К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. П. Черепанов (Москва)

В работах автора [1, 2] были построены решения некоторых упруго-пластических задач и задач о местном выпучивании мембраны. При этом оказалось, что найденные решения существуют лишь до определенного значения параметра нагружения (при котором на неизвестной границе появляется точка возврата). Отметим, что решения искались в классе функций (напряжений), ограниченных всюду в упругой области, включая неизвестную границу (здесь не принимаются во внимание неизбежные особенности функций, вызванные наличием точки возврата на известной границе, как это имеет место, например, в упомянутой задаче выпучивания мембраны).

Ниже находятся решения указанных двух задач в классе функций (напряжений), не ограниченных в некоторых точках неизвестной границы, которые соответствуют точкам возврата в первом решении. Построенные решения являются продолжением найденных ранее решений [1, 2] в область больших значений параметра нагружения, совпадая с ними лишь при одном значении параметра нагружения, при превышении которого решения работ [1, 2] перестают существовать. Согласно найденным решениям на контуре неизвестной границы всегда имеется точка возврата.

Указанный на следующих двух примерах способ склеивания двух решений в одно и выявления единственного решения, справедливого во всей области изменения параметров, по-видимому, имеет достаточно общий характер.

§ 1. Упруго-пластическая задача для пластины с круговым отверстием. 1°. Рассмотрим упруго-пластическую задачу для бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса R, находящейся в однородном поле напряжений

$$\sigma_x = \sigma_x^{\infty}, \qquad \sigma_y = \sigma^{\infty}, \qquad \tau_{xy} = 0$$

К контуру отверстия приложена постоянная нормальная нагрузка $\sigma_r = p$ и равная нулю касательная $\tau_{r\theta} = 0$ (в полярных координатах r, θ). В качестве условия пластичности в пластической области возьмем условие пластичности Треска — Сен-Венана. Считаем, $0 \leqslant p \leqslant \sigma_s$, где σ_s — постоянная пластичности. Постановка задачи и обозначения идентичны принятым в работе [2].

На параметрической плоскости ζ краевая задача записывается в виде [2]

$$4\,\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta) = 2\sigma_s + \frac{R(p-\sigma_s)}{|\omega(\zeta)|} \qquad \text{при } |\zeta| = 1$$

$$\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\,\overline{\omega(\zeta)}}{2\omega(\zeta)\,|\omega(\zeta)|} \qquad \text{при } |\zeta| = 1$$

$$\varphi(\zeta) = {}^1/_4(\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty}) + O(\zeta^{-2}), \qquad \omega(\zeta) = O(\zeta)$$

$$\psi(\zeta) = {}^1/_2(\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty}) + O(\zeta^{-2}), \qquad \text{при } \zeta \to \infty$$

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\,\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\,\overline{\omega}(1/\zeta)}{2\omega(\zeta)\sqrt{\omega(\zeta)\,\overline{\omega}(1/\zeta)}}$$

Согласно формуле (3.13) работы [2], решение функционального уравнения имеет вид

$$\omega(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^3}\left(\zeta^2 + \frac{c_1}{2c_0}\right)^2, \qquad c_1^2 = 4c_0c_3$$

$$\psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\sqrt{c_3}\,\zeta^4(\zeta^2 + c_1/2c_3)}{2c_0^{3/2}(\zeta^2 + c_1/2c_0)^3} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\,\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{1.1}$$

где $\varphi(\zeta)$ определяется из решения задачи Дирихле (3.14) для внешности круга $|\zeta| > 1$

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta) = \sigma_s + \frac{R(p-\sigma_s)\sqrt{c_0c_3}}{c_1(c_3 - c_0)}\,\zeta^2\left(\frac{1}{\zeta^2 + c_1/2c_3} - \frac{1}{\zeta^2 + c_1/2c_0}\right) \text{при } |\zeta| = 1 \tag{1.2}$$

Для определенности считаем всегда $\sigma_y^\infty \geqslant \sigma_x^\infty \geqslant 0$. Ищем решение краевой задачи Дирихле (1.2) в классе функций, имеющих полюсы в точках $\zeta = \pm 1$. Так как сосредоточенная сила в соответствующих точках неизвестного контура физической плоскости z отсутствует, то в точках $\zeta = \pm 1$ должно выполняться при этом условие

$$\omega'(\pm 1) = 0 \tag{1.3}$$

Условие (1.3) означает, что неизвестный заранее контур раздела упругой и пластической областей всегда имеет точки возврата в точках, соответствующих $\zeta = \pm 1$.

При этом напряжения в упругой области в окрестности точки возврата имеют особенность типа $1 / \sqrt{z}$. Учитывая формулу (1.1), из условия (1.3) получаем

$$2c_0 = 3c_1 \tag{1.4}$$

Можно показать, что решение задачи Дирихле (1.2) в указанном классе функций, не удовлетворяющее пока условию на бесконечности, имеет вид

$$\varphi(\zeta) = A\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1} - \frac{3R(p-\sigma_s)}{16c_0}\frac{1}{\zeta^2+{}^1/_3} + \frac{1}{2}\sigma_s + \frac{9R(p-\sigma_s)}{32c_0} \tag{1.5}$$

где A — действительная постоянная. Для определения постоянных c_0 и A служат два условия на бесконечности

$$\varphi(\zeta) \to {}^1/_4(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty), \qquad \psi(\zeta) \to {}^1/_2(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \quad \text{при } \zeta \to \infty \tag{1.6}$$

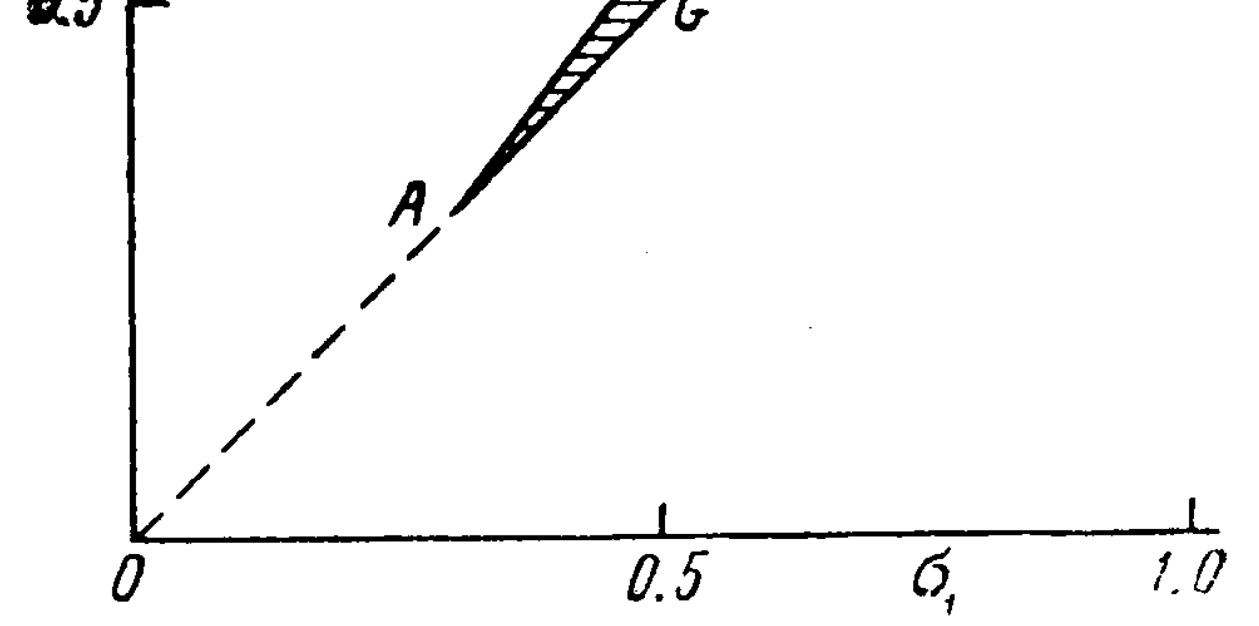
Используя формулы (1.1), (1.5) и (1.6), получаем

$$c_0 = \frac{6R(\sigma_s - p)}{4\sigma_s + 7\sigma_y^\infty - 11\sigma_x^\infty}, \qquad A = \frac{37}{64}\sigma_y^\infty - \frac{17}{64}\sigma_x^\infty - \frac{5}{16}\sigma_s \tag{1.7}$$

Функции $\omega(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ можно записать в виде

$$\omega(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^3}\left(\zeta^2 + \frac{1}{3}\right)^2, \qquad \psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\zeta^4(\zeta^2+3)}{6c_0(\zeta^2+{}^1/_3)^3} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{1.8}$$

Запишем уравнение контура, разделяющего упругую и пластическую области, в параметрическом виде



$$x(t) = {}^1/_3c_0(5\cos t + {}^1/_3\cos 3t)$$
$$y(t) = {}^1/_3c_0(\sin t - {}^1/_3\sin 3t)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \tag{1.9}$$

Как видно, контур раздела упругой и пластической областей при всех значениях параметров нагружения остается подобным контуру решения [2] при критическом значении параметра $a = {}^2/_3$, при превышении которого решение [2] теряет физический смысл. Решение (1.5), (1.7), (1.8) существует при всех значениях параметров нагружения, удовлетворяющих условию полного охвата кругового отверстия

$$4c_0 \geqslant 9R \tag{1.10}$$

2°. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения исходной упруго-пластической задачи. Найдем сначала области существования решения работы [2] и решения (1.5), (1.7), (1.8). Эти решения зависят от трех параметров нагружения $p^* = p / \sigma_s$, $\sigma_1 = \sigma_x^\infty / \sigma_s$ и $\sigma_2 = \sigma_y^\infty / \sigma_s$, которые образуют трехмерное пространство параметров нагружения. В целях простоты и наглядности положим $p^* = 0$, так что областью изменения двух параметров нагружения σ_1 и σ_2 будет внутренность треугольника с вершинами (0,0), (0,1) и (1,1) плоскости $\sigma_1\sigma_2$ (см. фигуру) (вследствие неравенства $\sigma_s \geqslant \sigma_y^\infty \geqslant \sigma_x^\infty \geqslant 0$).

Области существования решений изображены на фигуре: горизонтальными штрихами покрыта область существования решения (1.5), (1.7) и (1.8), а вертикальными — область существования решения работы [2]. Прямая *ABHE* задает параметры нагружения, при которых контур раздела упругой и пластической зон решения (1.5), (1.7), (1.8) касается кругового отверстия; ее уравнение имеет вид

$$21\sigma_2 - 33\sigma_1 + 4 = 0 \tag{1.11}$$

Прямая *AGF* имеет уравнение $\sigma_2 - \sigma_1 = 0$. Кривая *GBCD* задает параметры нагружения, при которых контур, разделяющий упругую и пластическую зоны, согласно решению работы [2] касается кругового отверстия; уравнение кривой имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 1}{3 - \sigma_1 - \sigma_2}\right)^3 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 1}{3 - \sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2 - \sigma_1 - \sigma_2} \tag{1.12}$$

Прямая *CHF* задает параметры нагружения, при которых на контуре раздела упругой и пластической зон в решении работы [2] появляется точка возврата; ее уравнение записывается в виде

$$37\sigma_2 - 17\sigma_1 - 20 = 0 \tag{1.13}$$

Как видно из фигуры, в областях *1*, *3*, *4* решение единственно, а в области *2* имеется два решения. Можно показать, что при априорном предположении о единственности решения функционального уравнения однолистных решений исходной задачи в классе почти всюду ограниченных функций (напряжений) больше не существует. Покажем, как при этом следует склеивать полученные решения и решать вопрос о единственности.

Определение. Решение упруго-пластической задачи назовем корректным, если оно является непрерывной функцией всех параметров задачи почти всюду в области изменения независимых переменных x и y.

От решения исходной упруго-пластической задачи потребуем, чтобы оно было корректным. Каждое из указанных ранее двух решений представляет собой непрерывную функцию параметров всюду внутри области существования решения на плоскости σ_1, σ_2. Остается проверить непрерывность решений на границах областей существования. Нетрудно найти, что в областях *1* и *2* только что приведенное решение (1.5), (1.7) и (1.8) будет некорректным, так как на прямой *AGF* при $\sigma_1 = \sigma_2$ оно не переходит в известное осесимметричное решение упруго-пластической задачи. С этой точки зрения решение работы [2] будет корректным всюду в областях существования *2* и *3*, так как при $\sigma_1 = \sigma_2$ оно непрерывно переходит в осесимметричное решение. Вопрос же о непрерывности решения упруго-пластической задачи работы [2] на границе *GBC* остается открытым, так как решение упруго-пластической задачи при частичном охвате кругового отверстия пластической зоной неизвестно. A priori предполагаем решение работы [2] непрерывным на границе *GBCH*, а решение (1.5), (1.7) и (1.8) — непрерывным на отрезке *HE*. Легко проверить, что на отрезке прямой *HF* решение (1.5), (1.7) и (1.8) совпадает с решением работы [2]. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Решение упруго-пластической задачи при вышеупомянутом априорном предположении существует в областях *2*, *3* и *4* изменения параметров нагружения и единственно в классе корректных почти всюду ограниченных однолистных решений, причем в областях *2* и *3* решение (всюду ограниченное) дается формулами работы [2], а в области *4* решение (почти всюду ограниченное) определяется формулами (1.5), (1.7) и (1.8).

Отметим, что математическое допущение о неограниченности напряжений в окрестности точки возврата физически объясняется наличием статически неопределимых пластических зон в окрестности точки возврата.

Указанное обстоятельство является дефектом приведенного решения и в этом смысле оно приближенно; однако, по крайней мере, в точках области *4*, достаточно близких к отрезку *HF*, это решение имеет определенный физический смысл. Кроме того, понятие корректности решения и приемы склеивания имеют, по-видимому, вполне общий характер, как показывает и следующий пример из другой области.

§ 2. Местное выпучивание мембраны с щелью. Пусть бесконечная мембрана с щелью $(-l,\ +l)$, свободной от нагрузок, находится в однородном поле растягивающих напряжений, вследствие чего вблизи щели возникает зона местного выпучивания мембраны. Общая постановка проблемы местного выпучивания мембран и решение некоторых конкретных задач даны в работе [1].

Граничные условия на неизвестном контуре L, разделяющем выпученную и невыпученную зоны, запишутся в виде [1]

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = 0, \qquad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = 0 \qquad \text{на } L$$

$$\Phi(z) = {}^1/_4\,(\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty}) + O(z^{-2}), \qquad \Psi(z) = {}^1/_2\,(\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty}) + O(z^{-2}) \qquad \text{при } z \to \infty$$

Здесь будем пользоваться обозначениями, принятыми в работе [1]. Согласно [1] во внешности единичного разреза вдоль действительной оси параметрической плоскости ζ имеем краевую задачу

$$\operatorname{Re}\varphi(\zeta) = 0, \qquad \overline{\omega(\zeta)} + \chi(\zeta) = 0 \tag{2.1}$$

$$\varphi(\zeta) = {}^1/_4\,(\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty}) + O(\zeta^{-2}), \qquad \omega(\zeta) = O(\zeta), \qquad \chi(\zeta) = O(\zeta^3) \qquad \text{при } \zeta \to \infty$$

Функция $\varphi(\zeta)$ неограничена, а функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ ограничены в окрестности концов отрезка $\zeta = \pm 1$. Решение задачи Дирихле для функции $\varphi(\zeta)$ ищем в классе функций, неограниченных в точке $\zeta = 0$, которая является образом наиболее подвижной точки выпученной области мембраны (развивающейся в точку возврата в решении работы [1], после чего решение [1] теряет физический смысл). Находим

$$\varphi(\zeta) = \frac{(\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty})\,\zeta^2 + F}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \qquad \sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta + O(\zeta^{-1}) \quad \text{при } \zeta \to \infty \tag{2.2}$$

где F — действительная постоянная.

Функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ определяются формулами [1]

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= (-A\zeta^2 - B\zeta + E)\sqrt{\zeta^2 - 1} + A\zeta^3 + B\zeta^2 + C\zeta + D \\ \chi(\zeta) &= (-A\zeta^2 - B\zeta + E)\sqrt{\zeta^2 - 1} - A\zeta^3 - B\zeta^2 - C\zeta - D \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для определения неизвестных действительных постоянных A, B, C, D, L, F служат следующие условия:

1) условия отсутствия сосредоточенных сил в точках плоскости z, являющихся образами точек $\zeta = 0,\ \zeta = \pm 1$;
2) условия соответствия точек $\omega(\pm 1) = \pm l$;
3) условие на бесконечности $\psi(\zeta) \to {}^1/_2\,(\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty})$ при $\zeta \to \infty$.

Получаем

$$B = C = D = 0, \qquad A = E = l, \qquad F = {}^1/_4\,(\sigma_y^{\infty} - 5\sigma_x^{\infty}) \tag{2.4}$$

Окончательно решение записывается в виде

$$\varphi(\zeta) = \frac{4(\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty})\,\zeta^2 + \sigma_y^{\infty} - 5\sigma_x^{\infty}}{16\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} \tag{2.5}$$

$$\chi(\zeta) = l(1 - \zeta^2)\sqrt{\zeta^2 - 1} - l\zeta^3, \qquad \omega(\zeta) = l(1 - \zeta^2)\sqrt{\zeta^2 - 1} + l\zeta^3$$

Граница выпученной зоны при всех значениях параметров нагружения σ_x^{∞} и σ_y^{∞} является астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. Таким образом, при $\sigma_y^{\infty} < 5\sigma_x^{\infty}$ имеем два различных решения поставленной задачи: решение работы [1] и решение (2.5). Можно показать, что однолистных решений, ограниченных почти всюду в области изменения x и y, больше не существует. Отметим, что условие однолистности является существенным, так как можно показать, что, например, существует (но неоднолистное) решение поставленной задачи в классе функций (напряжений), ограниченных в концах отрезка $(-l, +l)$ и неограниченных в точке возврата, являющейся образом точки $\zeta = 0$. От решения исходной задачи местного выпучивания потребуем, чтобы оно было корректным, т. е. непрерывно зависящим от параметров почти всюду в области изменения переменных x и y.

В указанном смысле решение (2.5) будет некорректным, так как при $\sigma_y^\infty = \sigma_x^\infty$ оно не переходит в решение соответствующей упругой задачи (при этом значении параметров нагружения выпучивания не происходит). Напротив, решение работы [1] будет, как легко проверить, корректным во всей области его существования при $\sigma_x^\infty \leqslant \sigma_y^\infty \leqslant 5\sigma_x^\infty$. В то же время решение работы [1] и решение (2.5) совпадают при $\sigma_y^\infty = 5\sigma_x^\infty$. Из всего этого следует теорема.

Теорема 2. Решение исходной задачи существует и единственно в классе корректных почти всюду ограниченных однолистных решений, причем в области изменения параметров $\sigma_x^\infty \leqslant \sigma_y^\infty \leqslant 5\sigma_x^\infty$ решение дается формулами работы [1], а в остальной области $5\sigma_x^\infty < \sigma_y^\infty$ решение дается формулами (2.5).

Отметим, что математическое допущение о неограниченности (сжимающих) напряжений в окрестности точки возврата ($\zeta = 0$) зоны выпучивания физически объясняется наличием в любой мембране некоторой (хотя бы весьма малой) изгибной жесткости, что вызывает большие напряжения, необходимые для потери устойчивости очень короткого элемента мембраны в окрестности точки возврата.

Поступила 30 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О выпучивании мембран с отверстиями при растяжении. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.

О НАЧАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО ГЛАДКОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА ПРИ УДАРЕ

В. А. Свекло
(Калининград)

Известные результаты Е. А. Нарышкиной используются для подсчета начальных напряжений в точках области контакта упругих тел при отсутствии трения.

§ 1. Заменяя упомянутые тела полупространствами $z_j \geqslant 0$, подверженными действию в области контакта только нормальной нагрузки, получим для смещений точек в направлении осей OZ_j [1]

$$\int_0^{t_0} W_j(x_0, y_0, z_{j0}, t)\, dt = -\frac{1}{8\pi\rho_j}\left(\frac{\partial M^j}{\partial z_{j0}} + \frac{\partial N_3^j}{\partial x_0} - \frac{\partial N_4^j}{\partial y_0}\right) \tag{1.1}$$

где M^j при нулевых начальных данных и массовых силах имеют вид

$$M^j = \iiint\limits_{T_j} W_{j1}^\circ \sigma_z\, dT \qquad (j = 1, 2) \tag{1.2}$$

Область T_j — трех измерений принадлежит гиперплоскости $z_j = 0$; смещения точек W_{j1}° в направлении тех же осей определяются фундаментальными решениями продольного типа; величины N_3^j и N_4^j получаются из (1.2) заменой W_{j1}° на соответствующие смещения от фундаментальных решений поперечного типа.