О РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А. И. Победоносцев
(Куйбышев)

Рассматривается задача об упругом равновесии полуплоскости с круглым отверстием под действием произвольной внешней нагрузки на круговой и прямолинейной части контура. Решение задачи дается в системе биполярных координат в виде функции напряжений, представляющей собой обобщение функции, полученной Джеффери [1] для эксцентрического кольца.

1. Наиболее полное решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной двумя окружностями, в частности, для полуплоскости с круглым отверстием, дано Джеффери [1]. Это решение построено для случая действия на границах области произвольных внешних сил, представленных рядами Фурье, и дано в биполярных координатах функцией напряжений, имеющей, с учетом требования однозначности смещений, вид [2]

$$g\Phi = G(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\beta + B_0(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\alpha + F(\beta\sin\beta + \nu\alpha\operatorname{sh}\alpha) + H(\beta\operatorname{sh}\alpha - \nu\alpha\sin\beta) + \sum_{n=1}^{\infty}[f_n^s(\alpha)\cos n\beta + f_n^s(\alpha)\sin n\beta] \qquad (1.1)$$

где (1.2)

$$f_n^c(\alpha) = A_n^c\operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n^c\operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_n^c\operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n^c\operatorname{sh}(n-1)\alpha \qquad (n\geqslant 2)$$

$$f_n^s(\alpha) = A_n^s\operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n^s\operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_n^s\operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n^s\operatorname{sh}(n-1)\alpha \qquad (n\geqslant 2)$$

$$f_1^c(\alpha) = A_1^c\operatorname{ch}2\alpha + B_1^c + C_1^c\operatorname{sh}2\alpha, \qquad f_1^s(\alpha) = A_1^s\operatorname{ch}2\alpha + C_1^s\operatorname{sh}2\alpha$$

Однако, несмотря на большое число частных задач, решенных методом Джеффери, вопрос о сходимости этого решения в общем случае остается открытым. Нетрудно убедиться в том, что для полуплоскости с отверстием решение (1.1) может приводить к расходящимся рядам.

В самом деле, рассмотрим простейший случай равновесия полуплоскости с отверстием, когда прямолинейная граница свободна от напряжений, а круговая загружена произвольной, не самоуравновешенной системой сил (уравновешивание происходит на бесконечности). Тогда метод Джеффери приводит к следующим выражениям для f_n^c и f_n^s на прямолинейной границе ($\alpha = 0$):

$$nf_n^{c\prime}(0) = -nB_0 + nf_1^{c\prime}(0), \qquad nf_n^{s\prime}(0) = 2H \qquad (1.3)$$

$$n(n^2-1)f_n^c(0) = -2nF, \qquad n(n^2-1)f_n^s(0) = -2G$$

где B_0, H, F и G определяются в зависимости от действующих на круговой границе сил, и, вообще, отличны от нуля.

Таким образом, выполнение необходимых условий сходимости и допустимости двукратного (для определения напряжений) дифференцирования ряда (1.1)

$$nf_n^{c\prime}(0)\to 0, \quad n(n^2-1)f_n^c(0)\to 0, \quad nf_n^{s\prime}(0)\to 0, \quad n(n^2-1)f_n^s(0)\to 0 \quad \text{при } n\to\infty \qquad (1.4)$$

не имеет места и, следовательно, решение (1.1) для этого случая неприменимо.

Отметим без доказательства, что для эксцентрического кольца (не имеющего бесконечно-удаленных точек) условия (1.4) выполняются при наличии равновесия внешних сил в целом всегда.

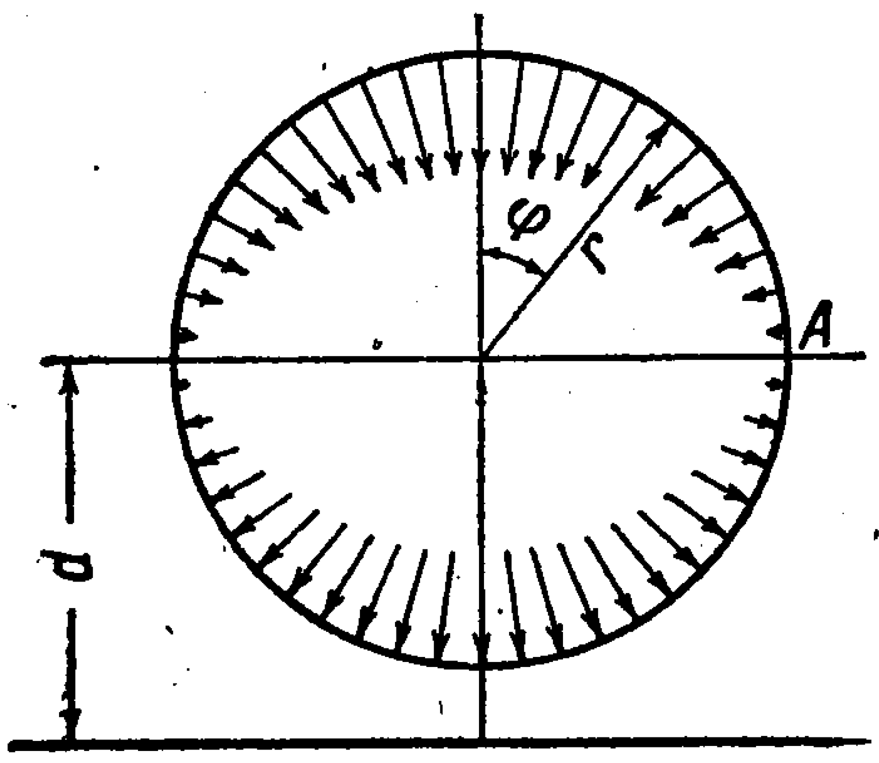
Ниже дается решение плоской задачи теории упругости для полуплоскости с отверстием, пригодное для более широкого круга задач, чем решение Джеффери.

2. Воспользуемся биполярной системой координат, получаемой из декартовой путем преобразования [2]

$$x = a \sin \beta \,/\, (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta), \qquad y = a \operatorname{sh} \alpha \,/\, (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)$$

Рассматриваемая область ограничена прямой $\alpha = 0$ и окружностью $\alpha = \gamma$.

Пусть на границах области приложены внешние силы, представленные в виде рядов Фурье (2.1)



Фиг. 1

$$a\tau_{\alpha\beta} = a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos n\beta + b_n' \sin n\beta)$$

$$\text{при } \alpha = \gamma$$

$$a\sigma_\alpha = c_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n' \cos n\beta + d_n' \sin n\beta)$$

$$a\tau_{\alpha\beta} = a_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'' \cos n\beta + b_n'' \sin n\beta)$$

$$\text{при } \alpha = 0$$

$$a\sigma_\alpha = c_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n'' \cos n\beta + d_n'' \sin n\beta)$$

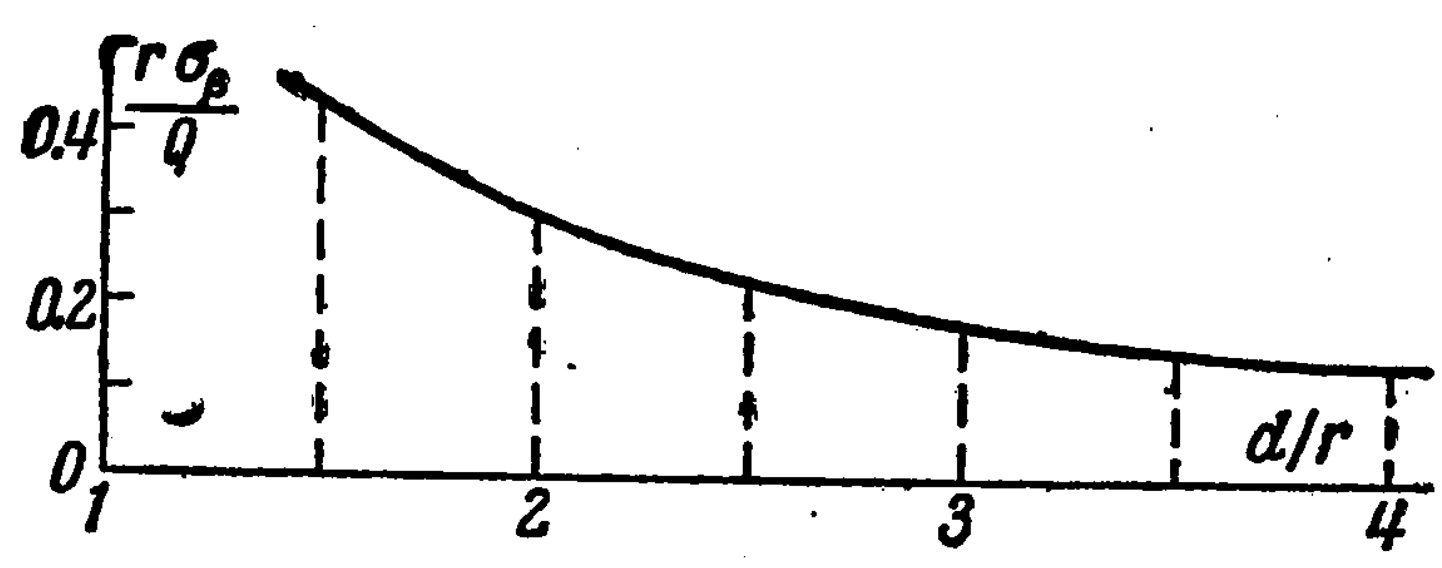
Кроме условий представимости рядами Фурье другие необходимые ограничения будут выяснены в дальнейшем.

Компоненты равнодействующей и момент внешних сил, приложенных к границе $\alpha = \gamma$, могут быть определены по известным формулам

$$X = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n' - d_n') e^{-n\gamma}$$

$$Y = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n (c_n' + b_n') e^{-n\gamma}$$

$$M = \frac{2\pi}{\operatorname{sh}^2 \gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n' e^{-n\gamma} \qquad (2.2)$$



Фиг. 2

Компоненты равнодействующей внешних сил, приложенных к границе $\alpha = 0$, могут быть и неограниченными.

Таким образом, задача сводится к определению бигармонической функции напряжений, удовлетворяющей в рассматриваемой области условиям однозначности смещений и граничным условиям (2.1).

3. Возьмем функцию напряжений в виде

$$g\Phi = G (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \beta + B_0 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \alpha + F (\beta \sin \beta + \nu \alpha \operatorname{sh} \alpha) +$$

$$+ H (\beta \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha \sin \beta) + (K \operatorname{ch} \alpha - K \cos \beta + L \operatorname{sh} \alpha + T \sin \beta) \ln (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) -$$

$$- L\alpha \operatorname{sh} \alpha - T\alpha \sin \beta + (R \sin \beta + U \operatorname{ch} \alpha - U \cos \beta + W \operatorname{sh} \alpha) \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta}{e^\alpha - \cos \beta} +$$

$$+ \frac{P \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n^c (\alpha) \cos n\beta + f_n^s (\alpha) \sin n\beta] \qquad \left(\nu = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) \qquad (3.1)$$

где $f_n^c (\alpha)$ и $f_n^s (\alpha)$ определяются формулами (1.2); ν — величина, зависящая от упругих постоянных.

От функции напряжений Джеффери (1.1) эта функция отличается наличием членов, имеющих особенносcти в бесконечно-удаленной точке $\alpha = \beta = 0$ и учитывающих возможность уравновешивания внешних сил на бесконечности. Не имеющие особенностей члены $L\alpha$ sh α и $T\alpha$ sin β необходимы для выполнения условия однозначности смещений. Рассмотрим более подробно решение при симметричном загружении.

В этом случае функция напряжений будет содержать только члены, четные относительно β

$$g\Phi = B_0(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\,\alpha + F(\beta\sin\beta + \nu\alpha\operatorname{sh}\alpha) - L\alpha\operatorname{sh}\alpha + (K\operatorname{ch}\alpha - K\cos\beta +$$

$$+ L\operatorname{sh}\alpha)\ln(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) + R\sin\beta\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{e^{\alpha} - \cos\beta} + \sum_{n=1} f_n^c(\alpha)\cos n\beta \tag{3.2}$$

Граничные условия будут:

$$a\tau_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'\sin n\beta,\quad a\sigma_\alpha = c_0' + \sum_{n=1}^{\infty} c_n'\cos n\beta \qquad \text{при } \alpha = \gamma \tag{3.3}$$

$$a\tau_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''\sin n\beta,\quad a\sigma_\alpha = c_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} c_n''\cos n\beta \qquad \text{при } \alpha = 0$$

Определяя по функции (3.2) напряжения на границах области, раскладывая их в ряды Фурье и приравнивая их выражениям (3.3), получим четыре системы уравнений

$$-2f_2^{c'}(\gamma) + 2f_1^{c'}(\gamma)\operatorname{ch}\gamma - 2B_0\operatorname{ch}\gamma - 2L\operatorname{ch}\gamma + 4L\operatorname{sh}^2\gamma e^{-\gamma} - R\operatorname{ch}\gamma +$$

$$+ 2R\operatorname{sh}^2\gamma e^{-\gamma} - 2K\operatorname{sh}\gamma = 2b_1'$$

$$-3f_3^{c'}(\gamma) + 2\cdot 2f_2^{c'}(\gamma)\operatorname{ch}\gamma - f_1^{c'}(\gamma) + B_0 + 4L\operatorname{sh}^2\gamma e^{-2\gamma} + \frac{1}{2}R + 2R\operatorname{sh}^2\gamma e^{-2\gamma} = 2b_2'$$

$$-(n+1)f_{n+1}^{c'}(\gamma) + 2nf_n^{c'}(\gamma)\operatorname{ch}\gamma - (n-1)f_{n-1}^{c'}(\gamma) + 4L\operatorname{sh}^2\gamma e^{-n\gamma} +$$

$$+ 2R\operatorname{sh}^2\gamma e^{-n\gamma} = 2b_n' \quad (n \geqslant 3) \tag{3.4}$$

$$2f_1^c(\gamma) - B_0\operatorname{sh}2\gamma - 3F - 2F\nu\operatorname{sh}^2\gamma + 4L\operatorname{sh}^2\gamma - 4L\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma + \frac{3}{2}R -$$

$$- R\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma + R\operatorname{sh}^2\gamma - K\operatorname{ch}2\gamma = 2c_0'$$

$$2\cdot 3f_2^c(\gamma) - 2f_1^{c'}(\gamma)\operatorname{sh}\gamma + 2B_0\operatorname{sh}\gamma + 4F\operatorname{ch}\gamma + 4L\operatorname{sh}^2\gamma e^{-\gamma} - 2L\operatorname{sh}\gamma -$$

$$- R\operatorname{ch}\gamma - Re^{-\gamma} + 2R\operatorname{sh}^2\gamma e^{-\gamma} + 2K\operatorname{ch}\gamma = 2c_1'$$

$$3\cdot 4f_3^c(\gamma) - 2\cdot 3f_2^c(\gamma)\operatorname{ch}\gamma - 2f_2^{c'}(\gamma)\operatorname{sh}\gamma - F + 4L\operatorname{sh}^2\gamma e^{-2\gamma} + \frac{1}{2}R +$$

$$+ 2R\operatorname{sh}^2\gamma e^{-2\gamma} - K = 2c_2'$$

$$(n+1)(n+2)f_{n+1}^c(\gamma) - 2(n^2-1)f_n^c(\gamma)\operatorname{ch}\gamma + (n-1)(n-2)f_{n-1}^c(\gamma) -$$

$$- 2f_n^{c'}(\gamma)\operatorname{sh}\gamma + 4L\operatorname{sh}^2\gamma e^{-n\gamma} + 2R\operatorname{sh}^2\gamma e^{-n\gamma} = 2c_n' \qquad (n \geqslant 3) \tag{3.5}$$

$$-2f_2^{c'}(0) + 2f_1^{c'}(0) - 2B_0 - R - 2L = 2b_1''$$

$$-3f_3^{c'}(0) + 2\cdot 2f_2^{c'}(0) - f_1^{c'}(0) + B_0 + \frac{1}{2}R = 2b_2''$$

$$-(n+1)f_{n+1}^{c'}(0) + 2nf_n^{c'}(0) - (n-1)f_{n-1}^{c'}(0) = 2b_n'' \qquad (n \geqslant 3) \tag{3.6}$$

$$2f_1^c(0) - 3F + \frac{3}{2}R - K = 2c_0''$$

$$2\cdot 3f_2^c(0) + 4F - 2R + 2K = 2c_1''$$

$$3\cdot 4f_3^c(0) - 2\cdot 3f_2^c(0) - F + {}^1/_2R - K = 2c_2'' \tag{3.7}$$

$$(n+1)(n+2)f_{n+1}^c(0) - 2(n^2-1)f_n^c(0) + (n-1)(n-2)f_{n-1}^c(0) = 2c_n'' \quad (n \geqslant 3)$$

Эти системы легко решаются методом, изложенным в [1]. В результате их решения получаем

$$
\begin{gathered}
n f_n^{c\prime}(\gamma) = \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma}\left[f_1^{c\prime}(\gamma) - B_0 - 2Le^{-2\gamma} - \frac{R}{2}e^{-2\gamma} - 2K\operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} - 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{-p\gamma}\right]e^{n\gamma} + \\
+ \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma}\left[-f_1^{c\prime}(\gamma) + B_0 + 2Le^{-2\gamma} - 2L\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma - 2Ln\operatorname{sh}^2\gamma + \frac{R}{2}e^{-2\gamma} - \right. \\
\left. - Rn\operatorname{sh}^2\gamma + 2K\operatorname{sh}\gamma e^{\gamma} + 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{p\gamma}\right]e^{-n\gamma} \qquad (n \geqslant 2)
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

$$
n f_n^{c\prime}(0) = \left[f_1^{c\prime}(0) - B_0 - 2L - \frac{R}{2} - 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p''\right]n + 2L + 2\sum_{p=1}^{n-1} p b_p'' \qquad (n \geqslant 2)
$$

$$
\begin{gathered}
n(n^2-1) f_n^{c}(\gamma) = \frac{1}{2\operatorname{sh}\gamma}\left[f_1^{c\prime}(\gamma) - 2Le^{-2\gamma} - \frac{R}{2}e^{-2\gamma} - 2K\operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} - B_0 - \right. \\
\left. - 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{-p\gamma}\right] n e^{n\gamma} + \frac{\operatorname{ch}\gamma}{2\operatorname{sh}^2\gamma}\left[-f_1^{c\prime}(\gamma) + 2Le^{-2\gamma} + \frac{R}{2}e^{-2\gamma} + \right. \\
\left. + 2K\operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} + B_0 + 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{-p\gamma}\right]e^{n\gamma} + \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma}\left[-F + \sum_{p=1}^{n-1} p(b_p' + c_p')e^{-p\gamma}\right]e^{n\gamma} + \\
+ \operatorname{sh}\gamma\,[2L + R]\, n^2 e^{-n\gamma} + \frac{1}{2\operatorname{sh}\gamma}\left[f_1^{c\prime}(\gamma) - 2Le^{-2\gamma} - Re^{-2\gamma} + \frac{R}{2}e^{2\gamma} - 2K\operatorname{sh}\gamma e^{\gamma} - \right. \\
\left. - B_0 - 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{p\gamma}\right] n e^{-n\gamma} + \frac{\operatorname{ch}\gamma}{2\operatorname{sh}^2\gamma}\left[f_1^{c\prime}(\gamma) - 2Le^{-2\gamma} - \frac{R}{2}e^{-2\gamma} - 2K\operatorname{sh}\gamma e^{\gamma} - B_0 - \right. \\
\left. - 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{p\gamma}\right]e^{-n\gamma} + \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma}\left[F - 2L\operatorname{sh}^2\gamma + \sum_{p=1}^{n-1} p(b_p' - c_p')e^{p\gamma}\right]e^{-n\gamma} \qquad (n \geqslant 2)
\end{gathered}
$$

$$
n(n^2-1) f_n^{c}(0) = -2nF + nR - 2K + 2\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)\,p c_p'' \qquad (n \geqslant 2)
$$

$$
\begin{gathered}
f_1^{c}(\gamma) = c_0' + B_0\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma + \frac{3}{2}F + F\nu\operatorname{sh}^2\gamma + 2L\operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} - \\
- \frac{3}{4}R + \frac{R}{2}\operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} + \frac{1}{2}K\operatorname{ch}2\gamma
\end{gathered}
$$

$$
f_1^{c}(0) = c_0'' + \frac{3}{2}F - \frac{3}{4}R + \frac{1}{2}K
$$

Рассмотрим подробное выражение для $n f_n^{c\prime}(\gamma)$. Его можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
n f_n^{c\prime}(\gamma) = \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma}\left[f_1^{c\prime}(\gamma) - B_0 - 2Le^{-2\gamma} - \frac{R}{2}e^{-2\gamma} - 2K\operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} - 2\sum_{p=1}^{\infty} b_p' e^{-p\gamma}\right]e^{n\gamma} + \\
+ \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma}\left\{\left[-f_1^{c\prime}(\gamma) + B_0 + 2Le^{-2\gamma} - 2L\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma - 2Ln\operatorname{sh}^2\gamma + \frac{R}{2}e^{-2\gamma} - \right.\right. \\
\left.\left. - Rn\operatorname{sh}^2\gamma + 2K\operatorname{sh}\gamma e^{\gamma} + 2\sum_{p=1}^{n-1} b_p' e^{p\gamma}\right]e^{-n\gamma} + 2\sum_{p=n}^{\infty} b_p' e^{(n-p)\gamma}\right\} \qquad (n \geqslant 2)
\end{gathered}
$$

Необходимым условием стремления этого выражения к нулю будет обращение в нуль коэффициента при $e^{n\gamma}$

$$f_1^{c\prime}(\gamma) - B_0 - 2Le^{-2\gamma} - \frac{1}{2} Re^{-2\gamma} - 2K \operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} - 2\sum_{p=1}^{\infty} b_p' e^{-p\gamma} = 0$$

Аналогично из требований $nf_n^{c\prime}(0) \to 0$ и $n(n^2-1) f_n^c \to 0$ вытекает необходимость выполнения следующих условий:

$$f_1^{c\prime}(\gamma) - B_0 - 2Le^{-2\gamma} - \frac{1}{2} \mathrm{R}e^{-2\gamma} - 2K \operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma} - 2\sum_{p=1}^{\infty} b_p' e^{-p\gamma} = 0$$

$$f_1^{c\prime}(0) - B_0 - 2L - \frac{1}{2} R - 2\sum_{p=1}^{\infty} b_p'' = 0$$

$$L + \sum_{p=1}^{\infty} pb_p'' = 0, \qquad F - \sum_{p=1}^{\infty} p(b_p' + c_p') e^{-p\gamma} = 0 \tag{3.9}$$

$$2F - R - 2\sum_{p=1}^{\infty} pc_p'' = 0, \qquad K - \sum_{p=1}^{\infty} p^2 c_p'' = 0$$

Последние четыре условия (3.9) определяют постоянные L, R, F и K.

Первые два уравнения (3.9) совместно с последними уравнениями (3.8) дают возможность определить B_0 и входящие в выражение (1.2) для $f_1^c(\alpha)$ коэффициенты A_1^c, B_1^c и C_{1k}^c. Остальных уравнений (3.8) достаточно для определения постоянных A_n^c; B_n^c, C_n^c и D_n^c.

Совершенно аналогично решается задача при антисимметричном загружении границ области. В этом случае для постоянных коэффициентов функции напряжений получаем

$$\mathfrak{D} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\gamma} \sum_{p=0}^{\infty} a_p' e^{-p\gamma} + \operatorname{cth}\gamma \sum_{p=1}^{\infty} p(a_p' - d_p') e^{-p\gamma}$$

$$H = -\sum_{p=1}^{\infty} p(a_p' - d_p') e^{-p\gamma}$$

$$U = -\frac{2}{\operatorname{sh}^2\gamma} \sum_{p=0}^{\infty} a_p' e^{-p\gamma} + 2\operatorname{cth}\gamma \sum_{p=1}^{\infty} p(a_p' - d_p') e^{-p\gamma} + 2\sum_{p=1}^{\infty} p^2 d_p'' \tag{3.10}$$

$$W = -2\sum_{p=1}^{\infty} p(a_p' - d_p') e^{-p\gamma} - 2\sum_{p=1}^{\infty} pa_p'', \quad P = \sum_{p=0}^{\infty} a_p'', \quad T = -\sum_{p=1}^{\infty} pd_p''$$

Выражения (3.9) и (3.10) дают возможность найти ограничения, накладываемые на внешние нагрузки условиями сходимости: коэффициенты Фурье для нагрузок на прямолинейной границе должны удовлетворять требованиям сходимости рядов

$$\sum pa_p'', \quad \sum pb_p'', \quad \sum p^2 c_p'', \quad \sum p^2 d_p''$$

На круговой границе никаких добавочных ограничений нет.

Таким образом, все коэффициенты функции напряжений (3.2) могут быть определены. Следует отметить, что выполнение необходимых условий (3.9) не будет достаточным для сходимости получаемых рядов. В качестве достаточных условий можно указать условия сходимости рядов

$$\sum nf_n^{c\prime}(\gamma), \quad \sum nf_n^{c\prime}(0); \quad \sum n(n^2-1) f_n^c(\gamma), \quad \sum n(n^2-1) f_n^c(0)$$

однако, по-видимому, можно найти и более слабые достаточные условия.

4. В качестве примера рассмотрим полуплоскость с круглым отверстием (фиг. 1) под действием нагрузки, распределенной по контуру отверстия по закону

$$a\sigma_\alpha = p\cos\varphi = \frac{Q}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma\cos\beta - 1}{\operatorname{ch}\gamma - \cos\beta}, \qquad a\tau_{\alpha\beta} = 0$$

Прямолинейная граница свободна от нагрузки. Тогда

$$a_n' = b_n' = d_n' = a_n'' = b_n'' = c_n'' = d_n'' = 0, \qquad c_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi a\sigma_\alpha d\beta = -\frac{Q\operatorname{sh}\gamma}{\pi}e^{-\gamma}$$

$$c_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi a\sigma_\alpha\cos n\beta\,d\beta = \frac{2Q\operatorname{sh}^2\gamma}{\pi}e^{-n\gamma} \qquad (n \geqslant 1)$$

По формулам (3.9) получаем

$$L = K = 0, \qquad F = \frac{Q}{2\pi}, \qquad R = \frac{Q}{\pi}$$

Первые два уравнения (3.9) совместно с уравнениями (3.8) дают с учетом (1.2)

$$A_1^c\operatorname{ch}2\gamma + B_1^c + C_1^c\operatorname{sh}2\gamma - B_0\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\gamma = \frac{Q}{2\pi}(\nu\operatorname{sh}^2\gamma - \operatorname{sh}\gamma e^{-\gamma})$$

$$2A_1^c\operatorname{sh}2\gamma + 2C_1^c\operatorname{ch}2\gamma - B_0 = \frac{Q}{2\pi}e^{-2\gamma}, \qquad A_1^c + B_1^c = 0, \qquad 2C_1^c - B_0 = \frac{Q}{2\pi}$$

$$A_n^c\operatorname{ch}(n+1)\gamma + B_n^c\operatorname{ch}(n-1)\gamma + C_n^c\operatorname{sh}(n+1)\gamma + D_n^c\operatorname{sh}(n-1)\gamma = 0$$

$$(n+1)A_n^c\operatorname{sh}(n+1)\gamma + (n-1)B_n^c\operatorname{sh}(n-1)\gamma + (n+1)C_n^c\operatorname{ch}(n+1)\gamma + $$
$$+ (n-1)D_n^c\operatorname{ch}(n-1)\gamma = -\frac{Q}{\pi}\operatorname{sh}\gamma e^{-n\gamma}$$

$$A_n^c + B_n^c = 0, \qquad (n+1)C_n^c + (n-1)D_n^c = 0$$

Решая эти уравнения и подставляя найденные значения в (3.2), получим окончательное выражение функции напряжений

$$g\Phi = \frac{Q}{2\pi}(2\operatorname{cth}^2\gamma - 2\operatorname{cth}\gamma - \nu\operatorname{cth}\gamma)(\alpha\operatorname{ch}\alpha - \alpha\cos\beta) + \frac{Q}{2\pi}(\beta\sin\beta + \nu\alpha\operatorname{sh}\alpha) +$$
$$+ \frac{Q}{\pi}\sin\beta\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{e^\alpha - \cos\beta} + \frac{Q}{4\pi}(1 + \nu - 2\operatorname{cth}\gamma)\operatorname{ch}2\alpha\cos\beta +$$
$$+ \frac{Q}{4\pi}(-1 - \nu + 2\operatorname{cth}\gamma)\cos\beta + \frac{Q}{4\pi}(2\operatorname{cth}^2\gamma + 1 - 2\operatorname{cth}\gamma - \nu\operatorname{cth}\gamma)\operatorname{sh}2\alpha\cos\beta +$$
$$+ \frac{Q\operatorname{sh}\gamma}{\pi}\sum_{n=2}^\infty \frac{\operatorname{sh}n\gamma\operatorname{sh}n\alpha\operatorname{sh}(\gamma-\alpha) - n\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}n(\gamma-\alpha)}{\operatorname{sh}^2 n\gamma - n^2\operatorname{sh}^2\gamma}e^{-n\gamma}\cos n\beta$$

На фиг. 2 показан характер зависимости напряжений σ_β в точке A (фиг. 1) от положения отверстия относительно прямолинейной границы полуплоскости.

Поступила 12 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1920—1921, ser. A, v. 221, p. 265.
2. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Гостехтеоретиздат. 1950