Прикладная математика и механика. Т. 28, 1964

О КИНЕМАТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. И. Киргетов

(Москва)

Под термином «кинематически управляемые системы» понимаются механические системы, связи которых зависят от некоторых параметров, которым в процессе движения системы можно произвольно придавать те или иные значения. Задавая подходящим образом программу изменения этих параметров в зависимости от текущего состояния системы и времени, можно придавать движению системы желаемые свойства.

По своей природе кинематически управляемые системы тесно связаны с сервосистемами Бегена—Аппеля [1]. Аппель отмечает своеобразие сервосистем сравнительно с системами, обычно рассматриваемыми в механике. В настоящей работе развивается иной подход к таким системам. С самого начала они трактуются как управляемые системы. Вводится понятие параметрической связи (§ 1) как основного характеристического элемента кинематически управляемой системы; указываются соотношения для возможных перемещений системы (§ 2), проводится анализ корректности закона управления системой (§ 3); дается видоизменение принципа Гаусса для кинематически управляемых систем (§ 5). Индексы, используемые в работе, принимают следующие значения:

$$i = 1, 2,\ldots, 3n;\quad \rho, \pi = 1,2,\ldots, r;\quad \sigma,\tau = 1,2,\ldots, s;\quad \nu = 1,2,\ldots, k;\quad \xi = 1, 2,\ldots, r + s$$

1. Система n материальных точек движется относительно некоторой неподвижной декартовой системы координат. Обозначим через $m_1 = m_2 = m_3$, x_1, x_2, x_3 массу и координаты первой точки системы, через $m_4 = m_5 = m_6$, x_4, x_5, x_6 — массу и координаты второй точки, и т. д. Пусть какие-то не имеющие массы тела стесняют движение точек системы порождают голономныэ связи, уравнения которых пусть будут

$$f_\rho(x_1,\ldots, x_{3n}, \quad t) = 0 \tag{1.1}$$

Такие связи реализуются, если стесняющие систему тела свободно увлекаются последней или же их движение (деформация) задано наперед во времени. Допустим, однако, что среди стесняющих систему тел имеются такие, движение (деформация) которых зависит от параметров, которым в процессе движения системы можно произвольно придавать те или иные значения. Реализующиеся в этом случае связи будем называть связями, зависящими от параметров, или просто параметрическими связями. Парамеры, от которых они зависят, будем называть параметрами управления.

Пусть, например, материальное колечко свободно скользит по гладкому стержню, закрепленному шарнирно на одном своем конце. Если условия задачи позволяют в процессе движения колечка придавать углу отклонения стержня от вертикали произвольные значения, то связь, наложенная на точку, будет параметрической, а угол отклонения стержня от вертикали — параметром управления.

Обозначим через $p_1,\ldots,p_k$ параметры управления рассматриваемой механической системой и пусть уравнения ее параметрических связей будут

$$\varphi_s(x_1,\ldots,x_{3n},\ t,\ p_1,\ldots,\ p_k)=0 \qquad (1.2)$$

Как и (1.1), уравнения (1.2) получаются из условий сохранения контакта точек системы с ограничивающими телами. При фиксированных $t,\ p_1,\ldots,\ p_k$ уравнения (1.2) вместе с уравнениями (1.1) выражают геометрию связей системы.

В рассмотренном выше примере уравнение параметрической связи записывается $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\theta$, где θ — угол отклонения стержня от вертикали (параметр управления), x_1, x_2 — координаты колечка в системе координат с началом в шарнире и осью x_1, направленной по вертикали. Что касается геометрии связи, то в каждый момент это — прямая линия, проходящая через начало координат.

Уравнения параметрических связей (1.2) содержат параметры управления. Придавая последним в процессе движения системы определенные значения в зависимости от ее текущего состояния и времени, управляем системой. В данном случае управление будет кинематическим, так как осуществляется через связи системы. Управление системой может производиться и через силы. Тогда оно будет динамическим управлением. Выражение параметров управления системы через параметры ее состояния и время будем называть законом управления системой. Для рассматриваемой механической системы закон управления пусть будет

$$p_\nu = p_\nu\ (t, x_1,\ldots,\ x_{3n},\quad x_1',\ldots,\ x_{3n}') \qquad (1.3)$$

где $x_1',\ldots,x_{3n}'$—компоненты по осям координат скоростей точек системы.

Параметрические связи представляют собой обобщение обычных, зависящих от времени связей и, в частности, приводятся к ним, если закон управления системой зависит только от времени.

2. Связи системы будем считать идеальными, т. е. такими, что работа реакций связей системы на возможных перемещениях тождественно равна нулю. Возможные перемещения системы будем понимать в обычном для голономных систем смысле — как всевозможные бесконечно малые перемещения системы, производимые в каждый рассматриваемый момент в соответствии с геометрией связей системы. Обозначим через $R_1,\ldots,R_{3n}$ компоненты по осям координат реакций связей системы, через $\delta x_1,\ldots,\delta x_{3n}$ — компоненты возможного перемещения системы. Тогда условие идеальности связей запишется

$$\sum R_i\delta x_i = 0$$

Это равенство должно иметь место для всех возможных перемещений системы. Согласно закону Ньютона

$$R_i = m_i x_i'' - X_i$$

Здесь x_1'', x_2'', x_3'', X_1, X_2, X_3 — компоненты по осям координат действительного ускорения первой точки системы и силы, действующей на нее; x_4'', x_5'', x_6'', X_4, X_5, X_6 — компоненты действительного ускорения второй точки системы и силы, действующей на нее, и т. д. Поэтому

$$\sum (m_i x_i'' - X_i)\, \delta x_i = 0 \tag{2.1}$$

Таким образом, получено основное уравнение механики. В рассматриваемом случае действительных ускорений точек системы оно выполняется при всех возможных перемещениях системы. Тем самым установлено, что для управляемых механических систем имеет место принцип Даламбера—Лагранжа.

Получим уравнения движения рассматриваемой управляемой системы. Напишем прежде всего соотношения для возможных перемещений системы. Эти соотношения в силу принятого определения возможных перемещений имеют обычный вид

$$\sum \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\, \delta x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\, \delta x_i = 0 \tag{2.2}$$

Следует, однако, помнить, что при получении соотношений (2.2) величины $t, u_1, \ldots, u_k$ должны рассматриваться как постоянные; другими словами, дифференцирование в (2.2) производится лишь по явно входящим координатам.

Теперь обычными рассуждениями выводим из (2.1) и (2.2) уравнения

$$m_i x_i'' = X_i + \sum \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \sum \mu_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

где λ_ρ и μ_σ — неопределенные множители. Вместе с уравнениями связей (1.1) и (1.2) и уравнениями закона управления (1.3) уравнения (2.3) образуют полную систему уравнений, определяющую ускорения точек системы и неопределенные множители λ_ρ и μ_σ. Уравнения (2.3) представляют собой уравнения движения кинематически управляемой механической системы в форме уравнений Лагранжа с множителями.

Напишем, к примеру, уравнения движения колечка в рассмотренном примере. Учитывая, что колечко подчинено только параметрической связи

$$\varphi\ (x,\ y,\ \theta) = x_2 - x_1 \operatorname{tg} \theta = 0 \tag{2.4}$$

получаем из (2.3) искомые уравнения

$$m x_1'' = X_1 - \mu \operatorname{tg} \theta, \qquad x_2'' = X_2 + \mu$$

Эти уравнения следует рассматривать совместно с (2.4) и законом управления $\theta = \theta\ (t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')$.

Так же, как для систем с обычными связями, для системы с параметрическими связями можно сформулировать теорему о движении центра масс и теорему о моменте количества движения системы.

А. Если среди возможных перемещений системы имеется поступательное перемещение системы как твердого тела вдоль какого-либо неподвижного направления, то в этом направлении центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и на которую действует сила, равная сумме всех активных сил, действующих на систему.

Б. Если среди возможных перемещений системы имеется вращение системы как твердого тела вокруг некоторой неподвижной оси, то производная по времени от момента количества движения системы относительно этой оси равна моменту относительно этой же оси всех действующих на систему активных сил.

Доказательство этих теорем производится на основании соотношения (2.1) и ничем не отличается от их доказательства в случае систем с обычными связями.

Теорема о кинетической энергии для систем с параметрическими связями не имеет места. Движение управляемой системы происходит в общем случае с переменными значениями параметров управления. В этих условиях действительные перемещения системы не лежат среди ее возможных перемещений и, следовательно, нарушается формальное условие существования этой теоремы. По существу отсутствие теоремы кинетической энергии для систем с параметрическими связями объясняется тем, что кинетическая энергия такой системы изменяется не только в силу работы действующих на систему активных сил, но и в связи с принудительными действиями, которыми обусловлено управление системой.

3. Законы управления системой, с которыми ее движение возможно и однозначно, будем называть корректными. Требование корректности закона управления не является тривиальным. Приведем простые примеры некорректных законов управления.

Предположим, что материальная точка подчинена параметрическим связям

$$x_1 + x_2 = p_1, \qquad x_1 - x_2 = p_2 \tag{3.1}$$

где p_1 и p_2 — параметры управления. Зададим закон управления системой соотношениями

$$p_1 = x_3, \qquad p_2 = -2x_2 + x_3$$

в одном случае и соотношениями

$$p_1 = x_3, \qquad p_2 = -2x_2 + x_3 + 1$$

в другом. Уравнения (3.1) независимы. Уравнения же, получающиеся из них исключением параметров управления, в первом случае зависимы, во втором случае несовместны.

Более тонкое явление можно проиллюстрировать на рассматривавшемся выше примере колечка, свободно скользящего по гладкому стержню. Зададим закон управления стержнем соотношением

$$\theta = \arcsin \frac{x_2}{a}$$

где a — некоторая постоянная. Раскроем при помощи этого соотношения параметр управления в уравнении связи. Получим

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2$$

Колечко должно двигаться по окружности радиуса a. Но такое движение для колечка, вообще говоря, невозможно. Таким образом, взятый закон управления системой налагает на движение колечка условие, которое заведомо не может быть выполнено.

Найдем условие корректности закона управления. Оно, очевидно, состоит в том, чтобы система уравнений (2.3), (1.1), (1.2) и (1.3) определяла и притом единственным образом ускорения системы для каждого допустимого состояния системы. Уравнения (2.3) дают явные выражения для ускорений системы через силы и неопределенные множители. Поэтому условие корректности закона управления приводится к условию однозначного определения неопределенных множителей λ_ρ и μ_σ. Исключим при помощи уравнений (1.3) параметры управления из уравнений (1.1) и (1.2). Дифференцируя после этого уравнения (1.1) и (1.2) по времени, приходим к уравнениям

$$\sum A_{\xi i} x_i'' + A_\xi = 0 \tag{3.2}$$

для кинематически допустимых ускорений точек системы. Число этих уравнений равно числу уравнений (1.1) и (1.2) и, следовательно, равно числу множителей λ_ρ и μ_σ. Подставляя в соотношения (3.2) выражения для $x_1'', \ldots, x_{3n}''$ из уравнений (2.3), получим следующую систему для определения неопределенных множителей λ_ρ и μ_σ

$$\sum a_{\xi\rho}\lambda_\rho + \sum b_{\xi\sigma}\mu_\sigma + c_\xi = 0 \tag{3.3}$$

где

$$a_{\xi\rho} = \sum \frac{1}{m_i} A_{\xi i} \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}, \qquad b_{\xi\sigma} = \sum \frac{1}{m_i} A_{\xi i} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}, \qquad c_\xi = \sum \frac{1}{m_i} A_{\xi i} X_i + A_\xi \tag{3.4}$$

Чтобы система уравнений (3.3) была однозначно разрешимой и, следовательно, чтобы закон управления был корректным, определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots b_{11} & \ldots \\ a_{21} \ldots b_{21} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

должен быть отличен от нуля.

Для регулярности закона управления, в частности, необходимо, чтобы система уравнений (3.2) была линейно независимой.

В самом деле, если уравнения (3.2) зависимы, то найдутся множители $\varkappa_\xi$, не все равные нулю, такие, что будут выполняться равенства

$$\sum \varkappa_\xi A_{\xi i} = 0$$

Умножив эти равенства соответственно на $(1 / m_i)\, \partial f_\rho / \partial x_i$ и сложив их, получим с учетом обозначений (3.4)

$$\sum \varkappa_\xi a_{\xi\rho} = 0$$

Аналогично находим

$$\sum \varkappa_\xi b_{\xi\sigma} = 0$$

Таким образом, между элементами определителя Δ имеется линейная зависимость. Значит, $\Delta = 0$, и, следовательно, закон управления не корректен. Что и требовалось.

4. Чтобы выявить внутреннее содержание требования корректности, введем в рассмотрение метрическое пространство переменных x_i, метрику которого зададим в виде

$$ds^2 = \sum m_i dx_i^2$$

и будем интерпретировать движение системы как движение точки в этом пространстве.

Система ускорений точек системы $x_1'', \ldots, x_{3n}''$ определяет ускорение интерпретирующей точки. Будем называть последнее ускорением системы.

Разложим каждое кинематически допустимое ускорение системы на составляющие, касательную и ортогональную к геометрии связей системы. Имеем

$$x_i'' = u_i + v_i \tag{4.1}$$

Многообразие возможных перемещений системы образует линейное пространство, касательное к геометрии связей системы. Поэтому компоненты u_i касательной составляющей ускорения системы должны удовлетворять соотношениям для возможных перемещений

$$\sum \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} u_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} u_i = 0 \tag{4.2}$$

Компоненты v_i ортогональной составляющей ускорения для всех возможных перемещений должны удовлетворять соотношению

$$\sum m_i v_i \delta x_i = 0 \tag{4.3}$$

выражающему [1] условие ортогональности векторов $v_1, \ldots, v_{3n}$ и $\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}$ в рассматриваемом метрическом пространстве.

Из условия (4.3) и соотношений (2.1) для возможных перемещений находим для ортогональной составляющей ускорения системы

$$m_i v_i = \sum \lambda_\rho^* \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \sum \mu_\sigma^* \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}$$

где λ_ρ^* и μ_σ^* — произвольные множители. С учетом этих выражений равенства (4.1) записываются

$$x_i'' = u_i + \sum \lambda_\rho^* \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \sum \mu_\sigma^* \frac{1}{m_i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i} \tag{4.4}$$

Лемма 1. Всякое кинематически допустимое ускорение системы имеет и притом единственную составляющую, касательную к геометрии связей системы.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что при заданных $x_1'', \ldots, x_{3n}''$ можно лишь единственным образом выбрать множители λ_ρ^* и μ_σ^* так, чтобы определяемая равенствами (4.4) система величин $u_1, \ldots, u_{3n}$ удовлетворяла соотношениям (4.2).

[1] Общую геометрическую теорию метрических пространств можно найти в книге [2].

С этой целью подставим равенства (4.4) в соотношения (4.2). Используя обозначения

$$p_{\rho\pi} = \sum \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} \frac{\partial f_\pi}{\partial x_i}, \qquad q_{\rho\tau} = \sum \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_i}$$

$$r_{\sigma\pi} = \sum \frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \frac{\partial f_\pi}{\partial x_i}, \qquad s_{\sigma\tau} = \sum \frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_i}$$

получаем уравнения

$$\sum p_{\rho\pi}\lambda_\pi^* + \sum q_{\rho\tau}\mu_\tau^* = \sum \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} x_i'', \qquad \sum r_{\sigma\pi}\lambda_\pi^* + \sum s_{\sigma\tau}\mu_\tau^* = \sum \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} x_i'' \tag{4.5}$$

которым должны удовлетворять неопределенные множители λ_π^*, μ_τ^* для того, чтобы требуемое леммой свойство величин $u_1, \ldots, u_{3n}$ имело место.

Докажем, что определитель этой системы отличен от нуля. Предположим противное. Тогда найдутся $\varkappa_\rho$ и ν_σ, не все равные нулю, такие, что будут выполняться равенства

$$\sum \varkappa_\rho p_{\rho\pi} + \sum \nu_\sigma r_{\sigma\pi} = 0, \qquad \sum \varkappa_\rho q_{\rho\tau} + \sum \nu_\sigma s_{\sigma\tau} = 0$$

Раскрывая в них величины $p_{\rho\pi}$, $r_{\sigma\pi}$, $q_{\rho\tau}$, $s_{\sigma\tau}$ и введя обозначения

$$\omega_i = \sum \varkappa_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} + \sum \nu_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \tag{4.6}$$

приведем эти равенства к виду

$$\sum \frac{\partial f_\pi}{\partial x_i} \omega_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_i} \omega_i = 0 \tag{4.7}$$

Умножая равенства (4.6) соответственно на $m_i\omega_i$ и складывая их, получим

$$\sum m_i\omega_i^2 = \sum \varkappa_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} \omega_i + \sum \nu_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \omega_i$$

Правая часть этого равенства в силу (4.7) тождественно равна нулю. Следовательно, все $\omega_i = 0$. Но тогда из (4.6) следует, что между уравнениями (1.1) и (1.2) связей системы должна существовать зависимость, что, конечно, не предполагается.

Таким образом, доказано, что определитель системы (4.5) отличен от нуля и, значит, неопределенные множители λ_π^* и μ_τ^* определяются единственным образом. Лемма доказана.

Лемма 2. Если закон управления системой корректен, то касательная составляющая кинематически допустимого ускорения системы может быть задана произвольно; само кинематически допустимое ускорение системы определяется однозначно своей касательной составляющей.

Лемма, очевидно, будет доказана, если будет показано, что для всякой системы величин $u_1, \ldots, u_{3n}$ множители λ_ρ^* и μ_σ^* можно выбрать, и притом единственным образом, так, чтобы равенства (4.4) определяли кинематически допустимое ускорение системы. Подставляя с этой целью равенства (4.4) в соотношения (3.2) для кинематически допустимых ускорений системы и используя обозначения (3.4), получим уравнения

$$\sum a_{\xi\rho}\lambda_\rho^* + \sum b_{\xi\sigma}\mu_\sigma^* + \sum A_{\xi i}u_i + A_\xi = 0 \tag{4.8}$$

которым должны удовлетворять множители λ_ρ^* и μ_σ^* для того, чтобы условие леммы имело место. В силу корректности закона управления определитель этой системы (он же определитель (3.5)) отличен от нуля, и, следовательно, неопределенные множители λ_ρ^* и μ_σ^* определяются единственным образом. Лемма доказана.

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Если связи системы (1.1) и (1.2) независимы, а закон управления системой корректен, то между кинематически допустимыми ускорениями системы и их касательными составляющими существует взаимно однозначное соответствие, причем многообразие касательных составляющих ускорений ничем не ограничено (кроме, конечно, определяющих соотношений (4.2)).

5. Для систем с обычными связями справедлив принцип Гаусса, формулирующий экстремальное свойство действительного ускорения системы, выделяющее его среди кинематически допустимых ускорений системы.

В случае систем с параметрическими связями принцип Гаусса отсутствует; однако справедливо следующее его видоизменение.

Среди кинематически допустимых ускорений системы действительным будет то, касательная составляющая которого обращает в минимум функцию

$$\sum \frac{m_i}{2}\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 \tag{5.1}$$

Для доказательства подставим разложение (4.1) в основное уравнение механики (2.1). Учитывая условие (4.3), получаем

$$\sum (m_i u_i - X_i)\, \delta x_i = 0 \tag{5.2}$$

Величины $u_1, \ldots, u_{3n}$ представляют касательную составляющую действительного ускорения системы. Выберем произвольно какое-либо кинематически допустимое ускорение системы. Обозначим через $w_1, \ldots, w_{3n}$ его касательную составляющую. Так как каждая из рассматриваемых касательных составляющих (u и w) удовлетворяет соотношениям (4.2), то этим соотношениям удовлетворяет и их разность. Поэтому разности $u_i - w_i$ определяют вектор, лежащий среди возможных перемещений системы, и, значит, уравнение (5.2) может быть переписано

$$\sum (m_i u_i - X_i)(u_i - w_i) = 0$$

Используя тождества

$$\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right)(u_i - w_i) = \frac{1}{2}\left[\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 - \left(w_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 + (u_i - w_i)^2\right]$$

находим

$$\sum \frac{m_i}{2}\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 - \sum \frac{m_i}{2}\left(w_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 + \sum \frac{m_i}{2}(u_i - w_i)^2 = 0$$

Отсюда получаем

$$\sum \frac{m_i}{2}\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right) \leqslant \sum \frac{m_i}{2}\left(w_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2$$

что и требовалось.

Таким образом, показано, что касательной составляющей действительного ускорения системы соответствует минимум функции (5.1). То же самое справедливо и по отношению ко всякой функции

$$\sum \frac{m_i}{2}(u_i - u_i^*)^2 \tag{5.3}$$

где $u_1^*, \ldots, \overset{*}{u_{3n}}$ — касательная составляющая действительного ускорения системы, освобожденной от части связей.

В самом деле, применительно к системе, освобожденной от части связей, соотношение (5.2) запишется

$$\sum (m_i u_i^* - X_i)\, \delta^* x_i = 0$$

где через $(\delta^* x_1, \ldots, \delta^* x_{3n})$ обозначено возможное перемещение освобожденной системы. Возможные перемещения исходной системы лежат среди возможных перемещений освобожденной системы. Поэтому последнее соотношение может быть переписано

$$\sum (m_i u_i^* - X_i)\, \delta x_i = 0$$

Вычитая его из соотношения (5.2), получим

$$\sum m_i (u_i - u_i^*)\, \delta x_i = 0$$

Поставив это соотношение на место (5.2) и повторяя дословно проведенные выше рассуждения, придем к прежнему результату с той разницей, что функция (5.1) заменится функцией (5.3).

Следует отметить, что функция (5.1) будет частным случаем функции (5.3), соответствующим освобождению системы от всех связей.

Покажем, что введенное видоизменение принципа Гаусса в случае систем с обычными связями эквивалентно принципу Гаусса.

Предварительно докажем, что в случае систем с обычными связями ортогональная составляющая $(v_1, \ldots, v_{3n})$ кинематически допустимого ускорения системы не зависит от его касательной составляющей.

В самом деле, в предыдущем параграфе для составляющей $(v_1, \ldots, v_{3n})$ были указаны соотношения

$$m_i v_i = \sum \lambda_\rho^* \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \sum \mu_\sigma^* \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}$$

Если $(u_1, \ldots, u_{3n})$ — касательная составляющая кинематически допустимого ускорения системы, то неопределенные множители λ_ρ^* и μ_σ^* должны искаться из соотношений (4.8). Но в случае систем с обычными связями, как видно из (3.2), можно положить

$$\| A_{\xi i} \| = \left\| \begin{matrix} \partial f_\rho \,/\, \partial x_i \\ \partial \varphi_\sigma \,/\, \partial x_i \end{matrix} \right\|$$

С другой стороны, u_i удовлетворяют соотношениям (4.2). Поэтому для обычных систем

$$\Sigma A_{\xi i} u_i = 0$$

и величины u_i из соотношений (4.8) выпадают. Таким образом, неопределенные множители $\lambda_\rho{}^*$ и $\mu_\sigma{}^*$, а следовательно, и величины v_i от касательной составляющей кинематически допустимого ускорения не зависят. Что и требовалось.

Отсюда следует, что ортогональная составляющая ускорения системы будет функцией только состояния системы и все кинематически допустимые ускорения системы в заданном ее состоянии различаются лишь своими касательными составляющими.

Пусть $u_1 + v_1, \ldots, u_{3n} + v_{3n}$ будет действительное ускорение системы. Тогда ее произвольное кинематически допустимое ускорение по доказанному может быть записано $w_1 + v_1, \ldots, w_{3n} + v_{3n}$, где $w_1, \ldots, w_{3n}$ — его касательная составляющая.

Минимизируемая функция в случае принципа Гаусса в силу (4.1) может быть записана

$$z_w = \sum \frac{m_i}{2}\left(w_i + v_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2$$

Обозначим через z_u ее значение, отвечающее действительному ускорению системы.

Рассмотрим разность

$$z_u - z_w = \sum \frac{m_i}{2}\left(u_i + v_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 - \sum \frac{m_i}{2}\left(w_i + v_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2$$

Раскрывая ее, находим

$$z_u - z_w = \sum \frac{m_i}{2}\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 - \sum \frac{m_i}{2}\left(w_i - \frac{X_i}{2}\right)^2 + \sum m_i (u_i - w_i) v_i$$

Разности $u_i - w_i$, как уже отмечалось, определяют вектор, лежащий среди возможных перемещений системы. Поэтому в силу (4.3) последняя сумма из правой части последнего равенства выпадает и, следовательно,

$$z_u - z_w = \sum \frac{m_i}{2}\left(u_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 - \sum \frac{m_i}{2}\left(w_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2$$

Это равенство, очевидно, доказывает требуемое.

Поступила 7 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2, Физматгиз, 1960.
2. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ИЛ, 1948.