ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА

В. К. Прокопов (Ленинград)

В 1936 г. А. И. Лурье предложил символический метод составления частных решений уравнений теории упругости для слоя [1]; далее этот метод был им использован для получения дифференциальных уравнений теории толстых плит [2, 3].

Представляется заманчивым сочетать символический метод с принципом минимума потенциальной энергии, что дало бы возможность получить естественные граничные условия. При этом вариация потенциальной энергии будет содержать двойные интегралы от произведений символических операторов, причем вторыми сомножителями окажутся операторы над вариациями основных переменных. Для получения же дифференциальных уравнений (и краевых условий) надо иметь под двойными интегралами вариации основных переменных.

Произвести преобразование двойных интегралов к нужному виду оказывается возможным при помощи формулы, являющейся обобщением известной формулы Грина.

Используя обычные обозначения

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \triangle^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

т. д. для лаплассианов различного порядка, составим бесконечный ряд

$$\Psi(\triangle) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \triangle^r = a_0 + a_1\triangle + a_2\triangle^2 + \ldots \tag{1}$$

в котором коэффициенты a_r не зависят от основных переменных x и y; будем этот символический ряд называть в дальнейшем изложении оператором. Если $\Psi(\triangle)$ — оператор вида (1), то $\Psi(\triangle)\, u$, где u — функция x и y, имеет следующий смысл

$$\Psi(\triangle)\, u = a_0 u + a_1 \triangle u + a_2 \triangle^2 u + \ldots$$

Введем операцию снижения оператора, состоящую в отбрасывании некоторого числа первых его членов с одновременным понижением порядка оставшихся лаплассианов на то же число. Операцию снижения будем обозначать индексом снизу, причем значение индекса дает число отброшенных первых членов, т. е. порядок снижения [1]. Так, k-й сниженный оператор от оператора (1) представляется рядом

$$\Psi_k(\triangle) = \sum_{r=k}^{\infty} a_r \triangle^{r-k} = a_k + a_{k+1}\triangle + a_{k+2}\triangle^2 + \ldots \tag{2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint_{(\Omega)} \Phi(\triangle)\, u \cdot \Psi(\triangle)\, v\, dx\, dy, \tag{3}$$

содержащий произведение операторов над двумя независимыми одна от другой функциями $u(x, y)$, $v(x, y)$; интегрирование производится по некоторой области Ω, заключенной внутри контура L. Точка, стоящая между операторами в интеграле (3), обозначает не только умножение, но и окончание действия предыдущего оператора.

Поставим цель так преобразовать двойной интеграл (3), чтобы в окончательном его выражении отсутствовали лаплассианы от функции $v(x, y)$. Для этого представим оператор $\Psi(\triangle)$ рядом (1) и поменяем местами операции суммирования и интегрирования; тогда интеграл (3) примет вид

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \iint_{(\Omega)} \Phi(\triangle)\, u \cdot \triangle^r v\, dx\, dy \tag{4}$$

Используя формулу Грина

$$\iint_{(} (\varphi \cdot \triangle\psi - \triangle\varphi \cdot \psi)\, dx\, dy = \oint_{(L)} \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \psi\right) ds$$

[1] Некоторые коэффициенты оператора (1), включая и a_0, могут быть нулями.

интегрируем типовой член ряда (4) по частям; имеем

$$\iint\limits_{(\Omega)} \Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^r v\, dx\, dy = \oint\limits_{(L)} \Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{r-1}v\, ds -$$

$$-\oint\limits_{(L)} \frac{\partial}{\partial n}\Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^{r-1}v\, ds + \iint\limits_{(\Omega)} \Delta\Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^{r-1}v\, dx\, dy$$

Последнее слагаемое в этой формуле — двойной интеграл по области Ω — можно опять проинтегрировать по частям при помощи формулы Грина; повторяя эту операцию и дальше (всего для r-го члена ряда надо использовать формулу Грина r раз), приходим к выражению

$$\iint\limits_{(\Omega)} \Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^r v\, dx\, dy = \sum_{p=1}^{r}\oint\limits_{(L)} \Delta^{p-1}\Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{r-p}v\, ds -$$

$$-\sum_{p=1}^{r}\oint\limits_{(L)} \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{p-1}\Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^{r-p}v\, ds + \iint\limits_{(\Omega)} \Delta^r\Phi(\Delta)\, u\cdot v\, dx\, dy \tag{5}$$

Подстановка выражения (5) в формулу (4) дает

$$\iint\limits_{(\Omega)} \Phi(\Delta)\, u\cdot\Psi(\Delta)\, v\, dx\, dy = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{r} a_r \oint\limits_{(L)} \Delta^{p-1}\Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{r-p}v\, ds -$$

$$-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{r} a_r \oint\limits_{(L)} \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{p-1}\Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^{r-p}v\, ds + \sum_{r=0}^{\infty} a_r \iint\limits_{(\Omega)} \Delta^r\Phi(\Delta)\, u\cdot v\, dx\, dy \tag{6}$$

Рассмотрим первую двойную сумму в формуле (6). Изменим в этой сумме последовательность суммирования: вместо суммирования по p и затем по r будем суммировать сперва по r, а затем по $k = r - p + 1$; при этом степени лаплассианов будут $p - 1 = r - k$ и $r - p = k - 1$; внутреннее суммирование (по r) следует вести от k до ∞ (что вытекает из формулы $r = k + p - 1$, так как наименьшее $p = 1$), а внешнее суммирование (по k) ведется от 1 до ∞. Тогда, вспоминая определение сниженного оператора (2), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\oint\limits_{(L)} a_r\Delta^{r-k}\Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{k-1}v\, ds = \sum_{k=1}^{\infty}\oint\limits_{(L)} \Psi_k(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{k-1}v\, ds$$

Аналогичным образом преобразуется и вторая двойная сумма в соотношении (6); последняя ординарная сумма после перемены порядка суммирования и интегрирования даст под интегралом оператор $\Psi(\Delta)$. Учитывая сказанное, получим окончательную формулу преобразования интеграла (3)

$$\iint\limits_{(\Omega)} \Phi(\Delta)\, u\cdot\Psi(\Delta)\, v\, dx\, dy = \iint\limits_{(\Omega)} \Psi(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot v\, dx\, dy +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\oint\limits_{(L)}\left[\Psi_k(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial\Delta^{k-1}v}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\Psi_k(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^{k-1}v\right] ds \tag{7}$$

Эта формула представляет собой обобщение формулы Грина на случай бесконечных операторов. Формула (7) сохраняет свой вид и в пространственном случае; при этом двойные и криволинейные интегралы заменяются соответственно тройными и поверхностными, а оператор Лапласа становится трехмерным

$$\iiint\limits_{(V)} \Phi(\Delta)\, u\cdot\Psi(\Delta)\, v\, dV = \iiint\limits_{(V)} \Psi(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot v\, dV + \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\iint\limits_{(S)}\left[\Psi_k(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot\frac{\partial\Delta^{k-1}v}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\Psi_k(\Delta)\,\Phi(\Delta)\, u\cdot\Delta^{k-1}v\right] ds \tag{8}$$

Для одномерного случая наряду с оператором

$$\Psi(\partial) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \partial^n \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial^2\right) \tag{9}$$

надо ввести в рассмотрение сопряженный с ним оператор

$$\Psi^*(\partial) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \partial^n \tag{10}$$

Преобразование определенного интеграла

$$\int_a^b \Phi(\partial)\, u \cdot \Psi(\partial)\, v\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b \Phi(\partial)\, u \cdot \partial^n v\, dx \tag{11}$$

ведется последовательным интегрированием по частям. Для коэффициента при a_n в ряде (11) имеем

$$\int_a^b \Phi(\partial)\, u \cdot \partial^n v\, dx = \left[\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \partial^{p-1} \Phi(\partial)\, u \cdot \partial^{n-p} v\right]_{x=a}^{x=b} + (-1)^n \int_a^b \partial^n \Phi(\partial)\, u \cdot v\, dx \tag{12}$$

Подстановка соотношения (12) в ряд (11) дает

$$\int_a^b \Phi(\partial)\, u \cdot \Psi(\partial)\, v\, dx = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} a_n \partial^{p-1} \Phi(\partial)\, u \cdot \partial^{n-p} v\right]_{x=a}^{x=b} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \int_a^b \partial^n \Phi(\partial)\, u \cdot v\, dx \tag{13}$$

В двойной сумме, стоящей в формуле (13), изменим последовательность суммирования; сперва будем суммировать по n, а затем по $k = n - p + 1$. При этом внутреннее суммирование (по n) следует вести от k до ∞, а внешнее суммирование (по k) — от 1 до ∞. Таким образом,

$$\int_a^b \Phi(\partial)\, u \cdot \Psi(\partial)\, v\, dx = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n-k} a_n \partial^{n-k} \Phi(\partial)\, u \cdot \partial^{k-1} v\right]_{x=a}^{x=b} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \int_a^b \partial^n \Phi(\partial)\, u \cdot v\, dx \tag{14}$$

Сочетание формул (2) и (10) дает сниженный сопряженный оператор

$$\Psi_k^*(\partial) = \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n a_n \partial^{n-k} \tag{15}$$

Учитывая выражения (10) и (15), получим вместо формулы (14) окончательное соотношение

$$\int_a^b \Phi(\partial)\, u \cdot \Psi(\partial)\, v\, dx = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Psi_k^*(\partial)\, \Phi(\partial)\, u \cdot \partial^{k-1} v\right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \Psi^*(\partial)\, \Phi(\partial)\, u \cdot v\, dx \tag{16}$$

которое является обобщением формулы интегрирования по частям на случай бесконечных одномерных операторов.

Поступила 30 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, № 6, стр. 57.
2. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3, стр. 151.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1955, стр. 149.