

Предполагается, что на жидкость с единичной плотностью действует единичный вектор массовых сил. Контур свободной поверхности Σ пересекается с плоскостью xz в точке $(x^0, 0, z^0)$.

Краевая задача для конуса (фиг. 1) в сферической системе координат R, θ, η в силу (2) и (3) запишется следующим образом:

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial R} \right]_{R=1} = \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial R} \right]_{R=R_1} = -\sigma_n^2 [\varphi_n]_{R=R_1} \quad (6)$$

$$\Delta \Psi = 0, \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right]_{R=1, R_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0} = -R^2 \sin \eta \quad (7)$$

При этом граничное условие постоянства давления на возмущенной свободной поверхности Σ перенесено на поверхность сферического сегмента $R = R_1, 0 \leq \theta < \theta_0$, что возможно, пока высота последнего сравнима с высотой волны.

Применяя метод разделения переменных, получим решение краевой задачи (6)

$$\varphi_n = X_n(R) Y_n(\theta) \sin \eta, \quad Y_n = \frac{P_\nu(\theta)}{P_\nu(\theta_0)}, \quad X_n = \frac{R_1^{\nu+2} [(\nu+1)R^{2\nu+1} + \nu]}{R^{\nu+1} \nu (\nu+1) (R_1^{2\nu+1} - 1)} \quad (8)$$

Здесь ν — n -й корень уравнения $dP_\nu(\theta_0)/d\theta = 0$, а $P_\nu(\theta)$ — первая присоединенная функция Лежандра первого рода ν -го порядка.

Функцию Ψ можно представить в виде

$$\Psi = -R^2 \theta \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (2R_1 X_n + 2X_n^*) Y_n \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(R) Y_n \sin \eta$$

которая после некоторых преобразований запишется следующим образом:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_0}{(\nu+3)(\nu-2) N_n^2} (2R_1 X_n + 2X_n^* - R^2) Y_n \sin \eta \quad (9)$$

$$N_n^2 = \frac{\gamma_n \sin \theta_0}{(2\nu+1)}, \quad \gamma_n = -\frac{d}{d\nu} [Y_n'(\theta_0)], \quad X_n^* = -\frac{(\nu+1)R^{2\nu+1} + \nu R_1^{2\nu+1}}{R^{\nu+1} \nu (\nu+1) (R_1^{2\nu+1} - 1)}$$

Коэффициенты (5) системы уравнений движения (4) конической полости (фиг. 1) с жидкостью примут вид

$$\lambda_n = \frac{\pi R_1^3 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{(\nu+2)(\nu-1)} \left[\frac{(\nu+1)R_1^{2\nu+1} + \nu}{\nu(\nu+1)(R_1^{2\nu+1} - 1)} - 1 \right]$$

$$\lambda_{0n} = \frac{\pi R_1^4 \sin \theta_0}{(\nu+3)(\nu-2)} \left[1 - 2 \frac{(\nu+1)R_1^{2\nu+1} - (2\nu+1)R_1^{\nu-2} + \nu}{\nu(\nu+1)(R_1^{2\nu+1} - 1)} \right]$$

$$\mu_n = \frac{\pi R_1^3 N_n^2 [(\nu+1)R_1^{2\nu+1} + \nu]}{\nu(\nu+1)(R_1^{2\nu+1} - 1)}, \quad \sigma_n^2 = \frac{\nu(\nu+1)(1 - R_1^{2\nu+1})}{R_1 [(\nu+1)R_1^{2\nu+1} + \nu]} \quad (10)$$

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \sin^2 \theta_0}{(\nu+3)(\nu-2) N_n^2} \left\{ \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{(\nu+3)(\nu-2)} \right] (1 - R_1^5) - \right.$$

$$\left. - 4 \frac{(\nu+1) + \nu R_1^{2\nu+1} + R_1^5 [(\nu+1)R_1^{2\nu+1} + \nu] - 2(2\nu+1)R_1^{\nu+3}}{(\nu+3)(\nu-2)\nu(\nu+1)(R_1^{2\nu+1} - 1)} \right\}$$

Аналогично можно получить коэффициенты для конуса с вершиной, повернутой вниз. В качестве примера приведем выражение коэффициентов для острого неусеченного конического днища (фиг. 2)

$$\lambda_n = \frac{\pi \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\nu(\nu+2)}, \quad \lambda_{0n} = -\frac{\pi \sin \theta_0}{\nu(\nu+3)}, \quad \sigma_n^2 = \nu$$

$$\mu_n = \frac{\pi \gamma_n \sin \theta_0}{\nu(2\nu+1)}, \quad J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \sin \theta_0 (2\nu+1)(\nu+5)}{5\gamma_n \nu (\nu+3)^2} \quad (11)$$

Приведем значения первого корня $\nu(n=1)$ уравнения $Y_1'(\theta_0) = 0$ и соответствующие значения γ_1 для некоторых значений угла полураствора конуса θ_0 :

$\theta_0 =$	1°	3°	7°	11°	15°	20°	25°	30°
$\nu =$	105.0	34.67	14.59	9.128	6.584	4.843	3.806	3.120
$\gamma_1 =$	1.298	1.300	1.302	1.307	1.313	1.325	1.341	1.360

Из фиг. 1 видно хорошее совпадение экспериментальных безразмерных значений частот первого тона колебаний жидкости σ_1^2 в конусе ($\theta_0 = 11^\circ$) с теоретическими значениями (10) в зависимости от величины R_1 .

Полученные решения краевых задач (6) и (7) начинают давать значительное расхождение с практикой для тупых конусов, что объясняется нестрогим удовлетворением граничного условия на свободной поверхности.

Пользуясь вариационным методом [1], решение краевых задач (2) и (3) сведем к определению экстремума функционалов

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_Q (\text{grad } \varphi)^2 dQ - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_{\Sigma} \varphi^2 dS \quad (12)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_Q (\text{grad } F)^2 dQ - \int_{\Sigma} F z v_x dS - \int_S 2F z v_x dS, \quad F = \Psi + xz \quad (13)$$

Следуя методу Ритца, функции φ и F будем искать в виде последовательности линейных комбинаций координатных функций

$$\begin{aligned} \varphi &= a_1 \gamma_1 + \dots + a_k \gamma_k, \\ F &= c_1 \zeta_1 + \dots + c_k \zeta_k \quad (14) \end{aligned}$$

Для сходимости метода Ритца в качестве координатных функций следует взять полную по энергии систему линейно независимых функций.

Подставляя конечные суммы (14) в функционалы (12) и (13), приравнявая нулю частные производные функционалов по неопределенным коэффициентам a_m и c_m , получим для a_m однородную линейную систему алгебраических уравнений, а для c_m — неоднородную

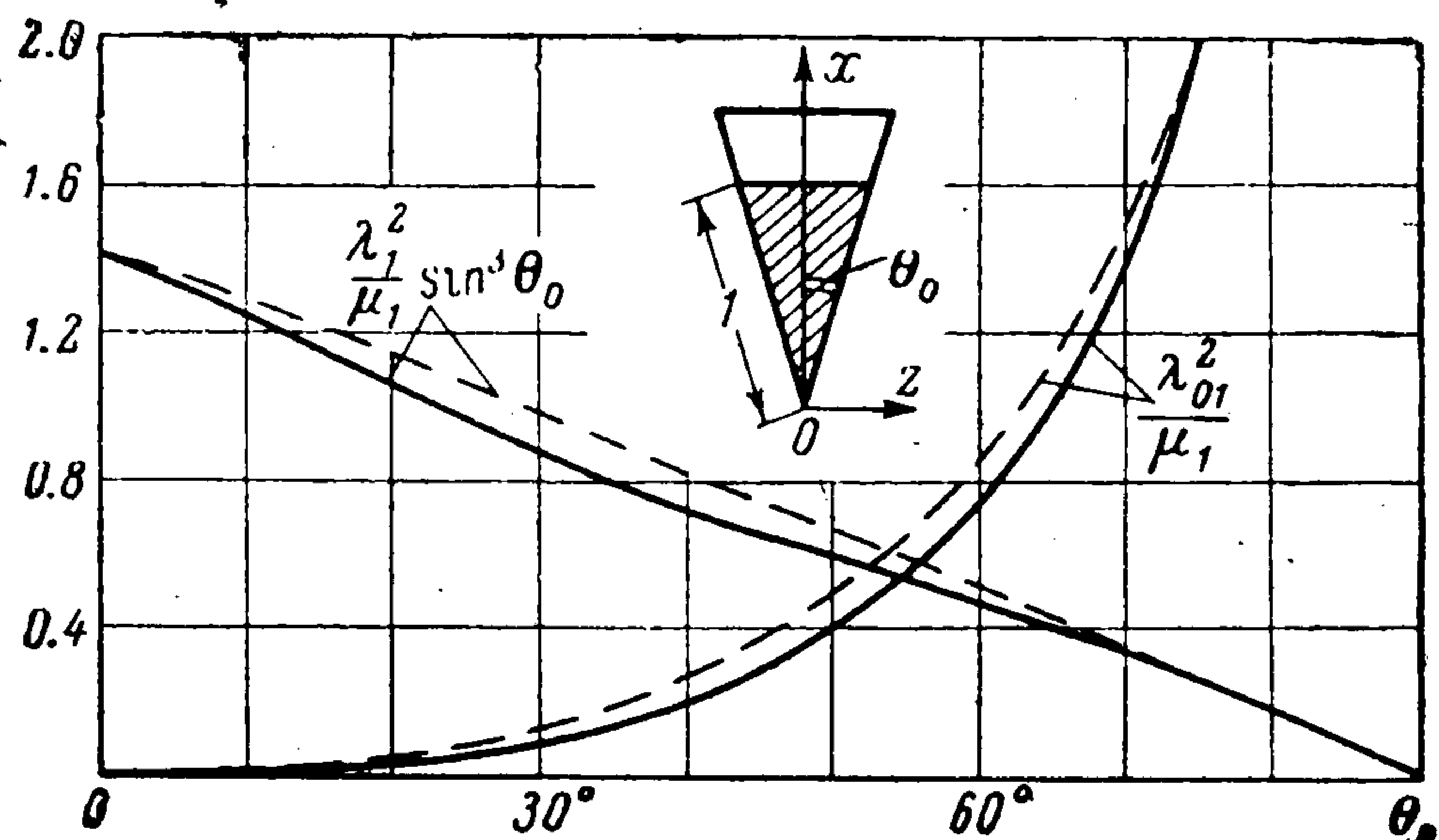
$$(A - \sigma^2 B) \cdot a = 0, \quad D \cdot c = \eta \quad (15)$$

Здесь A , B , D — симметричные квадратные матрицы k -го ранга, составленные из коэффициентов α_{mp} , β_{mp} , δ_{mp} , соответственно, а величины a , c , η представляют собой k -мерные векторы с компонентами a_m , c_m , η_m .

Для гармонических функций γ_m и ζ_m

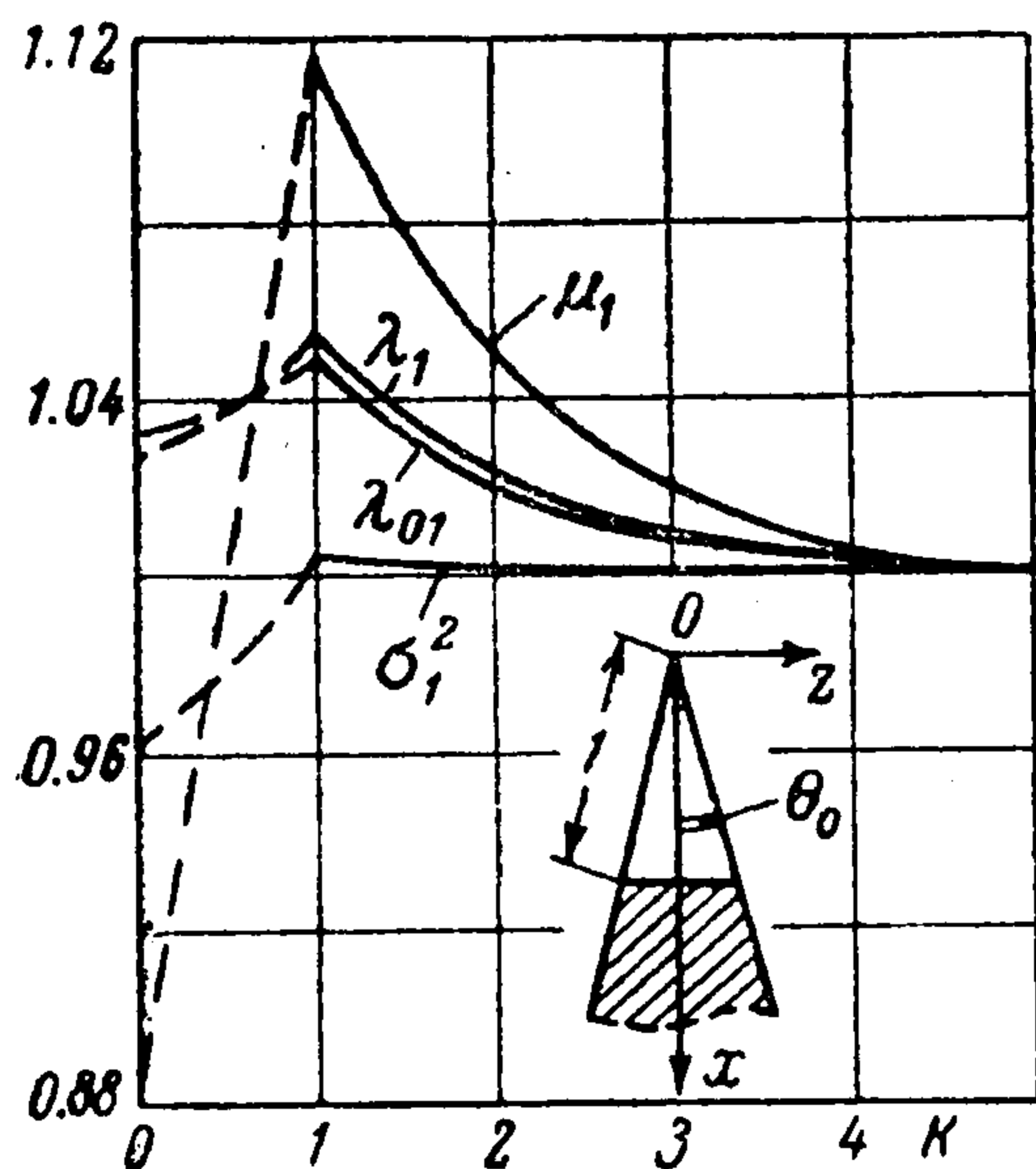
$$\begin{aligned} \alpha_{mp} = \alpha_{pm} &= \int_{S+\Sigma} \gamma_m \frac{\partial \gamma_p}{\partial \nu} dS, & \beta_{mp} = \beta_{pm} &= \int_{\Sigma} \gamma_m \gamma_p dS \\ \delta_{mp} = \delta_{pm} &= \int_{S+\Sigma} \zeta_m \frac{\partial \zeta_p}{\partial \nu} dS, & \eta_m &= \int_{\Sigma} \zeta_m z v_x dS + 2 \int_S \zeta_m z v_x dS \end{aligned} \quad (16)$$

С увеличением числа k членов суммы (14) n -е собственное значение σ_n^2 матрицы первой системы уравнений (15) сходится к значениям парциальной частоты n -го тона колебаний жидкости в полости, а функция φ_n (14), определяемая n -м собственным вектором матрицы (15), приближается к форме волны n -го тона.



Фиг. 2

Присоединенные массы колеблющейся в полости жидкости будут определяться следующими формулами:



Фиг. 3

ных приближениях метода Ритца для случая $\theta_0 = 11^\circ$. По оси абсцисс откладывается число k членов суммы в методе Ритца. По оси ординат откладывается отношение

любого из коэффициентов, k -го приближения, к соответствующему коэффициенту, принятому за точный. Число $k = 0$ соответствует формулам (10). Характер сходимости частоты σ_1^2 говорит об эффективности выбора базисной системы функций. На фиг. 2 даны не зависящие от способа выбора нормировки отношения коэффициентов λ_1^2/μ_1 и λ_{01}^2/μ_1 для конических днищ, определенные как по построенной выше базисной

системе функций (пунктирные), так и по цилиндрическим функциям, являющимся точными решениями краевых задач (2), (3) для описанного вокруг конуса цилиндра (сплошные). Значения σ_1^2 , определенные обоими способами, совпадают (кривая 1 на фиг. 4). С ними сравниваются частоты, определенные по формулам (11) (кривая 5), по формуле $\sigma_1^2 \sin \theta_0 = 1.1459 \operatorname{ctg} \theta_0$ (кривая 3) [1], а также частоты в цилиндре, описанном около конуса (кривая 6). Кривая 2 определена вариационным методом для конуса с вершиной, направленной вверх, а кривая 4 — по формуле (10). Экспериментальные точки получены Г. Н. Микишевым [2]. Все работы, связанные с программированием и расчетами на ЭВМ, были проведены Э. С. Мироновой.

Автор приносит благодарность Б. И. Рабиновичу за внимание к данной работе. Поступила 13 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawrence H. R., Wang C. J., Reddy V. B. Variational Solution of Fuel Sloshing Modes. Jet Propuls, Nov., 1958, vol. 28, No. 11.
2. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкости в сосудах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.

$$\lambda_n = \sum_{m=1}^k a_m \lambda_m^*, \quad \mu_n = (A \cdot a, a) = \sigma_n^2 (B \cdot a, a)$$

$$\lambda_{0n} = \sum_{m=1}^k a_m \lambda_{0m}^*, \quad J = J_0 + \sum_{m=1}^k c_m (\eta_m - 2\tau_m)$$

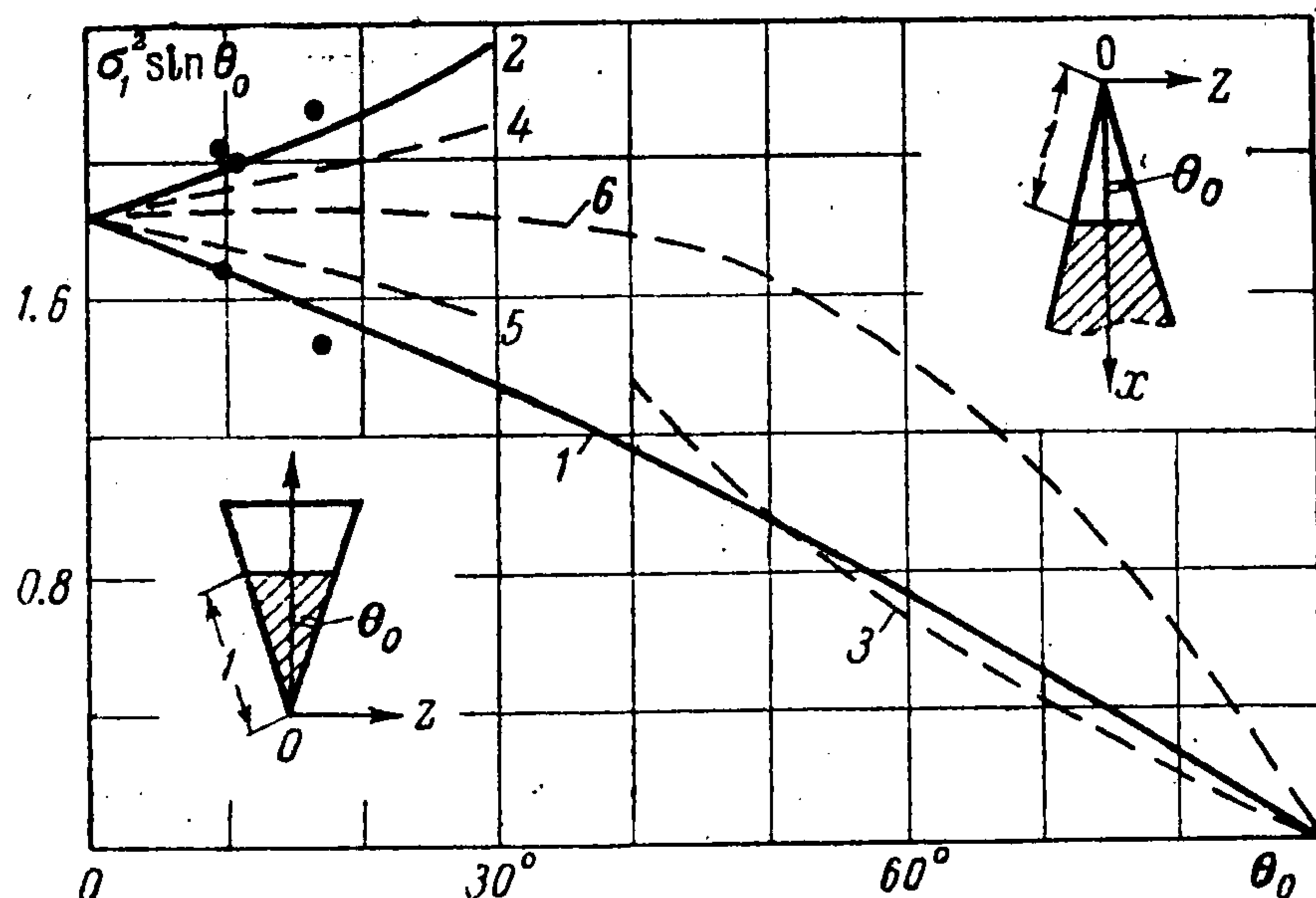
где

$$\lambda_m^* = \int_S \gamma_m v_z dS, \quad \lambda_{0m}^* = \int_S \gamma_m (z v_x - x v_z) dS$$

$$J_0 = \int_Q (x^2 + z^2) dQ, \quad \tau_m = \int_{S+\Sigma} \zeta_m (z v_x + x v_z) dS$$

В качестве системы координатных функций γ_m и ζ_m для метода Ритца воспользуемся построенной полной системой функций (8), (9).

Фиг. 3 иллюстрирует характер сходимости присоединенных масс и частот при последователь-



Фиг. 4