НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк
(Ижевск)

При исследовании устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений методом сравнения [1] возникает вопрос об ограниченности решений систем вида

$$x_i' = a_i(t)\, x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij}(t)\, x_j \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix} (b_{ij} \geqslant 0) \tag{1}$$

Для более общего класса систем

$$x' = (A + B)\, x \tag{2}$$

где $A = \{a_{ij}(t)\}$ и $B = \{b_{ij}(t)\}$ — квадратные $(n \times n)$ матрицы, известно [1], что если решения системы $y' = Ay$ ограничены и

$$\int^{t} a_{ii}(s)\, ds \geqslant \alpha > -\infty \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

то при

$$\int_{t_0}^{\infty} \| B(s) \|\, ds < \infty \tag{3}$$

ограничены и решения системы (2). Приведенная ниже теорема показывает, что условие (3) необходимо, если система (2) имеет вид (1).

Теорема. Если

$$\int_{t_0}^{t} a_i(s)\, ds \geqslant \alpha > -\infty \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

то решения системы (1) ограничены тогда и только тогда, когда

$$\varphi_i(t) = \int_{t_0}^{t} a_i(s)\, ds \leqslant \beta < \infty, \quad \psi_{ij}(t) = \int_{t_0}^{\infty} b_{ij}(s)\, ds < \infty \qquad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$$

Для доказательства рассмотрим систему уравнений Вольтерра (4)

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} K_{ij}(t, s)\, y_j(s)\, ds + f_i(t) \quad \left(K_{ij}(t, s) = b_{ij}(s) \exp \int_{s}^{t} a_i(\tau)\, d\tau\right)$$

Если

$$f_i(t) = x_i(t_0) \exp \varphi_i(t)$$

то системы (1) и (4) эквивалентны. Если выполнены условия а) и б), то

$$\lim_{T \to \infty} \overline{\lim_{t \to \infty}} \int_{T}^{t} K_{ij}(t, s)\, ds \leqslant \lim_{T \to \infty} e^{\beta - \alpha} \int_{T}^{\infty} b_{ij}(s)\, ds = 0$$

Отсюда и из теоремы 1 работы [3] следует ограниченность решений системы (4) при ограниченных $f_i(t)$. В силу упомянутой эквивалентности и ограниченности функций

$$f_i(t) = x_i(t_0) \exp \varphi_i(t)$$

получаем ограниченность решений системы (1).

---

[1] Рахматуллина Л. Ф. Применение интегральных неравенств к исследованию устойчивости решений дифференциальных уравнений. Кандидатская диссертация, Казанский ун-т, 1963.

Если $x_i(t_0) \geqslant 0$, то в силу теоремы о дифференциальном неравенстве Т. Важевского [4] (или теоремы об интегральном неравенстве [5]), имеем $x_i(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0$. Поэтому из (4) следует, что $x_i(t) \geqslant x_i(t_0) \exp \varphi_i(t)$, так как $K_{ij}(t, s) \geqslant 0$. Таким образом

$$\beta_i = \sup_t \varphi_i(t) < \infty \tag{5}$$

если ограничены $x_i(t)$.

При ограниченных $f_i(t)$ решения системы (4) ограничены, если ограничены решения системы (1). Действительно, пусть $|f_i(t)| < \gamma$ и $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ такое решение (1), что $x_i(t_0) = \gamma e^{-\alpha}$. Так как

$$|y_i(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{j \neq i} K_{ij}(t, s) |y_j(s)| ds + \gamma \exp\{\varphi_j(t) - \alpha\}$$

$$x_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \neq i} K_{ij}(t, s) x_j(s) ds + \gamma \exp\{\varphi_i(t) - \alpha\}$$

то в силу теоремы об интегральном неравенстве [5]

$$|y_i(t)| = x_i(t) \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

Из ограниченности решений системы (4) при ограниченных $f_i(t)$ и леммы 1 работы [3] следует, что

$$\sup_t \int_{t_0}^{t} K_{ij}(t, s) ds < \infty$$

Отсюда и из (5) имеем

$$\int_{t_0}^{t} b_{ij}(s) ds \leqslant e^{\beta_i - \alpha} \sup_t \int_{t_0}^{t} K_{ij}(t, s) ds < \infty$$

Теорема доказана.

При обсуждении изложенной теоремы на Ижевском семинаре В. И. Логунов указал на следующее утверждение работы [6]: решения системы $x_1' = ax_2$, $x_2' = bx_1 + cx_2$ с неотрицательными коэффициентами ограничены тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_0}^{\infty} b(s) ds < \infty, \qquad \int_{t_1}^{\infty} c(s) ds < \infty, \qquad \int_{t_0}^{\infty} a(s) \int_{t_0}^{s} b(t) dt \, ds < \infty$$

Легко видеть, что система

$$x_1' = \exp\{t^{-1}\} \, x_2, \qquad x_2' = t^{-2} x_2 \; (t_0 = 1)$$

удовлетворяет приведенным условиям, но имеет неограниченное решение

$$x_1 = t, \; x_2 = \exp\{t^{-1}\}.$$

Поступила 11 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, 1954.
2. Цалюк З. Б. К вопросу об устойчивости систем линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2.
3. Wazewski T. Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications. Ann. Soc. polon. math., 1950, 23.
4. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных неравенствах. I. Матем. сб., 1962, т. 56, № 3.
5. Павлюк И. А. Необходимые и достаточные условия ограниченности решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка. РЖМат, 1959, 6901.