в концах отрезка $(-l, +l)$ и неограниченных в точке возврата, являющейся образом точки $\zeta = 0$. От решения исходной задачи местного выпучивания потребуем, чтобы оно было корректным, т. е. непрерывно зависящим от параметров почти всюду в области изменения переменных x и y.

В указанном смысле решение (2.5) будет некорректным, так как при $\sigma_y^\infty = \sigma_x^\infty$ оно не переходит в решение соответствующей упругой задачи (при этом значении параметров нагружения выпучивания не происходит). Напротив, решение работы [1] будет, как легко проверить, корректным во всей области его существования при $\sigma_x^\infty \leqslant \sigma_y^\infty \leqslant 5\sigma_x^\infty$. В то же время решение работы [1] и решение (2.5) совпадают при $\sigma_y^\infty = 5\sigma_x^\infty$. Из всего этого следует теорема.

Теорема 2. Решение исходной задачи существует и единственно в классе корректных почти всюду ограниченных однолистных решений, причем в области изменения параметров $\sigma_x^\infty \leqslant \sigma_y^\infty \leqslant 5\sigma_x^\infty$ решение дается формулами работы [1], а в остальной области $5\sigma_x^\infty < \sigma_y^\infty$ решение дается формулами (2.5).

Отметим, что математическое допущение о неограниченности (сжимающих) напряжений в окрестности точки возврата ($\zeta = 0$) зоны выпучивания физически объясняется наличием в любой мембране некоторой (хотя бы весьма малой) изгибной жесткости, что вызывает большие напряжения, необходимые для потери устойчивости очень короткого элемента мембраны в окрестности точки возврата.

Поступила 30 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О выпучивании мембран с отверстиями при растяжении. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.

О НАЧАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО ГЛАДКОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА ПРИ УДАРЕ

В. А. Свекло

(Калининград)

Известные результаты Е. А. Нарышкиной используются для подсчета начальных напряжений в точках области контакта упругих тел при отсутствии трения.

§ 1. Заменяя упомянутые тела полупространствами $z_j \geqslant 0$, подверженными действию в области контакта только нормальной нагрузки, получим для смещений точек в направлении осей OZ_j [1]

$$\int_0^{t_0} W_j(x_0, y_0, z_{j0}, t)\,dt = -\frac{1}{8\pi\rho_j}\left(\frac{\partial M^j}{\partial z_{j0}} + \frac{\partial N_3^j}{\partial x_0} - \frac{\partial N_4^j}{\partial y_0}\right) \tag{1.1}$$

где M^j при нулевых начальных данных и массовых силах имеют вид

$$M^j = \iiint_{T_j} W_{j1}^\circ \sigma_z\,dT \qquad (j = 1, 2) \tag{1.2}$$

Область T_j — трех измерений принадлежит гиперплоскости $z_j = 0$; смещения точек W_{j1}° в направлении тех же осей определяются фундаментальными решениями продольного типа; величины N_3^j и N_4^j получаются из (1.2) заменой W_{j1}° на соответствующие смещения от фундаментальных решений поперечного типа.

Главная часть $W_{j1}{}^{\circ}$ имеет вид

$$W_{j1}' = \frac{z_j - z_{j0}}{r_j^3}\left[(t_0 - t)^2 - r_j^2 a_j^{-2}\right] = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} \theta_{j1}{}^2\, d\lambda$$
$$r_j^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_j - z_{j0})^2 \tag{1.3}$$

Здесь a_j — скорости распространения продольных волн в средах. Скорости распространения поперечных волн в дальнейшем обозначим через b_j. Функции θ_{j1} определяются соотношениями

$$t_0 - t - \theta_{j1}\rho' \cos(\varphi - \lambda) + (z_j - z_{j0})\, L_{j1}(\theta_{j1}) = 0$$
$$L_{j1}(\theta) = \sqrt{a_j^{-2} - \theta^2}, \qquad x - x_0 = \rho' \cos\varphi, \qquad y - y_0 = \rho' \sin\varphi : \tag{1.4}$$

Остальные части, соответствующие отраженным волнам, находятся по формулам

$$W_{j1}'' = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{j1}''} \frac{F_j^-(\theta)}{F_j^+(\theta)}\Psi'(\theta)\, d\theta\, d\lambda, \qquad \Psi(\theta) = \theta^2, \qquad \Psi' = 2\theta$$

$$W_{j1}''' = +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{j1}'''} \frac{4\theta^2(2\theta^2 - b_j^{-2})}{F^+(\theta)}\Psi'(\theta)\, d\theta\, d\lambda$$

$$F_1^{\pm}(\theta) = (b_j^2 - 2\theta^2)^2 \pm 4\theta^2 L_{j1}(\theta) L_{j2}(\theta), \qquad L_{j2}(\theta) = \sqrt{b_j^{-2} - \theta^2} \tag{1.5}$$

Главные части фундаментальных решений $W_{j3}{}^{\circ}$ и $W_{j4}{}^{\circ}$ имеют вид

$$W_{j3}' = -\frac{x - x_0}{r_j^3}\left[(t_0 - t)^2 - r_j^2 b_j^{-2}\right] = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\chi(\theta)\cos\lambda\, d\lambda$$

$$W_{j4}' = +\frac{y - y_0}{r_j^3}\left[(t_0 - t)^2 - r_j^2 b_j^{-2}\right] = +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\chi(\theta)\sin\lambda\, d\lambda \tag{1.6}$$

$$\chi(\theta) = \theta L_{j2}(\theta) - b_j^{-2}\arcsin b_j\theta$$

Им соответствует отраженное возмущение

$$W_{j3}'' = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{j3}''} \frac{4(2\theta^2 - b_j^{-2}) L_{j1}(\theta) L_{j2}(\theta)}{F_j^+(\theta)}\chi'(\theta)\cos\lambda\, d\theta\, d\lambda$$

$$W_{j4}'' = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{j4}''} \frac{4(2\theta^2 - b_j^{-2}) L_{j1}(\theta) L_{j2}(\theta)}{F_j^+(\theta)}\chi'(\theta)\sin\lambda\, d\theta\, d\lambda \tag{1.7}$$

$$W_{j3}''' = +\frac{+1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{j3}'''} \frac{F_j^-(\theta)}{F_j^+(\theta)}\chi'(\theta)\cos\lambda\, d\theta\, d\lambda$$

$$W_{j4}''' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{j4}'''} \frac{F_j^-(\theta)}{F_j^+(\theta)}\chi'(\theta)\sin\lambda\, d\theta\, d\lambda, \qquad \chi'(\theta) = \frac{d\chi}{d\theta} \tag{1.8}$$

Переменные θ_{jk}'' и θ_{jk}''' определяются равенствами типа (1.4). Пользуясь свойствами фундаментальных решений, легко оправдать возможность внесения в (1.1) знака производной под знак интеграла. Получим

$$\int_0^{t_0} W_j(x_0, y_0, z_{j0}, t)\, dt = -\frac{1}{8\pi\rho_j}\iiint_{T_j}\left(\frac{\partial W_{j1}{}^{\circ}}{\partial z_{j0}} + \frac{\partial W_{j3}{}^{\circ}}{\partial x_0} - \frac{\partial W_{j4}{}^{\circ}}{\partial y_0}\right)\sigma_z\, dT \tag{1.9}$$

Устремляя z_{j0} к нулю, найдем

$$\int_0^{t_0} W_j(x_0, y_0, 0, t)\, dt = \frac{1}{4\pi^2 b_j^4 \rho_j}\iiint_{T_0}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} \frac{\theta L_{j1}(\theta)\, d\lambda}{F_j^+(\theta)\,\rho\cos(\varphi - \lambda)} P(x, y, t)\, dT \tag{1.10}$$

где ρ_j — плотности сред

$$\theta = \frac{t_0 - t}{\rho' \cos(\varphi - \lambda)}, \qquad \rho' = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \qquad P(x, y, t) = -\sigma_z(x, y, t)$$

Складывая, находим относительное перемещение тел

$$\int_0^{t_0} W(x_0, y_0, 0, t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\rho_j b_j^4} \int_0^{t_0} \left\{ \iint_B \left[\mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\theta L_{j0}(\theta)\, d\lambda}{F_j^+(\theta)\, \rho' \cos(\varphi - \lambda)} \right] P(x, y, t)\, dx dy \right\} dt \tag{1.11}$$

где B — область на плоскости xy, представляет собой общую часть области контакта и основания того круглого конуса с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0), в который вырождается гиперконус при $z_j = 0$ и $z_{j0} = 0$. Пусть t_0 настолько мало, что основание вышеупомянутого конуса лежит целиком внутри области контакта; тогда B — круг с центром в точке $(x_0, y_0, 0)$ радиуса $a_j (t_0 - t)$. Разлагая $P(x, y, t)$ в ряд по переменным x, y, t в окрестности точки $(x_0, y_0, 0)$, получим

$$\int_0^{t_0} W(x_0, y_0, 0, t)\, dt =$$

$$= \frac{P(x_0, y_0, 0)}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\rho_j b_j^4} \int_0^{t_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_j (t_0 - t)} \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\theta L_{j1}(\theta)\, d\lambda}{F_j^+(\theta) \cos(\varphi - \lambda)} d\rho' d\varphi dt + \ldots \tag{1.12}$$

где не указаны члены, не влияющие на окончательный результат. Полагая

$$\xi = \frac{\rho' \cos(\varphi - \lambda)}{t_0 - t}, \qquad \alpha_j = a_j \cos(\varphi - \lambda)$$

найдем

$$\int_0^{t_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_j (t_0 - t)} \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\theta L_{j1}(\theta)\, d\lambda}{F_j^+(\theta) \cos(\varphi - \lambda)} d\rho' d\varphi dt = \frac{t_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_j} \mathrm{Re} \frac{L_{j1}(\xi^{-1})\, d\xi}{F_j^+(\xi^{-1})\, \xi} \frac{d\lambda d\varphi}{\cos^2(\lambda - \varphi)} \tag{1.13}$$

Подсчитаем интеграл, стоящий в правой части. Обозначая через Φ подинтегральное выражение, запишем

$$K_j^\circ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi\, [\cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda d\varphi \tag{1.14}$$

но

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{2\pi} \Phi\, [\cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda = \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{-\varphi}^{2\pi - \varphi} \Phi(\cos \lambda)\, d\lambda = 0 \tag{1.15}$$

Поэтому

$$K_j^\circ = 2\pi \int_0^{2\pi} \Phi\, [\cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\cos \lambda)\, d\lambda = 4\pi \int_0^{\pi} \Phi(\cos \lambda)\, d\lambda \tag{1.16}$$

Учитывая выбор ветвей радикалов и их значение, получим

$$\int_0^\pi \Phi d\lambda = \int_0^{\varkappa_1}\int_{b_j}^{\alpha_1} \mathrm{Re}\,\frac{-i\sqrt{\xi^{-2}-a_j^{-2}}}{F_j^+(\xi^{-1})\,\xi}\,d\xi\,\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} + \int_{\varkappa_2}^{^1/_2\pi}\int_{b_j}^{\alpha_2} \mathrm{Re}\,\frac{i\sqrt{\xi^{-2}-a_j^{-2}}}{F_j^+(\xi^{-1})\,\xi}\,d\xi\,\frac{d\lambda}{\sin^2\lambda} \qquad (1.17)$$

$(\varkappa_1 = \arccos\sqrt{k_j},\ \varkappa_2 = \arcsin\sqrt{k_j},\ k_j = b_j^2\,/\,a_j^2,\ \alpha_1 = a_j\cos\lambda,\ \alpha_2 = a_j\sin\lambda)$

Взяв оба интеграла по частям и совершив замену переменных, полагая в первом $\eta = \operatorname{tg}\lambda$, а во втором $\eta = \operatorname{ctg}\lambda$, получим

$$\int_0^\pi \Phi(\cos\lambda)\,d\lambda = 2a_j^3\int_0^{\eta_{0j}} \frac{4\sqrt{\eta_{0j}^2-\eta^2}\,\eta^4\,d\eta}{[\eta_{0j}^2-1-2\eta^2]^4+16(1+\eta^2)(\eta_{0j}^2-\eta^2)\,\eta^2} \qquad \left(\eta_{0j} = \frac{1}{k_j}-1\right) \qquad (1.18)$$

Обозначим

$$Q(k_j) = k_j^{-^3/_2}\int_0^{\eta_{0j}} \frac{\sqrt{\eta_{0j}^2-\eta^2}\,\eta^4 d\eta}{[\eta_{0j}^2-1-2\eta^2]^4+16(1+\eta^2)(\eta_{0j}^2-\eta^2)\,\eta^2} \qquad (1.19)$$

Этот интеграл вычисляется в элементарных функциях. Например, если $k_j = {}^1/_3$, то $Q({}^1/_3) \approx 0.0717$. Собирая результаты, найдем

$$K_j^\circ = 24\pi a_j^3 k_j^{^3/_2}\,Q(k_j) \qquad (1.20)$$

Возвращаясь к равенству (1.12), запишем его в виде

$$\int_0^{t_0} W(x_0, y_0, 0, t)\,dt = t_0^2\,\frac{4P(x_0, y_0, 0)}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\frac{Q(k_j)}{\rho_j b_j} + \ldots \qquad (1.21)$$

Невыписанные члены имеют порядок t^3_0 и выше. Дифференцируя два раза по t и устремляя $t_0 \to 0$, приходим к соотношению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_0}\right)_{t_0=0} = \frac{8P(x, y, 0)}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\frac{Q(k_j)}{\rho_j b_j} \qquad (1.22)$$

дающему возможность по заданной функции W находить начальное значение нормального напряжения в точках области контакта соприкасающихся тел.

§ 2. Если одно из соударяющихся тел, например первое, является жестким (штамп с плоским основанием), то результат (1.22) упрощается

$$b_1 = \infty, \qquad P(x_0, y_0, 0) = \frac{\pi}{8}\,\frac{\rho b}{Q(k)}\,V_0 \qquad (2.1)$$

где V_0 — относительная скорость соударения, ρ, b, k относятся ко второму телу. Напряжения P оказываются, таким образом, одинаковыми во всех точках под штампом. Это дает возможность подсчитать силу давления штампа на полупространство

$$PS = \frac{\pi}{8}\,\frac{\rho b}{Q(k)}\,V_0 S \qquad (2.2)$$

где S — площадь подошвы штампа. Итак, при ударе штампа о полупространство сила давления возникает скачкообразно, мгновенно достигая значения (2.2). В том случае, когда начальное соприкосновение тел осуществляется в точках или линиях, упомянутое давление равно нулю, так как при этом $S = 0$.

Поступила 3 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Нарышкина Е. А. Колебания полупространства при любых начальных условиях. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1934, № 45.