О ПРИБЛИЖЕННОМ УЧЕТЕ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ ТИПА СЕН-ВЕНАНА В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ПЛИТ

У. К. Нигул (Таллин)

Ляв [1] рассматривал частные решения уравнений трехмерной теории упругости типа основного напряженного состояния. А. И. Лурье [2, 3] выявил при помощи символического метода две бесконечные последовательности частных решений типа краевых эффектов Сен-Венана. Однако даже простейшие краевые задачи, при которых существует напряженное состояние краевого эффекта, решены на основе трехмерной теории упругости лишь с применением смягченных краевых условий [2–4]. Поэтому заслуживает внимания разработка приближенных методов решения краевых задач с учетом краевых эффектов типа Сен-Венана.

В работах [5–7] был предложен асимптотический при $a \to 0$ (a — относительная толщина плиты) метод построения уравнений, последовательно определяющих частные решения типа основного напряженного состояния и краевых эффектов с асимптотической погрешностью порядка a, a^2, a^3 ,...; в работе Фридрихса и Дресслера [6] были указаны краевые условия для этих уравнений в случае свободного края; А. Л. Гольденвейзером [7] рассмотрены также другие краевые задачи. В работе [8] был применен иной вариант асимптотического (при $a \to 0$) метода, основывающийся на применении частных решений, известных из [2]; в частности была исследована [8] асимптотическая погрешность теории Кирхгоффа при некоторых краевых задачах. Однако проблемы приближенного численного решения краевых задач остались мало изученными.

Ниже применяется приближенный способ решения краевых задач, основывающийся на разложении основного напряженного состояния и краевых эффектов в ряды полиномов Лежандра по координате, нормальной к срединной поверхности. В качестве конкретного примера рассматривается изгиб полосы, защемленной по краям и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой p по обеим торцевым поверхностям. Численные результаты получены, сохраняя от одного до четырех полиномов Лежандра в рядах перемещений и учитывая соответственно от нуля до трех пар краевых эффектов типа Сен-Венана. Решение появляется в виде разложения по целочисленным степеням a, имеющего существенно (более 100 раз) отличающиеся коэффициенты, из которых бо́льшие изменяются мало при последовательном увеличении количества учитываемых членов разложения по полиномам Лежандра. Из численных результатов вытекает три существенных вывода.

а) Надо с осторожностью подойти к применению асимптотических (при $a \to 0$) формул для расчета реальных плит с конечным значением относительной толщины a. В рассматриваемом примере поправки к изгибающему моменту теории Кирхгоффа имеют в асимптотическом смысле порядки величины a, a^2,... Однако при $a = \text{const} > {}^1/_{25}$ численные значения «вторых поправок» больше «первых»! В части прогиба (вне зон краевых эффектов) доминируют «вторые поправки» до $a = \text{const} > {}^1/_{100}$.

б) Численные значения поправок к теории Кирхгоффа сравнительно маленькие даже при довольно толстых плитах. Например, при $a = {}^1/_3$ поправка к изгибающему моменту в середине пролета составляет около 12%, а при $a = {}^1/_{10}$ — около 1.4%.

в) Следует сделать оговорку к выводу заметки [8] относительно точности теории типа Рейсснера. Хотя теория Рейсснера не определяет в данном случае поправки порядка a к теории Кирхгоффа, она может (при достаточно больших a) уточнить основное напряженное состояние плиты.

Отметим, что в [9,10] были разложены напряжения по полиномам Лежандра исходя непосредственно из уравнений трехмерной теории упругости. Ниже разлагаются в ряды полиномов Лежандра перемещения известных [2, 8] частных решений типа основного напряженного состояния и краевых эффектов.

1. Основные обозначения. Пусть E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина плиты, l — характерный размер срединной поверхности, $a = 2h / l$ — относительная толщина плиты; ξ, η, ζ — безразмерные (деленные на h) декартовые координаты, из которых ξ, η выбраны на срединной поверхности ($\zeta = 0$)

плиты; u_i $(i = 1, 2, 3)$ — безразмерные (деленные на h) перемещения в направлениях ξ, η, ζ соответственно; σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — безразмерные (умноженные на $(1 + \mu) E^{-1}$) напряжения; M_{rs}, Q_s $(r, s = 1, 2)$ — безразмерные моменты и поперечные силы; $P_{2m}(\zeta)$, $P_{2m+1}(\zeta)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — полиномы Лежандра. При этом

$$M_{rs} = \int_{-1}^{+1} \sigma_{rs}\zeta\, d\zeta, \qquad Q_s = \int_{-1}^{+1} \sigma_{s3}\, d\zeta \qquad (r, s = 1, 2) \tag{1.1}$$

$$P_0(\zeta) = 1, \qquad P_1(\zeta) = \zeta, \qquad P_2(\zeta) = {}^1/_2 (3\zeta^2 - 1), \ldots \tag{1.2}$$

Через q_j, $\bar{q}_j$ обозначим такие сопряженные корни [2,8] уравнения

$$\sin 2q = 2q \tag{1.3}$$

которые располагают свойством $\operatorname{Re} q_j < 0$. Пусть далее

$$\begin{aligned} g_j &= \left[\left(-\frac{\zeta q \cos q\zeta}{2 - 2\mu} + \frac{\cos^2 q \sin q\zeta}{2 - 2\mu} - \sin q\zeta\right) \frac{q}{\sin q}\right]_{q=q_j} \\ f_j &= \left[\left(\frac{\zeta q \sin q\zeta}{2 - 2\mu} - \frac{\sin^2 q \cos q\zeta}{2 - 2\mu} + \cos q\zeta\right) \frac{q}{\sin q}\right]_{q=q_j} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для сопряженных величин $\bar{g}_j, \bar{f}_j$ получим из (1.4) формулы, заменяя q_j на $\bar{q}_j$.

При описании краевых эффектов в близости поверхности $\xi = \text{const}$ применим координату ξ_*, направленную с края во внутренность плиты.

2. Расчет полосы. Идея применяемого способа состоит в разложении (на краевых плоскостях) в ряды P-функций тех величин, через которые сформулированы краевые условия и в их приближенном удовлетворении с точностью конечного числа членов рядов. Рассмотрим ее реализацию в случае бесконечной по η полосы, имеющей пролет l. Поместим начало координаты ξ в середине пролета, так что на краях

$$\xi = \pm \xi_0, \qquad \xi_* = 0, \qquad \xi_0 = \frac{l}{2h} = a^{-1} \tag{2.1}$$

Пусть полоса нагружена нормальной нагрузкой так, что на поверхностях $\zeta = \pm 1$

$$\sigma_{13}(\xi, \pm 1) = \sigma_{23}(\xi, \pm 1) = 0, \qquad \sigma_{33}(\xi, \pm 1) = \pm p, \qquad p = \text{const} \tag{2.2}$$

В данном случае напряженное состояние зависит от координат ξ, ζ и может быть представлено [8] как сумма основного напряженного состояния $(u_1^{(0)}, u_3^{(0)})$ и краевых эффектов $(u_1^{(1)}, u_3^{(1)})$, связанных с корнями уравнения (1.3). Итак

$$u_1 = u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \qquad u_2 = 0, \qquad u_3 = u_3^{(0)} + u_3^{(1)} \tag{2.3}$$

Предположим, что на краях $\xi = \xi_0$, $\xi = -\xi_0$ заданы одинаковые краевые условия. Воспользовавшись условиями симметрии, получим на основе [8] для перемещений следующие формулы:

а) *Основное напряженное состояние*

$$u_1^{(0)} = (-2\xi A_3 + U_1) P_1 + U_3 P_3 \tag{2.4}$$

$$u_3^{(0)} = \left[A_1 + \left(\xi^2 - \frac{6 - 4\mu}{3 - 3\mu}\right) A_3 + U_0\right] P_0 + \left[\frac{2}{3} \frac{\mu}{1 - \mu} A_3 + U_2\right] P_2 + U_4 P_4$$

$$\begin{gathered} U_0 = p\left(\frac{1 - \mu}{8} \xi^4 - \frac{3 - 2\mu}{2} \xi^2 + \frac{3 - 2\mu}{5}\right), \qquad U_1 = p\xi\left(-\frac{1 - \mu}{2} \xi^2 + \frac{3 - 9\mu}{5}\right) \\ U_2 = p\left(\frac{\mu}{2} \xi^2 + \frac{3 - 4\mu}{7}\right), \qquad U_3 = p\frac{2 - \mu}{5} \xi, \qquad U_4 = -p\frac{1 + \mu}{35} \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$M_{11}^{(0)} = p\left(-\xi^2 + \frac{2}{5}\right) - \frac{4}{3 - 3\mu} A_3, \qquad Q_1^{(0)} = -2p\xi \tag{2.6}$$

Здесь A_1, A_3 — постоянные интегрирования.

б) *Напряженное состояние краевых эффектов:* Предполагая, что l достаточно велика для раздельного построения краевых эффектов, т. е.

$$\max(\exp q_j \xi_0) \sim \exp(-3.749\xi_0) \ll 1 \tag{2.7}$$

имеем формулы [8]

$$u_r^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} (u_{rj}^{(1)} + \bar{u}_{rj}^{(1)}), \qquad u_{1j}^{(1)} = g_j C_j e^{q_j \xi_*}, \qquad u_{3j}^{(1)} = f_j C_j e^{q_j \xi_*} \qquad (r = 1, 3) \tag{2.8}$$

Здесь $\bar{u}_{rj}^{(1)}$ являются сопряженными с $u_{rj}^{(1)}$, а C_j, $\bar{C}_j$ — взаимносопряженными постоянными интегрирования. Представление $u_1^{(1)}$, $u_3^{(1)}$ при $\xi_* = 0$ (на краевых плоскостях) в виде ряда P-функций приводит к разложению функций (1.4) вида

$$g_j = \sum_{m=0}^{\infty} (G_{j,\,2m+1} + iG_{j,\,2m+1}^*)\, P_{2m+1}, \qquad f_j = \sum_{m=0}^{\infty} (F_{j2m} + iF_{j2m}^*)\, P_{2m} \tag{2.9}$$

где $G_{j,\,2m+1}$, $G_{j,\,2m+1}^*$, F_{j2m}, F_{j2m}^* — вещественные численные коэффициенты. Были найдены их значения при $\mu = 0.3$, $j = 1, 2, 3$; $m = 0, 1, 2, 3$.

Нетрудно было бы выписать формулы типа (2.4), (2.8) также для напряжений. Интересно отметить, что разложение напряжений краевых эффектов в ряды P-функций дает нулевые обобщенные коэффициенты Фурье для P_0 и P_1. Это значит, что

$$M_{11}^{(1)} = Q_1^{(1)} = 0 \tag{2.10}$$

Пример. Зададим краевые условия

$$u_1 = u_3 = 0 \quad \text{при } \xi = \pm \xi_0 \tag{2.11}$$

и примем $\mu = 0.3$. Приравнивая к нулю обобщенные коэффициенты Фурье разложений перемещений по P-функциям, получим из (2.11) бесконечную систему алгебраических уравнений относительно A_1, A_3, X_j, Y_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$). Здесь принято

$$C_j = {}^1/_2 X_j + {}^1/_2 iY_j, \qquad \bar{C}_j = {}^1/_2 X_j - {}^1/_2 iY_j \tag{2.12}$$

Пусть эти уравнения пронумерованы соответственно индексам P-функций. Тогда уравнение 0 имеет нулевые коэффициенты при Y_j, уравнения *1*, *2*—при A_1, все следующие уравнения—при A_1 и A_3. Свободные члены $U_k(\xi_0)$ отличны от нуля только для пяти первых уравнений ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) и определяются по (2.5), полагая $\xi = \xi_0$.

Таблица 1

Приближение n	Величина	Коэффициенты при				
		$p\xi_0^4$	$p\xi_0^3$	$p\xi_0^2$	$p\xi_0$	p
1	A_1	0.0875	—	0.7700	—	—0.4143
	A_3	—	—	—0.1750	—	0.0300
2	A_1	0.0875	0.0056	0.7752	0.0629	—0.3506
	A_3	—	—	—0.1750	—0.0056	0.0395
	X_1	—	—	—0.0147	—0.0607	—0.0395
	Y_1	—	—	0.0109	—0.0083	0.0293
3	A_1	0.0875	0.0058	0.7778	0.0749	—0.3365
	A_3	—	—	—0.1750	—0.0058	0.0423
	X_1	—	—	—0.0169	—0.0640	—0.0431
	Y_1	—	—	0.0070	—0.0134	0.0228
	X_2	—	—	—0.0032	—0.0076	—0.0040
	Y_2	—	—	0.0046	0.0013	0.0094
4	A_1	0.0875	0.0067	0.7719	0.0745	—0.3450
	A_3	—	—	—0.1750	—0.0067	0.0426
	X_1	—	—	—0.0127	—0.0631	—0.0367
	Y_1	—	—	0.0085	—0.0137	0.0254
	X_2	—	—	—0.0005	—0.0070	—0.0001
	Y_2	—	—	0.0012	0.0012	0.0039
	X_3	—	—	—0.0012	—0.0016	—0.0011
	Y_3	—	—	0.0027	—0.0002	0.0046

Первым приближением ($n = 1$) будем называть решение, полученное из первых двух уравнений, сохраняя лишь неизвестные A_1, A_3; вторым приближением ($n = 2$) — решение, полученное из первых четырех уравнений, сохраняя неизвестные A_1, A_3, X_1, Y_1 и т. д.

В табл. 1 даны решения первого, второго, третьего и четвертого приближений ($n = 1, 2, 3, 4$). При этом опущены остаточные члены вида (2.13)

$$\frac{pc}{\xi_0 + d} \qquad (c < 0.05,\ d < 0.02)$$

Таблица 2

a	n	Поправки к изгибающему моменту теории Кирхгоффа в середине пролета (в %)		
		полные	«первого» порядка	«второго» порядка
$\frac{1}{3}$	1	11.4	—	11.4
	2	12.2	1.0	10.8
	3	12.1	1.1	10.6
	4	12.3	1.3	10.6
$\frac{1}{10}$	1	1.03	—	1.03
	2	1.30	0.32	0.97
	3	1.30	0.33	0.96
	4	1.35	0.38	0.96

Если сохранить в выражениях первого приближения для A_1, A_3 только главные члены (наибольшие степени ξ_0), то получим решение теории Кирхгоффа. Для иллюстрации в табл. 2 указаны (в процентах) поправки к изгибающему моменту теории Кирхгоффа в середине пролета. «Первыми» и «вторыми» поправками названы соответственно поправки, имеющие при $a \to 0$ порядок величины a и a^2. Выводы из табл. 1, 2 относительно основного напряженного состояния были указаны в вводной части. В зонах краевого эффекта рассматриваемые низкие приближения ($n \leqslant 4$) не гарантируют большой точности, но все-таки видно, что поправки к напряжениям, найденным по теории Кирхгоффа, численно небольшие, хотя в асимптотическом (при $\xi_0 = a^{-1} \to \infty$) смысле порядка $a^{(0)} \sim 1$.

Примечание. При применении описанного способа в задачах, где напряженное состояние изменяется также по η, следует сформулировать три краевых условия и определить перемещения в виде суммы

$$u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1)}$ по-прежнему обозначают перемещения основного напряженного состояния и краевых эффектов, связанных с корнями уравнения (1.3), а $u_i^{(2)}$ — перемещения краевых эффектов, связанных с корнями уравнения $\cos\lambda = 0$ [8] и имеющих вещественные коэффициенты Z_j. Перемещения $u_i^{(2)}$ также могут быть разложены в ряды P-функций, затем приближенное решение краевой задачи может быть получено аналогично вышеизложенному, причем искомыми являются также Z_j.

Поступила 30 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press, 1934.
2. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. VI, стр. 151.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
4. Reiss E. L. Symmetric bending of thick circular plates. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1962, vol. 10, No. 4.
5. Friedrichs K. O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. Proc. Sympos. Appl. Math., New York, 1950, vol. 5.
6. Friedrichs K. O., Dressler R. E. A boundary-layer theory for elastic plates. Commun. Pure and Appl. Math, 1961, vol. XIV, No. 1.
7. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
8. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний и двухмерных теорий упругих плит. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 3.
9. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1955, т. 21.
10. Понятовский В. В. К теории пластин средней толщины. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.