойств кеплерова движения и регулярной прецессии следует, что это возможно лишь на круговой орбите, причем $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_0$ ($\boldsymbol{\omega}_0$ — вектор угловой скорости орбитального движения, $\omega_0^2 = \mu R^{-3}$). Если же $L = 0$, то векторы $\mathbf{R}$, $\mathbf{z}$ все время либо коллинеарны, либо ортогональны (тривиальный случай $A = C$ не рассматривается). При условии регулярной прецессии это возможно также лишь на круговой орбите и при $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_0$. Поэтому в дальнейшем орбиту считаем круговой.

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы орта $\mathbf{z}$ с вектором скорости центра масс спутника, с нормалью к плоскости орбиты ($\boldsymbol{\omega}_0$) и радиусом-вектором $\mathbf{R}$, соответственно. Очевидно

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad (3)$$

Кроме того, $\beta = \cos\theta$, причем, не нарушая общности, считаем $\beta \geqslant 0$ (в противном случае изменим направление орта $\mathbf{z}$ на противоположное). Приравнивая (1) и (2) при условии $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_0$, найдем возможные режимы регулярной прецессии, которые удобно представить в виде трех однопараметрических семейств

$$\theta = 0, \quad \alpha = \gamma = 0, \quad \beta = 1, \quad \Omega = \Omega_0 \qquad (4)$$

$$\theta = \theta_0 \neq 0, \quad \gamma = 0, \quad \beta = \cos\theta_0, \quad \Omega = (A - C) \, C^{-1}\omega_0 \cos\theta_0 \qquad (5)$$

$$\theta = \theta_0 \neq 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \cos\theta_0, \quad \Omega = 4 \, (A - C) \, C^{-1}\omega_0 \cos\theta_0 \qquad (6)$$

Параметром в (4) служит Ω_0, а в (5) и (6) — угол θ_0, лежащий, по допущению ($\beta \geqslant 0$), в первой четверти. Случай (4) — это равномерное вращение в плоскости орбиты, в случае (5) ось спутника $\mathbf{z}$ перпендикулярна радиусу-вектору $\mathbf{R}$, а в случае (6) — вектору скорости центра масс, причем $L = 0$ в случаях (4), (5). Решения (4) —(6) получены другим способом в работах В. Т. Кондударя и Г. Н. Дубошина (см., например, [2]).

Найдем достаточные условия устойчивости движений (4) — (6), следуя методу Н. Г. Четаева. Первый интеграл уравнений относительного движения спутника на круговой орбите [1] в случае динамической симметрии имеет вид

$$A\,(p^2 + q^2) + Cr^2 + 3\omega_0^2\,(C - A)\,\gamma^2 + \omega_0^2\,(A - C)\,\beta^2 = h$$

Здесь r — проекция относительной угловой скорости спутника $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0$ ($\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость) на ось $\mathbf{z}$, а p, q — ее проекции на любые два взаимно перпендикулярных направления в экваториальной плоскости спутника. Кроме того, из-за условия динамической симметрии имеем первый интеграл: $r + \omega_0\beta = r_0$. Будем подбирать постоянные k_1, k_2 так, чтобы первый интеграл: $V = h + k_1 r_0 + k_2 r_0^2$ имел строгий минимум при значениях своих аргументов, соответствующих одному из движений (4) — (6). Заметим, что для всех этих движений $p = q = 0$, $r = \Omega$.

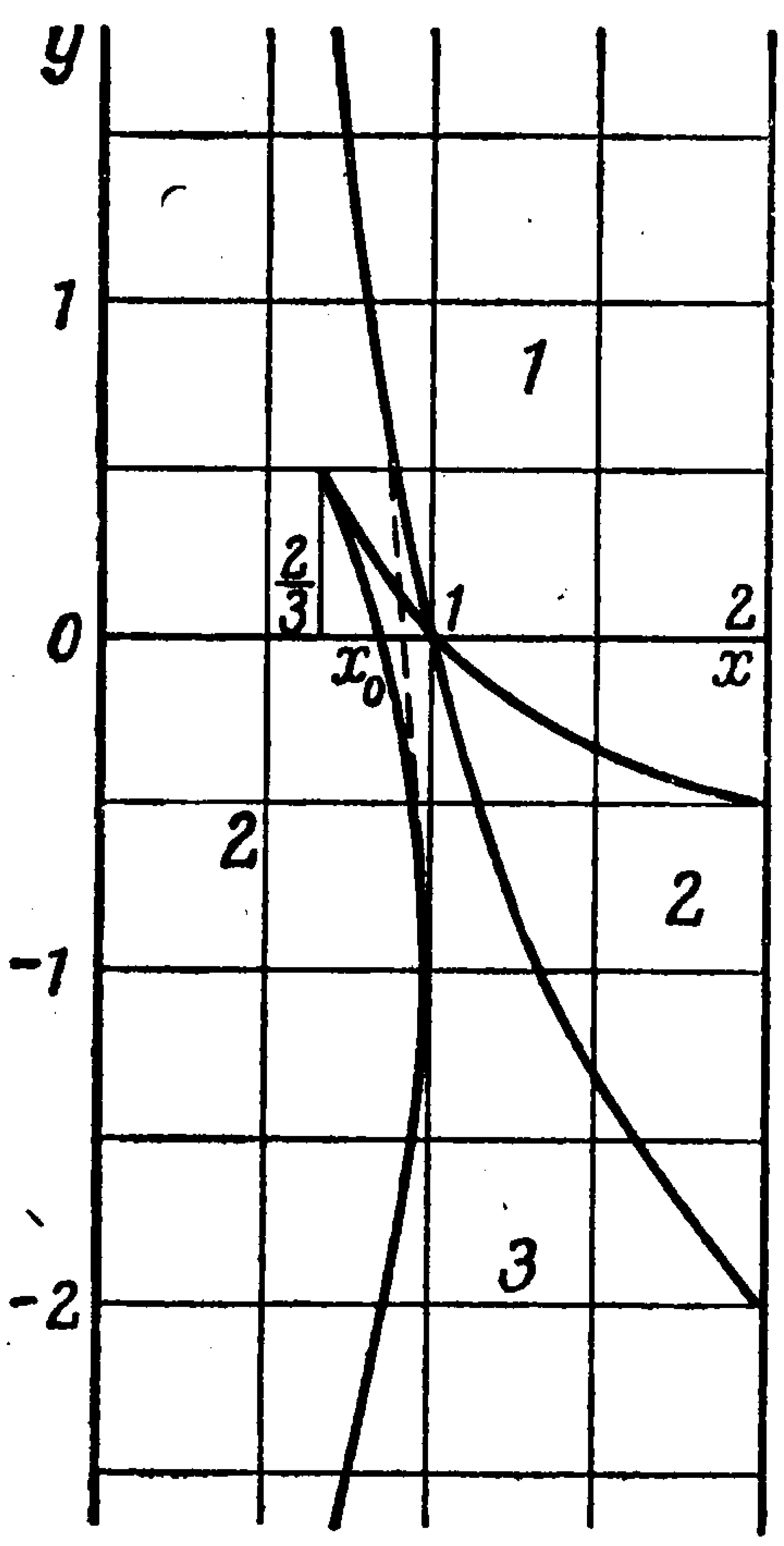
Рассмотрим сначала в качестве невозмущенного движение (4) и положим в возмущенном движении $p = u_1$, $q = u_2$, $r = \Omega_0 + u_3$, $\alpha = u_4$, $\gamma = u_5$, а β исключим при помощи (3). Тогда, как легко убедиться, первый интеграл $V_1 = h - 2C\Omega_0 r_0$, рассматриваемый как функция переменных u_i, имеет строгий минимум в точке $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), если одновременно

$$C\Omega_0 + \omega_0 (C - A) > 0, \qquad C\Omega_0 + 4\omega_0 (C - A) > 0$$

Отсюда, в силу известной теоремы об устойчивости движения, следует, что для устойчивости движения (4) достаточно

$$\Omega_0 > (A - C)\omega_0 / C \quad \text{при } A \leqslant C \tag{7}$$

$$\Omega_0 > 4(A - C)\omega_0 / C \quad \text{при } A \geqslant C$$



Фиг. 1

Рассмотрим теперь движение (5) в качестве невозмущенного и положим

$$p = u_1, \qquad q = u_2, \qquad r = (AC^{-1} - 1)\omega_0 \cos\theta_0 + u_3$$

$$\beta = \cos\theta_0 + u_4, \qquad \gamma = u_5$$

а α исключим при помощи (3). В данном случае функция

$$V_2 = h - 2A\omega_0 r_0 \cos\theta_0 + C^2A^{-1}r_0^2$$

будет, с точностью до постоянного слагаемого, положительно-определенной квадратичной формой от u_i при условии $A < C$, которое будет достаточным для устойчивости движения (5).

Наконец, для исследования устойчивости движения (6) полагаем

$$p = u_1, \quad q = u_2, \quad r = 4(AC^{-1} - 1)\omega_0 \cos\theta_0 + u_3$$

$$\alpha = u_4, \quad \beta = \cos\theta_0 + u_5$$

и исключаем γ при помощи (3). Первый интеграл

$$V_3 = h - 8(A - C)\omega_0 r_0 \cos\theta_0$$

оказывается, с точностью до постоянного слагаемого, положительно-определенной квадратичной формой от u_i при $A > C$. Это неравенство является достаточным условием устойчивости движения (6).

Сопоставим найденные достаточные условия с необходимыми условиями устойчивости движений (4) — (6). Эти условия получатся, если линеаризовать уравнения движения около решений (4) — (6) и потребовать, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения системы линейного приближения были неположительны.

Исследование устойчивости движения (4) приводит к необходимым условиям

$$a \geqslant 2\sqrt{b}, \qquad b \geqslant 0 \tag{8}$$

где

$$a = (xy + x - 2)^2 + (xy + x - 1) + (xy + 4x - 4)$$

$$b = (xy + x - 1)(xy + 4x - 4), \qquad x = C / A, \qquad y = \Omega_0 / \omega_0 \tag{9}$$

Заметим, что $x \leqslant 2$ для любого динамически симметричного твердого тела. Условия (8) — (9) в несколько иных обозначениях выведены в работе У. Т. Томсона [3]. Подставляя (9) в (8), нетрудно упростить эти условия. При $x \geqslant 1$ для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось одно из двух неравенств

$$y \geqslant x^{-1} - 1, \qquad y \leqslant 4(x^{-1} - 1) \tag{10}$$

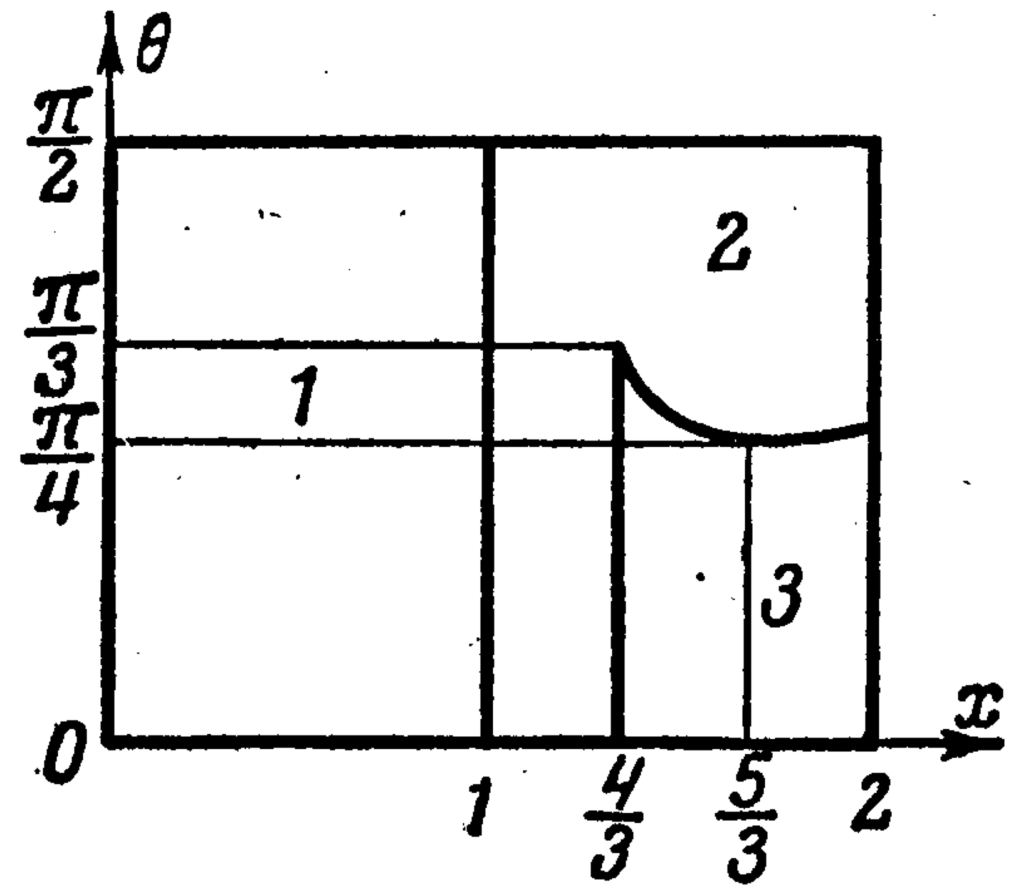
При $x \leqslant 1$ необходимо либо

$$y \geqslant 4\,(x^{-1} - 1) \tag{11}$$

либо одновременное выполнение двух условий

$$y \leqslant x^{-1} - 1, \qquad \sqrt{1 - x - xy} + \sqrt{4 - 4x - xy} \leqslant 2 - x - xy \tag{12}$$

Достаточные условия (7) лишь строгим знаком неравенства отличаются от первого условия (10) и условия (11). На фиг. 1 изображены области, определяемые неравенствами (10) — (12), в плоскости параметров x, y. В области *1* заведомо имеется устойчивость (выполнены достаточные условия), в областях *2* — неустойчивость (нарушены необходимые условия), а в области *3* выполнены лишь необходимые условия устойчивости. Границы областей *1*, *2* и *2*, *3* имеют асимптоту $x = 0$, а граница областей *2*, *3* при $x < 1$ пересекает ось x при $x = x_0 = (3\sqrt{5} - 5) / 2 \approx 0.854$. Отметим, что в области *3* есть точки ($y \to -\infty$, а также прямая $x = 1$), соответствующие заведомо устойчивым режимам движения.



Фиг. 2

В работе [3] условия типа (10) — (12) отсутствуют, а приведенный в ней график областей устойчивости неверен, особенно вблизи $x = 1$ (пунктирная кривая фиг. 1), на нем нет области неустойчивости при $x > 1$.

Необходимые условия устойчивости движений (5) — (6) получены в работе Г. Н. Дубошина [2]. Для устойчивости движения (5) необходимо $A \leqslant C$. Найденное выше достаточное условие $A < C$ отличается от необходимого лишь строгим знаком неравенства.

Для устойчивости движения (6) необходимо либо $A \geqslant C$ ($x \leqslant 1$), либо одновременное выполнение двух условий [2]

$$x \geqslant \frac{4}{3}, \qquad \cos^2\theta_0 \geqslant \frac{18x^2 - 27x + 8 + 2\,(3x - 2)\sqrt{(3x - 1)\,(3x - 4)}}{27x^2\,(x - 1)} \tag{13}$$

где x определено формулой (9). На фиг. 2 для движения (6) даны области заведомой устойчивости *1*, неустойчивости *2* и область *3* выполнения необходимых условий (13).

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\Omega_0 = -\omega_0$ ($y = -1$) решение (4) описывает поступательное движение спутника, ось динамической симметрии z которого перпендикулярна плоскости орбиты (Ω_0 — относительная угловая скорость). Из полученных выше условий следует, что это движение может быть устойчивым лишь для спутника, у которого $1 \leqslant C / A \leqslant 4/3$.

При $\Omega_0 = 0$ ($y = 0$) движение (4) представляет собой положение относительного равновесия спутника на круговой орбите, при котором его ось z перпендикулярна плоскости орбиты. Условия (7), (12) показывают, что это положение равновесия устойчиво при $A < C$ и неустойчиво при $C / A < x_0 \approx 0.854$.

При $\theta_0 = \pi / 2$ движения (5), (6) переходят в два других положения относительного равновесия спутника на круговой орбите: ось z направлена по касательной к орбите или по радиусу-вектору $\mathbf{R}$. Из полученных условий следует, что ориентация оси спутника z по касательной к орбите устойчива при $A < C$ и неустойчива при $A > C$, а ориентация ее по радиусу-вектору устойчива при $A > C$ и неустойчива при $A < C$.

Поступила 15 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. О либрации спутника. Сб. «Искусственные спутники Земли», Изд. АН СССР, 1959, вып. 3.
2. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел. Бюлл. Ин-та теор. астрономии. 1960, т. VII, вып. 7.
3. Thomson W. T. Spin Stabilization of Attitude Against Gravity Torque. J. Astronaut. Sci., 1962, v. IX, No. 1.