Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ

Н. А. Ростовцев

(Комсомольск-на-Амуре)

В работе строится эффективное решение интегрального уравнения

$$w(x, y) = \iint p(\xi, \eta) \mathrm{K}(r)\, d\xi d\eta \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) \tag{0.1}$$

для эллиптической области в случае степенного ядра. $\mathrm{K}(r) = Cr^{-1-k}$. При этом уравнение (0.1) связывается с задачей Дирихле для некоторого дифференциального оператора второго порядка. Такой прием позволяет найти собственные функции уравнения (0.1), которые оказываются родственными эллипсоидальным функциям Ламе, и, в том случае, когда $w(x, y)$ — многочлен, вычислить $p(x, y)$, а также получить продолжение $w(x, y)$ за пределы области интегрирования. Попутно получаются формулы вычисления некоторых интегралов, аналогичных потенциалам, и находятся другие результаты, имеющие аналогии в теории Ньютонова потенциала и эллипсоидальных функций Ламе.

В теории линейно деформируемого основания связь между осадкой $w(x, y)$ и давлением $p(x, y)$ принимается в форме (0.1), где ядро $\mathrm{K}(r)$ — монотонная убывающая функция, $\mathrm{K}(\infty) = 0$, имеющая в точке $r = 0$ особенность не выше второго порядка (чтобы обеспечивалась сходимость интеграла).

В этой теории не делается никаких специальных предположений о характере упругой деформации подстилающего пространства или слоя. Для однородного упругого полупространства $\mathrm{K}(r) = Cr^{-1}$.

При неоднородности и других отклонениях от гипотезы упругого полупространства возможны другие формы зависимости $\mathrm{K}(r)$, обсуждающиеся в работе [1]. В частности, указывается ядро вида $\mathrm{K}(r) = Cr^{-1-k}$. Последний случай обычно интерпретируют, как соответствующий возрастанию модулей упругости с глубиной пропорционально z^k $(k > 0)$. Однако такая интерпретация требует специальных допущений [2].

В работе [3] было обращено внимание, что ядро Cr^{-1-k}, где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$$

аннулируется оператором

$$\Delta^* = \Delta + kz^{-1}\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.2}$$

Связь с задачей Дирихле для этого оператора была использована для решения (0.1) в случае $w = \mathrm{const}$. В работе [4] дано эффективное решение (0.1) в случае, когда $w(x, y)$ — многочлен, основанное на применении контурного интегрирования. Однако этот прием не позволяет вычислить значение $w(x, y)$ за границей области интегрирования.

Кроме того, теорема, доказанная в работе [4], о том, что $w(x, y)$ — многочлен, если $p(x, y)$ имеет вид произведения многочлена на выражение $(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(k-1)}$, не сопровождается обратной теоремой, и тем самым остается недоказанной применимость метода неопределенных коэффициентов всегда, когда $w(x, y)$ — многочлен.

Этот недостаток восполняется в настоящей работе, где в конце п. 4 приводится доказательство обратной теоремы.

1. Связь между уравнением (0.1) и задачей Дирихле расширяет возможности подхода к решению этого уравнения во всех тех случаях, когда дифференциальный оператор допускает разделение переменных. Однако не всякое ядро допускает такую возможность. Выясним, когда это имеет место. В оператор $\triangle^*$, аннулирующий ядро $\mathbf{K}(r)$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$, естественно входят слагаемыми лапласиан $\triangle$ и умножение на постоянную β. Для монотонности $\mathbf{K}(r)$ требуется неположительность β, $\beta = -\gamma^2$. Из первых производных может войти лишь $\partial / \partial z$, и притом с множителем kz^{-1}, так как $\partial \mathbf{K} / \partial z = zr^{-1}\mathbf{K}(r)$. Следовательно, оператор имеет вид

$$\triangle^* = \triangle + \frac{k}{z}\frac{\partial}{\partial z} - \gamma^2 \tag{1.1}$$

а для $\mathbf{K}(r)$ получается уравнение

$$\mathbf{K}''(r) + \frac{2+k}{r}\mathbf{K}'(r) - \gamma^2\mathbf{K}(r) = 0 \tag{1.2}$$

(Постоянный множитель k не может быть заменен функцией $\varphi(r)$, так как выражение $\triangle^*$ не содержит параметров ξ, η.)

Тогда возможными ядрами оказываются функции Мак-Дональда (с дополнительным степенным множителем)

$$\mathbf{K}(r) = Cr^{-1/2-1/2k}K_{-1/2-1/2k}(\gamma r) \tag{1.3}$$

В случае, когда $\gamma = 0$, степенная функция $\mathbf{K}(r) = Cr^{-1-k}$. Что касается постоянной k, то, имея в виду особенность ядра при $r = 0$, должно быть $k > -1$; для сходимости же интеграла необходимо $k < 1$. Итак, $-1 < k < 1$ для всех γ.

В случае $\gamma \neq 0$ построение нормальных решений встречает значительные трудности, связанные с необходимостью численного решения трансцендентных уравнений (вида определителей бесконечного порядка), из которых находятся характеристические значения акцессорных параметров в дифференциальных уравнениях, получающихся при разделении.

В случае же $\gamma = 0$ эта трудность отсутствует и теория развивается более или менее аналогично теории Ньютонова потенциала для диска эллиптической формы. Рассмотрение вместо (0.1) соответствующей задачи Дирихле для $\triangle^*$ расширяет сферу применения теории и делает возможным перенос результатов в другие области.

Вместо (0.1) будем рассматривать в области $z \geqslant 0$ уравнение

$$\triangle^* v = \triangle v + \frac{k}{z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad (-1 < k < 1) \tag{1.4}$$

и его решения, имеющие вид

$$v(x, y, z) = \iint \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2(1+k)}} \tag{1.5}$$

Функцию $f(\xi, \eta)$ — плотность источников — полагаем непрерывной почти всюду на границе $z = 0$ и удовлетворяющей условию Липшица.

В работе [3] доказано, что при этих допущениях

$$\lim_{z\to 0} z^k \frac{\partial v}{\partial z} = -2\pi f(x, y) \tag{1.6}$$

В связи с (1.5) и (1.6) возникают требования к единственности решения: на бесконечности оно должно быть $O(R^{-1-k})$, а функция $z^k \partial v / \partial z$ должна почти всюду иметь конечный предел при $z = 0$. При этих требованиях единственность получается обычным способом из тождества

$$\int\limits_S \varphi z^k \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int\limits_T \varphi z^k \Delta^* \varphi \, d\tau + \int\limits_T z^k (\nabla \varphi)^2 \, d\tau \tag{1.7}$$

применяемого к сферическому сегменту T

$$z \geqslant h, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2 \qquad (h \to 0, \ R \to \infty)$$

В следующем параграфе вычисляются некоторые интегралы вида (1.5) путем приведения их к однократным интегралам. Доказывается, что если функция $f(x, y)$ имеет вид произведения $t^{1/2(k-1)}$ на многочлен $P(t)$, где $t = 1 - x^2/a^2 - y^2/b^2$, то $F(x, y) = V(x, y, 0)$ внутри диска — многочлен. Одновременно получаются формулы, представляющие $V(x, y, z)$ всюду вне диска однократными интегралами (содержащими параметры). Это предположение представляет саму по себе интересную аналогию с известным предложением о Ньютоновом потенциале эллипсоида с эллипсоидальным распределением притягивающих масс. Применение этого результата к задаче Дирихле ограничено вследствие зависимостей, связывающих коэффициенты многочлена $F(x, y)$. В теории упругости этому соответствует использование известных распределений давления в решении контактных задач [5, 6].

2. Будем пользоваться эллипсоидальными координатами, представляющими корни уравнения

$$\Phi(s) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{s} \tag{2.1}$$

При этом $\lambda > 0 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$. Для краткости записи введем функции

$$\Psi(s) = (a^2 + s)(b^2 + s) s, \qquad \Psi(s) \Phi(s) = (s - \lambda)(s - \mu)(s - \nu) \tag{2.2}$$

Формулы перехода к декартовым координатам и коэффициентов Ламе таковы:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{a^2 (a^2 - b^2)}, \ldots \qquad H_\lambda^2 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4\Psi(\lambda)}, \ldots \tag{2.3}$$

(Ненаписанные формулы получаются круговой подстановкой, причем $c^2 = 0$). В этих координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta V = \sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{4\Psi(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\Psi'(\lambda)}{\Psi(\lambda)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right\} \tag{2.4}$$

тогда как

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2z \sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda (\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \tag{2.5}$$

Следовательно,

$$\Delta^* V = \sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{4\Psi(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Psi'(\lambda)}{\Psi(\lambda)} + \frac{k}{\lambda} \right] \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right\} \tag{2.6}$$

Решение уравнения $\Delta^* V$, зависящее только от λ и исчезающее на бесконечности, находится немедленно

$$V = C \int\limits_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{\omega(s)}}, \qquad \omega(s) = s^k \Psi(s) \tag{2.7}$$

Вариацией предела интегрирования отсюда получим иное, более общее решение. Предварительно заметим, что

$$(\nabla\Phi)^2 = \frac{d\Phi}{ds}, \qquad \Delta\Phi = -2\frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)}$$

Пусть теперь $g(t)$ — дважды дифференцируемая функция всюду на отрезке $[0, 1]$ с конечными значениями односторонних производных в граничных точках. После небольших преобразований получим для оператора Δ^* над функцией $g(\Phi)$ следующую формулу:

$$\Delta^* g(\Phi) = 4\sqrt{\omega(s)}\frac{d}{ds}\frac{g'(\Phi)}{\sqrt{\omega(s)}} \tag{2.8}$$

Вид этой формулы наводит на мысль взять в качестве возможного решения следующее выражение, удовлетворяющее условию на бесконечности

$$V = -\int_\lambda^\infty g(\Phi)\,du(s) = \int_\lambda^\infty g(\Phi)\frac{ds}{\sqrt{\omega(s)}} \qquad \left(u(s) = \int_s^\infty \frac{dt}{\sqrt{\omega(t)}}\right) \tag{2.9}$$

и, следовательно, $u(\lambda)$ — решение вида (2.7). Дифференцируя, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial z} &= \int_\lambda^\infty \frac{\partial g(\Phi)}{\partial z}\frac{\partial s}{\sqrt{\omega(s)}} + g(0)\frac{\partial u(\lambda)}{\partial x}, \ldots\\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int_\lambda^\infty \frac{\partial^2 g(\Phi)}{\partial z^2}\frac{ds}{\sqrt{\omega(s)}} - \frac{\partial g(\Phi)}{\partial z}\bigg|_{s=\lambda}\frac{1}{\sqrt{\omega(\lambda)}}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + g(0)\frac{\partial^2 u(\lambda)}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Но

$$\frac{\partial g(\Phi)}{\partial x}\bigg|_{s=\lambda} = -g'(0)\frac{2x}{a^2+\lambda} = -4g'(0)\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \ldots$$

Замечая, что $\Delta^* u(\lambda) = 0$ и $\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} + \ldots = 1$, при сложении имеем

$$\Delta^* v = \int_\lambda^\infty \Delta^* g(\Phi)\frac{ds}{\sqrt{\omega(s)}} + \frac{4g'(0)}{\sqrt{\omega(s)}} = 0 \tag{2.11}$$

— тождественно в силу (2.8). Итак, функция (2.9) действительно будет решением. На границе $\lambda = 0$ или $\mu = 0$ в выражении (2.1) для $\Phi(s)$ исчезает последний член. Поэтому

$$V(x, y, 0) = \int_\sigma^\infty g\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{\omega(s)}} \qquad \begin{cases}\sigma = 0 \text{ внутри диска}\\ \sigma = \lambda \text{ вне диска}\end{cases} \tag{2.12}$$

Если $g(t)$ — многочлен, то внутри диска $V(x, y, 0)$ также многочлен (с зависимыми коэффициентами). Подсчитывая производные, получаем

$$-z^k\frac{\partial v}{\partial z} = 2\left(\frac{\mu\nu}{a^2b^2}\right)^{1/2(1+k)}\int_0^1 h(\Phi_1)\frac{\xi^{1/2(1+k)}\,d\xi}{\sqrt{(\lambda+a^2\xi)(\lambda+b^2\xi)}} + \frac{z^k}{\sqrt{\omega(\lambda)}}\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

$$(h(t) = g'(t)) \tag{2.13}$$

Здесь Φ_1 — результат подстановки $s = \lambda\xi^{-1}$ в выражение (2.1) для $\Phi(s)$, т. е.

$$\Phi_1 = \Phi_1(\xi) = (1-\xi)\frac{(\lambda-\mu\xi)(\lambda-\nu\xi)}{(\lambda+a^2\xi)(\lambda+b^2\xi)}$$

Ясно, что на границе вне диска, $\mu = 0$, выражение (2.13) обращается в нуль. Внутри же диска $\lambda = 0$ имеем

$$f(x, y) = \frac{-1}{2\pi} z^k \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{t^{1/2(1+k)}}{\pi ab} \int_0^1 h(ut)(1-u)^{1/2(k-1)} du + \frac{g(0)}{\pi ab} t^{1/2(k-1)} \tag{2.14}$$

Здесь

$$t = \frac{\mu\nu}{a^2 b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{2.15}$$

Таким образом, доказано, что решению (2.10) уравнения (1.4) соответствует эллиптическое распределение плотности источников. Вместе с тем видно, что плотность содержит иррегулярное на границе эллипса слагаемое, если $g(0) \neq 0$. При $F(x, y) = c$ имеется только это слагаемое. Тогда

$$f(x, y) = \frac{c}{\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(k-1)} \left(\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^{1+k}(a^2+s)(b^2+s)}}\right)^{-1} \tag{2.16}$$

Этот результат приводится в работе [3]. В работе [4] он имеет несколько иной вид, к которому можно привести, если в интеграле (2.16) сделать подстановку $s = t^{-1}$ и затем применить контурное интегрирование. Тогда, как и в работе [4], получится

$$f(x, y) = \frac{c}{\pi} \cos\frac{\pi k}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(k-1)} \left(\int_0^\pi \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{1/2(k-1)} d\varphi\right)^{-1} \tag{2.17}$$

Обозначая далее в рассматриваемом случае $f(x, y) = q(t)$, сделаем в интеграле подстановку $ut = s$. Тогда

$$q(t) = \frac{1}{\pi ab}\int_0^t h(s)(t-s)^{1/2(k-1)} ds + \frac{g(0)}{\pi ab} t^{1/2(k-1)} \tag{2.18}$$

Введем еще массу источников Q. В нашем случае

$$Q = \iint f(x, y)\, dS = \pi ab \int_0^1 q(t)\, dt = \frac{2}{1+k}\int_0^1 (1-s)^{1/2(1+k)} h(s)\, ds + \frac{2g(0)}{1+k} \tag{2.19}$$

Зависимость (2.18) при известной функции $q(t)$ представляет уравнение Абеля для $h(t)$ или, лучше, прямо для $g(t)$. Обычным путем (применением формулы Дирихле) получим

$$g(t) = ab \cos\frac{\pi k}{2} \int_0^t q(s)(t-s)^{-1/2(1+k)} ds \tag{2.20}$$

Эта формула полностью решает задачу определения функции по заданной плотности источников $q(t)$. В частном случае, когда

$$q(t) = t^{1/2(k-1)} \sum_{n=0}^m c_n t^n \tag{2.21}$$

имеем

$$g(t) = ab \cos\frac{\pi k}{2} \sum_{n=0}^m c_n \frac{\Gamma(1/2(1-k))\,\Gamma(1/2(2n+1+k))}{\Gamma(n+1)} t^n \tag{2.22}$$

Как сказано выше, зависимости между коэффициентами многочлена ограничивают применение этих результатов к задаче Дирихле. Этот прием позволяет решить ее лишь в случае $F(x, y) = C - Ax - By$ (используя дифференцирование по x, y). Можно также решить задачу, аналогичную задаче об упругом контакте, т. е. определить размеры эллипса из условия конечности давления на его границе. Но это не решает задачи о неплоском жестком штампе даже в случае параболоида.

3. Общий, хотя и предварительный подход к поставленной задаче дает разделение переменных в уравнении (2.6). В результате этого для функций $\Lambda(\lambda)$, $M(\mu)$, $N(\nu)$, произведение которых образует решение, получается единое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2E}{ds} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1+k}{s}\right\}\frac{dE}{ds} = \frac{n(n+1+k)s - q}{4(a^2+s)(b^2+s)s}E \tag{3.1}$$

Здесь $s = \lambda, \mu, \nu$ на различных участках изменения s. Для удобства одна из постоянных разделения записана в форме $n(n+1+k)$. Сравнение с уравнением Хойна (Heun) в канонической записи [7]

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a}\right\}\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q'}{z(z-1)(z-a)}, \quad w = 0 \tag{3.2}$$

$$(\gamma + \delta + \varepsilon = 1 + \alpha + \beta)$$

где q — акцессорный параметр, показывает, что уравнение (3.1) принадлежит этому виду, имея показатели $(0, {}^1/_2)$ в полюсах $s = -a^2$, $s = -b^2$; $(0, {}^1/_2 - {}^1/_2 k)$ в полюсе $s = 0$ и $(-{}^1/_2 n, {}^1/_2 n + {}^1/_2 + {}^1/_2 k)$ в бесконечно удаленной точке, правильной для этого уравнения. Именно это обстоятельство, обусловленное тем, что в операторе $\triangle^*$ постоянная $\gamma = 0$, устраняет главную трудность. По сравнению с уравнением Ламе, уравнение (3.1) не имеет униформизующей подстановки, так как интеграл

$$\int^u (a^2 + s)^{1/2}(b^2 + s)^{1/2} s^{1/2(1+k)}\, ds$$

не допускает однозначного обращения. Однако в действительной области это не влечет принципиальных трудностей, и в ней можно ввести трансцендентные координаты ξ, η, ζ так же, как это делается для уравнения Ламе. В настоящей работе эти параметры не используются. Здесь целесообразно перейти от симметричной формы координат λ, μ, ν, удобной для развития аналитической теории уравнения Ламе, к несимметричным координатам ρ, μ, ν, сделав подстановку $s + a^2 = \sigma^2$. Уравнение (2.1) тогда примет вид

$$\Phi(\sigma^2) = 1 - \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{y^2}{\sigma^2 - c^2} - \frac{z^2}{\sigma^2 - a^2} = 0 \qquad (c = \sqrt{a^2 - c^2}) \tag{3.3}$$

(в книге [8] величины c, a обозначены h, k). Формулы перехода к декартовым координатам и коэффициентов Ламе таковы:

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{ac}, \qquad H_\rho = \left(\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-c^2)}\right)^{1/2},$$

$$y = \frac{\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{a^2-c^2}}; \qquad H_\mu = \left(\frac{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(a^2-\mu^2)(\mu^2-c^2)}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

$$z = \frac{\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{a^2-\nu^2}}{a\sqrt{a^2-c^2}}; \qquad H_\nu = \left(\frac{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\right)^{1/2}$$

На диске $\rho = a$ имеем

$$x = \frac{\mu\nu}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\mu^2 - c)(c^2 - \nu^2)}}{c}, \qquad H_\mu = \left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - c^2}\right)^{1/2}$$

$$H_\nu = \left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}\right)^{1/2}, \qquad dS = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)}} \tag{3.5}$$

Уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$(\sigma^2 - a^2)(\sigma^2 - c^2)\frac{d^2E}{d\sigma^2} + \sigma\left[(\sigma^2 - a^2) + (1 + k)(\sigma^2 - c^2)\right]\frac{dE}{d\sigma} + \\ + \left[q - n(n + 1 + k)\sigma^2\right] E = 0 \tag{3.6}$$

Для этого уравнения показатели относительно бесконечно удаленной точки суть $(-n,\ n + 1 + k)$ и для характеристических значений параметра q уравнение (2.6) допускает решения в виде многочлена

$$E = K(\sigma) + \sum_{s=0}^{r} a_s \sigma^{n-2s} \qquad \left(r = \left[\frac{1}{2} n\right]\right) \tag{3.7}$$

и квазимногочлена

$$E = L(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - c^2} \sum_{s=0}^{r} b_s \sigma^{n-1-2s} \qquad \left(r = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) \tag{3.8}$$

Подстановка (3.7) в (3.6) приводит к следующей рекуррентной системе для коэффициентов:

$$2(s + 1)(2n + 2s - 1 + k)\, a_{s+1} = \{q - (n - 2s)(n - 2s - 1)\, d^2 - \\ - (n - 2s)\, f^2\}\, a_s + (n - 2s + 2)(n - 2s + 1)\, e^4 a_{s-1} \tag{3.9}$$

$$d^2 = a^2 + c^2, \quad e^4 = a^2 c^2, \quad f^2 = d^2 + kc^2$$

Полагая здесь $s = r + 1$, $a_{r+1} = 0$, получим $a_{r+2} = 0$ и тогда все $a_s = 0$ при $s > r$. Приравнивая нулю определитель однородной системы для остальных s, получим уравнение степени $r + 1$ относительно q.

Таким образом, получается $^1/_2 n + 1$ функций $K(\sigma)$, если n — четное, и $^1/_2(n + 1)$ таких же функций, если n — нечетное число (предполагается отсутствие кратных корней, как это и есть на самом деле). Точно так же для коэффициентов b_s подстановка (3.8) в (3.6) приводит к системе

$$2(s + 1)(2n - 2s - 1 + k)\, b_{s+1} = \{q_1 - (n - 2s - 1)(n - 2s - 2) \times \\ \times d^2 - (n - 2s - 1)\, g^2\}\, b_s - (n - 2s + 1)(n - 2s)\, e^4 b_{s-1} \tag{3.10}$$

$$g^2 = 3a^2 + (1 - k)\, c^2, \qquad q_1 = q - a^2$$

Повторяя прежние рассуждения, находим, что характеристическое уравнение для q имеет степень $^1/_2 n$, если n — четное, или $^1/_2(n + 1)$, если n — нечетное число. Таким образом, общее число функций обоих видов K, L степени n есть $n + 1$. Произведения $K(\mu) K(\nu)$ и $L(\mu) L(\nu)$ суть многочлены от x, y, имеющие ту же степень. Общее число функций степени от 0 до n включительно равно $^1/_2(n + 1)(n + 2)$, т. е. совпадает с числом независимых элементов базиса многочленов от x, y степени n. При условии линейной независимости произведений $E(\mu)\ E(\nu)$ возможно представить их линейной комбинацией произвольный многочлен от x, y степени n. Но легко доказать, так же, как это делается в теории эллипсоидальных функций [8], ортогональность этих произведений, отсюда и следует их линейная независимость. Будем обозначать E_n^s функцию степени n, принадлежащую собственному числу q_n^s — корню характеристического уравнения степени n. Вронскиан

$$H = E_{n'}^{s'} \frac{dE_n^s}{d\sigma} - E_n^s \frac{dE_{n'}^{s'}}{d\sigma} \tag{3.11}$$

функций одинакового вида в обоих случаях будет многочленом. Он удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{d\sigma}\{\Delta(\sigma) H\} = \varepsilon \frac{[n(n+1+k) - n'(n'+1+k)]\sigma^2 - \left(q_n^s - q_{n'}^{s'}\right)}{\sqrt{|\sigma^2 - c^2|\,|\sigma^2 - a^2|^{1-k}}} \varepsilon_n^s \varepsilon_{n'}^{s'} \tag{3.12}$$

где

$$\Delta(\sigma) = |\sigma^2 - c^2|^{1/2} |\sigma^2 - a^2|^{1/2(1+k)}, \qquad \varepsilon = \operatorname{sign}(\sigma^2 - a^2)(\sigma^2 - c^2)$$

Интегрируя это равенство по промежуткам $c \leqslant \sigma \leqslant a$ и $-c \leqslant \sigma \leqslant c$, на концах которых $\Delta(\sigma) = 0$, получаем соотношения

$$\begin{gathered}
[n(n+1+k) - n'(n'+1+k)] \int_c^a \frac{\mu^2 E_n^s(\mu) E_{n'}^{s'}(\mu)\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(a^2 - \mu^2)^{1-k}}} = \\
= \left(q_n^s - q_{n'}^{s'}\right) \int_c^a \frac{E_n^s(\mu) E_{n'}^{s'}(\mu)\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(a^2 - \mu^2)^{1-k}}} \\
[n(n+1+k) - n'(n'+1+k)] \int_{-c}^c \frac{\nu^2 E_n^s(\nu) E_{n'}^{s'}(\nu)\, d\nu}{\sqrt{(c^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)^{1-k}}} = \\
= \left(q_n^s - q_{n'}^{s'}\right) \int_{-c}^c \frac{E_n^s(\nu) E_{n'}^{s'}(\nu)\, d\nu}{\sqrt{(c^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)^{1-k}}}
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Перемножая эти равенства накрест и вычитая, находим, что интеграл

$$J_{n,n'}^{s,s'} = \int_c^a \int_{-c}^c \frac{(\mu^2 - \nu^2) E_n^s(\mu) E_n^s(\nu) E_{n'}^{s'}(\mu) E_{n'}^{s'}(\nu)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)(a^2 - \mu^2)^{1-k}(a^2 - \nu^2)^{1-k}}} \tag{3.14}$$

обращается в нуль, если одновременно $n = n'$, $q_n^s = q_{n'}^{s'}$. Но в силу того, что однократные интегралы (3.13) обращаются в нуль при $n = n'$, $q_n^s \neq q_{n'}^{s'}$ или $n \neq n'$, $q_n^s = q_{n'}^{s'}$, двойной интеграл (3.14) равен нулю и в этих случаях.

Итак, интеграл (3.14) отличен от нуля только в том случае, когда одновременно $n = n'$, $q_n^s = q_{n'}^{s'}$. В силу того, что $\mu^2 > \nu^2$, этот интеграл положителен.

Следовательно, имеется вещественная нормировка произведений $E_n^s(\mu) E_n^s(\nu)$ такая, что эти произведения образуют ортонормированную систему. Переходя к декартовым координатам по формулам (3.5) и обозначая $P_n^s(x, y) = E_n^s(\mu) E_n^s(\nu)$, получим

$$\iint \frac{P_n^s(x, y) P_{n'}^{s'}(x, y)\, dx\, dy}{(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(1-k)}} = 0 \tag{3.15}$$

Интеграл берется по площади эллипса $1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 \geqslant 0$. Итак, многочлены $P_n^s(x, y)$ образуют на площади эллипса ортогональную систему с весом $(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(k-1)}$. Этим они отличаются от многочленов В. А. Стеклова [9], образующих на площади эллипса ортогональную систему с весом $(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{\alpha}$, причем $\alpha > 0$.

Остальные положения теории функций $E_n^s(\mu)$ здесь не развиваются; эта теория, как видно, копирует теорию эллипсоидальных функций с незначительными изменениями; поэтому опускается и доказательство, что все собственные числа действительны и различны и что корни функций $E_n^s(\mu)$ заключены в промежутке $(-a, a)$.

Заметим только, что вычисление интеграла $J_{n,n'}^{s,s'}$, необходимое для нормировки, приводится к одним лишь рациональным операциям, так же как и в теории эллипсоидальных функций [8] вследствие того, что интегралы

$$K_r = \int \sigma^{2r} |\sigma^2 - c^2|^{-1/2} |\sigma^2 - a^2|^{1/2(k-1)} d\sigma \qquad (r \text{ — натуральное число})$$

взятые в пределах (c, a) или $(0, c)$, по формулам приведения выражаются линейными комбинациями интегралов K_0, K_1 (одинаковыми для обоих промежутков интегрирования). Поэтому интеграл (3.14) равен произведению рациональной функции от a, c на интеграл

$$\int_c^a\int_0^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)(a^2 - \mu^2)^{1-k}(a^2 - \nu^2)^{1-k}}}$$

Переходя к декартовым координатам по формулам (3.5), замечаем, что этот интеграл вычисляется элементарно и равен $\pi(1 + k)^{-1}(ab)^k$.

4. Выведем теперь интегральное уравнение для произведений $P_n^s(x, y) = E_n^s(\mu) E_n^s(\nu)$, для чего используем формулы (1.5) и (1.6).

Введем функции второго рода $F_n^s(\rho)$. Это — второе решение уравнения (3.6) на промежутке $\sigma \geqslant \rho$ (где первое решение есть $E_n^s(\rho)$, подчиненное условию $F_n^s(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. Очевидно, что решение выражается формулой (постоянный множитель опущен):

$$F_n^s(\rho) = E_n^s(\rho) \int_\rho^\infty \frac{d\sigma}{[E_n^s(\rho)]^2 \Delta(\sigma)} \tag{4.1}$$

Пусть на диске $V(x, y, 0) = P_n^s(x, y)$; функция $V(x, y, z)$ — решение уравнения (1.4) — в области вне диска определяется формулой

$$V(x, y, z) = \frac{F_n^s(\rho)}{F_n^s(a)} E_n^s(\mu) E_n^s(\nu) \tag{4.2}$$

Вычисляя производную $\partial V / \partial z$ по формулам (3.4), находим

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}}{a\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ \frac{(\rho^2 - c^2)\rho}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \frac{\partial V}{\partial \rho} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\mu^2 - c^2)\mu}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial V}{\partial \mu} - \frac{(c^2 - \nu^2)\nu}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right\} \tag{4.3}$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \to a} z^k \frac{\partial v}{\partial z} = \lim z^k \frac{\rho(\rho^2 - c^2)\sqrt{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}}{a\sqrt{a^2 - c^2}(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \frac{\partial v}{\partial \rho} =$$

$$= a^{-k} \left[\frac{(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}{(a^2 - c^2)} \right]^{1/2(k-1)} \lim_{\rho \to a} (\rho^2 - a^2)^{1/2(1+k)} \frac{\partial v}{\partial \rho} \tag{4.4}$$

Но так как

$$\frac{\partial v}{\partial\rho} = \frac{E_n^s(\mu)E_n^s(\nu)}{F_n^s(a)}\frac{dF_n^s(\rho)}{d\rho}$$

$$\frac{dF_n^s(\rho)}{d\rho} = \frac{dE_n^s(\rho)}{d\rho}\int\limits_\rho^\infty \frac{d\sigma}{[E_n^s(\sigma)]^2\Delta(\sigma)} - \frac{1}{[E_n^s(\rho)]^2\Delta(\rho)} \qquad (4.5)$$

то

$$\lim_{\rho\to a} z^k\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{E_n^s(\mu)E_n^s(\nu)}{E_n^s(a)F_n^s(a)}\frac{[(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)]^{1/2(k-1)}}{a^k(a^2-c^2)^{1/2k}} \qquad (4.6)$$

Вычисляя плотность источников по формуле (1.6), получаем в декартовых координатах

$$f(x,y) = \frac{(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2(k-1)}}{2\pi abE_n^s(a)F_n^s(a)}P_n^s(x,y) \qquad (4.7)$$

Выражая значение $v(x, y, 0)$ через $f(x, y)$, получаем

$$P_n^s(x,y) = \frac{1}{2\pi abE_n^s(a)F_n^s(a)}\iint\frac{(1-\xi^2/a^2-\eta^2/b^2)^{1/2(k-1)}P_n^s(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2(1+k)}}$$

Это и есть искомое интегральное уравнение. На основе общей теории можно теперь сразу же написать разложение ядра r^{-1-k} по произведениям собственных функций. Но в этом разложении нет нужды.

Более важно другое — соответствие между значением $V(x, y, 0) = P_n^s(x, y)$ и $f(x, y)$ по формуле (4.7). Если $V(x, y, 0) = F(x, y)$ — произвольный многочлен степени n, то, разложив его по произведениям $P_m^s(x, y) = E_m^s(\mu)E_m^s(\nu)$ и сопоставив каждому из членов разложения плотность $f_m^s(x, y)$ по формуле (4.7), найдем, что $f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + \ldots + f_n(x, y)$ равна произведению многочлена той же степени на функцию $(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(k-1)}$. Тем самым доказана теорема, обратная теореме, данной в работе [4], т. е. доказано: если в левой части уравнения (0.1) находится многочлен, то решение этого уравнения представляет умноженный на $(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(k-1)}$ многочлен той же степени, но с другими коэффициентами.

Эта теорема представляет аналогию к теореме Л. А. Галина [10] о давлении штампа, эллиптического в плане, на упругое полупространство. Теорема работы [4] и эта теорема совместно дают основу для применения метода неопределенных коэффициентов к решению уравнения (0.1). Если не требовать вычисления функции $w(x, y)$ за пределами эллипса, то выкладки, согласно [4], дадут решение более простым путем, чем вычисление разложения $V(x, y, 0)$ по $P_n^s(x, y)$.

При необходимости же вычисления $w(x, y)$ за границей эллипса, формулы п. 3, 4 настоящей работы доставляют конечный алгоритм решения (в предположении, что $w(x, y)$ — многочлен).

5. Выведем формулы, связывающие параметры жесткого перемещения штампа с нагрузкой Q и моментами M_x, M_y, действующими на штамп

$$Q = \iint f(x,y)\,dx\,dy, \qquad M_x = \iint yf(x,y)\,dx\,dy, \qquad M_y = \iint xf(x,y)\,dx\,dy \qquad (5.1)$$

Будем предполагать, что осадка $w(x, y)$ представляется выражением

$$w(x, y) = \delta + \alpha x + \beta y + W(x, y) \qquad (W(x, y) = O(r^2)) \tag{5.2}$$

Значения потенциала $V(x, y, 0)$ отличаются от $w(x, y)$ постоянным множителем K (жесткость постели) с размерностью [сила (длина)$^{-2-k}$]

$$V(x, y, 0) = Kw(x, y) \tag{5.3}$$

Вообще K — эмпирический коэффициент. Для однородного упругого полупространства $K = (\pi E)/(1-\nu^2)$.

Разлагая $w(x, y)$ и $f(x, y)$ в ряды по собственным функциям $P_n^s(x, y)$, в соответствии с формулой (4.4), имеем

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n+1} C_n^s P_n^s(x, y) \tag{5.4}$$

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n+1} \frac{Kc_n^s P_n^s(x, y)}{2\pi ab E_n^s(a) E_n^s(a)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(k-1)}$$

Как следствие ортогональности семейства $P_n^s(x, y)$, получаем

$$\iint f(x, y) P_n^s(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{K}{2\pi ab E_n^s(a) F_n^s(a)}\iint w(x, y) P_n^s(x, y) \frac{dx\, dy}{(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2(1-k)}} \tag{5.5}$$

(интегралы берутся по площади эллипса)

Применим эту формулу к многочленам низшей степени

$$P_0^\circ(x, y) = 1, \qquad P_1^\circ(x, y) = x, \qquad P_1^1(x, y) = y$$

Получим

$$Q = \frac{K}{2\pi ab E_0^\circ(a) F_0^\circ(a)}\iint \frac{w(x, y)\, dx\, dy}{(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2(1-k)}} \tag{5.6}$$

$$M_x = \frac{K}{2\pi ab E_1^1(a) F_1^1(a)}\iint \frac{yw(x, y)\, dx\, dy}{(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2(1-k)}} \tag{5.7}$$

$$M_y = \frac{K}{2\pi ab E_1^\circ(a) F_1^\circ(a)}\iint \frac{xw(x, y)\, dx\, dy}{(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2(1-k)}} \tag{5.8}$$

Имея в виду соответственные результаты Л. А. Галина в пространственной задаче теории упругости [10], примем его обозначения для коэффициентов перед интегралами в этих формулах

$$A = K\,[2\pi ab E_1^\circ(a) F_1^\circ(a)]^{-1}, \qquad B = K\,[2\pi ab E_1^1(a) F_1^1(a)]^{-1}$$

$$C = K\,[2\pi ab E_0^\circ(a) F_0^\circ(a)]^{-1} \tag{5.9}$$

Кроме того, обозначим

$$J_1 = \iint x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(k-1)} dx\, dy = \frac{2\pi a^2 b}{(1+k)(3+k)}$$

$$J_2 = \iint y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(k-1)} dx\, dy = \frac{2\pi ab^3}{(1+k)(3+k)} \tag{5.10}$$

$$J_0 = \iint \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(k-1)} dx\, dy = \frac{2\pi ab}{1+k}$$

Внося в формулы (5.6—8) выражение (5.4) и решая полученные уравнения относительно δ, α, β, находим

$$\delta = \frac{1}{CJ_0}\left\{Q - C\iint \frac{W(x, y)\,dx\,dy}{(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(1-k)}}\right\} \tag{5.11}$$

$$\alpha = \frac{1}{AJ_1}\left\{M_y - A\iint \frac{xW(x, y)\,dx\,dy}{(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(1-k)}}\right\} \tag{5.12}$$

$$\beta = \frac{1}{BJ_2}\left\{M_x - B\iint \frac{yW(x, y)\,dx\,dy}{(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2(1-k)}}\right\} \tag{5.13}$$

Эти формулы, выражающие параметры жесткого перемещения в зависимости от силы Q и моментов M_x, M_y, имеют тот же вид, что и соответствующие формулы Л. А. Галина, но значения постоянных здесь иные и степень весовой функции под интегралом здесь $^1/_2(k-1)$ вместо $-^1/_2$. Выразим коэффициенты A, B, C в явной форме через интегралы.

Обращаясь к формуле (4.1), замечаем, что произведение $E_n^s(a)\,F_n^s(a)$ не зависит от постоянного множителя в выражении $E_n^s(\rho)$.

В связи с этим для простоты принимаем

$$E_0{}^0(\rho) = 1, \qquad E_1{}^0(\rho) = \rho, \qquad E_1{}^1(\rho) = \sqrt{\rho^2 - c^2} \tag{5.14}$$

Подстановка этих функций в (4.1) дает

$$\begin{aligned} E_0{}^0(a)\,F_0{}^0(a) &= \int_a^\infty \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2)(\sigma^2 - a^2)^{1+k}}} \\ E_1{}^0(a)\,F_1{}^0(a) &= \int_a^\infty \frac{a^2\,d\sigma}{\sigma^2\sqrt{(\sigma^2 - c^2)(\sigma^2 - a^2)^{1+k}}} \\ E_1{}^1(a)\,F_1{}^1(a) &= \int_a^\infty \frac{(a^2 - c^2)\,d\sigma}{(\sigma^2 - c^2)\sqrt{(\sigma^2 - c^2)(\sigma^2 - a^2)^{1+k}}} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Сделав здесь замену $\sigma = at$ и внося результаты в (5.9), получим

$$A = \frac{Ka^k}{2\pi b\psi_1}, \qquad B = \frac{Ka^k}{2\pi b\psi_2(1 - c^2)}, \qquad C = \frac{Ka^k}{2\pi b\psi_0}$$

где ψ_0, ψ_1, ψ_2 — безразмерные коэффициенты, выражающиеся интегралами

$$\psi_0 = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - e^2)(t^2 - 1)^{1+k}}}, \qquad \psi_1 = \int_1^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2 - e^2)(t^2 - 1)^{1+k}}} \tag{5.16}$$

$$\psi_2 = \int_1^\infty \frac{dt}{(t^2 - e^2)\sqrt{(t^2 - e^2)(t^2 - 1)^{1+k}}}$$

Здесь $e = c/a$ — эксцентриситет эллипса. При $k = 0$ и $K = \pi E/(1 - \nu^2)$ формулы (5.15, 5.16.) и (5.10) переходят в формулы (9.35) монографии [10]. Если штамп плоский, т. е. $W = 0$, то формулы (5.11 — 5.13) упрощаются. Принимая во внимание (5.10) и (5.15), в этом случае получаем

$$\delta = \psi_0\frac{(1 + k)\,Q}{Ka^{1+k}}, \qquad \alpha = \psi_1\frac{(1 + k)(3 + k)}{Ka^{3+k}}M_y, \qquad \beta = \psi_2\frac{(1 + k)(3 + k)}{Ka^{3+k}}M_x \tag{5.17}$$

Чтобы иметь возможность применить эти результаты к оценке перемещения δ плоского штампа произвольной формы в плане, необходимо распространить принцип максимума на функции V — решения уравнения $\triangle^* V = 0$, которое целесообразно рассматривать во всем пространстве с разрезом по плоской области $z = 0$, занятой источниками. В этом пространстве функция V, определенная формулой (1.5), очевидно, не имеет локальных экстремумов при $z \neq 0$. Но она не имеет их и при $z = 0$, если поставить условие $f(x, y) > 0$. В этом можно убедиться, вычисляя вторые производные в точке $(x_0, y_0, 0)$. Характеристическое уравнение матрицы вторых производных имеет при этом условии два отрицательных корня и один положительный. Следовательно, локальные экстремумы отсутствуют и в этих точках. Из этого же анализа следует, что поверхность $z = V(x, y, 0)$ вне разреза вся состоит из гиперболических точек.

В применении к плоскому штампу это значит, что если штамп перемещается, не имея наклона $(\alpha = \beta = 0)$, то $w(x, y) < \delta$ всюду вне штампа. Обозначим S область под штампом и E — внутренность эллипса, такого, что $E \supset S$. Тогда

$$w = \delta \quad \text{на } S; \qquad w = g(x, y) < \delta \quad \text{на } E - S \tag{5.18}$$

Применяя теперь формулу (5.6) к области E, находим

$$Q < CJ_0\delta = \frac{Ka^{1+k}}{(1 + k)\psi_0}\,\delta \tag{5.19}$$

Для получения точной верхней оценки для Q следует, очевидно, из всех эллипсов $E \supset S$ выбрать тот, на котором отношение a^{1+k}/ψ_0 достигает точной нижней грани.

6. Рассмотрим теперь тот предельный случай, когда эллиптическая область становится круговой, а система координат ρ, μ, ν вырождается в систему координат η, θ, φ сжатого сфероида

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z + ir = a\,\mathrm{sh}\,(\eta + i\theta) \tag{6.1}$$

В этом предельном переходе уравнение (3.6) на исчезающем участке $\sigma = \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant c$, $c \to 0$ дает

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} + m^2E = 0, \qquad q = m^2a^2 \tag{6.2}$$

и функции $E(\nu)$ превращаются в [8] в $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$. На остальных участках имеем

$$(\zeta^2 - 1)\,\zeta^2\frac{d^2E}{d\zeta^2} + \zeta\,[(2 + k)\,\zeta^2 - 1]\,\frac{dE}{d\zeta} + [m^2 - n(n + 1 + k)\,\zeta^2]\,E = 0 \tag{6.3}$$

$$\zeta = \mathrm{ch}\,\eta \quad \text{при } \zeta > 1, \qquad \zeta = \sin\theta \quad \text{при } 0 < \zeta < 1 \qquad (\zeta = \sigma / a)$$

Уравнения (6. 2—3) могут быть получены и непосредственно разделением уравнения $\triangle^* V = 0$ в координатах η, θ, φ, что дает

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + (\mathrm{th}\,\eta + k\,\mathrm{cth}\,\eta)\frac{dH}{d\eta} + \left(-h + \frac{m^2}{\mathrm{ch}^2\eta}\right)H = 0 \qquad (h = n\,(n + 1 + k)) \tag{6.4}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (\mathrm{ctg}\,\theta - k\,\mathrm{tg}\,\theta)\frac{d\Theta}{d\theta} + \left(h - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

Замены $\zeta = \mathrm{ch}\,\eta$, $\zeta = \sin\theta$ приводят к (6.3). Но при изолированном рассмотрении утрачивается связь с общей теорией, представленной выше. Предельный переход делает ясным, почему результаты для круговой области выражаются в сравнительно простых гипергеометрических функциях, тогда как другой случай вырождения (бесконечная полоса, система координат эллиптического цилиндра) требует привлечения аппарата функций Матье. В первом конфлюэнтном случае происходит уменьшение числа особых точек в уравнении Хойна (3.1), а бесконечно удаленная точка остается правильной; во втором же — получаем на бесконечности иррегулярную точку, даже тогда, когда $k = 0$, $\Delta V = 0$ (в задаче теории упругости для полупространства).

Основные результаты для круговой области уже известны. Но они получены вне связи с теорией уравнений Фуксова типа, посредством прямых, подчас весьма сложных вычислений [12], методами, весьма разнящимися в идейных основах. Покажем здесь, как эти результаты могут быть получены на основе развитой общей теории.

Заметим сразу, что $c = 0$ влечет сразу превращение систем трехчленных уравнений (3.10—3.11) в систему двучленных уравнений для коэффициентов гипергеометрического ряда. Заменой $\zeta = u^2$ уравнение (6.3) приводится к виду

$$\frac{d^2E}{du^2} + \left(\frac{1}{u} + \frac{{}^1/_2 + {}^1/_2 k}{u-1}\right)\frac{dE}{du} + \frac{m^2 - n(n+1+k)u}{4u^2(u-1)}E = 0 \tag{6.5}$$

Вычисляя показатели, находим, что схемой решений [13] этого уравнения будет

$$E = P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty, & \\ {}^1/_2 m, & 0, & -{}^1/_2 n, & u \\ -{}^1/_2 m, & {}^1/_2 - {}^1/_2 k, & {}^1/_2(n+1-k), & \end{matrix}\right\} \tag{6.6}$$

Выполняя приведение к стандартной схеме гипергеометрического уравнения, получаем

$$E = u^{{}^1/_2 m} P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty, & \\ 0, & 0, & a, & u \\ 1-c, & c-a-b, & b, & \end{matrix}\right\} \qquad \left(\begin{matrix} a = {}^1/_2(m-n) \\ b = {}^1/_2(m+n+1+k) \\ c = m+1 \end{matrix}\right) \tag{6.7}$$

Ограничиваясь случаем аналитических $V(x, y, 0)$, замечаем, что n, m — целые неотрицательные, $n \geqslant m$ и разность $n - m$ — четное число. Уравнение (6.5) имеет тогда полиномиальное решение

$$E_n^m = u^{{}^1/_2 m} F\left({}^1/_2(m-n), {}^1/_2(m+n+1+k), m+1;\ u\right) \tag{6.8}$$

Функция F с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленом Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad \text{при } \alpha = m, \qquad \beta = {}^1/_2(k-1), \qquad x = 1 - 2u^2$$

как это следует из формул, представляющих многочлены Якоби гипергеометрической функцией [7, 14]. Итак, в качестве нормальной формы решения можно принять

$$E_n^m(\sin\theta) = (\sin\theta)^m P_{{}^1/_2(n-m)}^{(m, {}^1/_2(k-1))}(\cos 2\theta) \tag{6.9}$$

Так как при $k = 0$ уравнение (1.4) превращается в уравнение $\Delta V = 0$, то функции (6.9) при $k = 0$ переходят в присоединенные функции Лежандра $P_n^m(\cos\theta)$. Это легко проверить, применяя теорему (4.1) из книги [14] и формулу дифференцирования многочленов Якоби.

Из формулы веса многочленов Якоби $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ простыми преобразованиями находим вес функций E_n^m

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \zeta(1-\zeta^2)^{{}^1/_2(k-1)} \qquad && (0 \leqslant \zeta \leqslant 1) \\ w(\theta) &= \sin\theta \cos^k\theta && (0 \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Эти формулы легко проверяются непосредственно по уравнениям (6.3—4). Сказанного достаточно для решения задачи Дирихле. Взяв нормальное решение в форме

$$V_{n,m} = \frac{F_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{F_n^m(1)} E_n^m(\sin\theta) \sin\cos m\varphi \tag{6.11}$$

можно провести выкладку, аналогичную проделанной в п. 4, и найти собственные числа для функций $E_n^m(r/a)$ интегрального уравнения

$$F_m(r) = \int_0^a sf(s)\,ds \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\omega d\omega}{(r^2 + s^2 - 2rs\cos\omega)^{{}^1/_2(1+k)}} \tag{6.12}$$

которое получается из (0.1) при разложении функций в ряды Фурье по $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Заметим, что уравнение для $E_n^m(r/a)$ отличается от (6.12) весовым множителем $(1 - s^2/a^2)^{{}^1/_2(k-1)}$.

Таким образом, показано, что задача для круговой области включается в более общую теорию, развитую в п. 1—4. Собственные числа для функций E_n^m найдены в работе [12].

7. Рассмотрим здесь одно обобщение уравнения (6.12), связанное с тем, что его ядро представляется различными гипергеометрическими функциями на участках $0 < s < r$ и $r < s < a$ интервала интегрирования, а именно [7]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\omega\, d\omega}{(x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega)^{1/2(1+r)}} = \frac{2\pi\Gamma(n + 1/2(1+r))}{\Gamma(1/2(1+r))\,\Gamma(n+1)} \times$$
$$\times x^n y^{-n-r-1} F\left(n + \frac{1+r}{2},\ \frac{1+r}{2};\ n+1,\ \frac{x^2}{y^2}\right) \tag{7.1}$$

если $x^2 < y^2$. Для $x^2 > y^2$ следует обменять местами буквы x, y. (Здесь удобно изменить специальные обозначения предыдущих пунктов на общие.) Представление (7.1) интегралом Эйлера использовалось в работе [4] для получения решения в замкнутой форме. Эта же функция может быть представлена в виде

$$\frac{2^{1-r}\Gamma(1/2(1-r))}{\Gamma(1/2(1+r))}\,\pi \int_0^\infty J_n(xt)\,J_n(yt)\,t^r\,dt \tag{7.2}$$

Такое представление использовано в работах [11, 12] с той же целью. Решение тогда получается или применением интегралов Барнса [11], или приведением к уравнению Винера — Хопфа с использованием в дальнейшем метода М. Г. Крейна [12]. Естественным обобщением формы ядра (7.2) является разрывной интеграл Вебера — Шафхайтлина [7]

$$W_{p,q}^{(r)}(x, y) = \int_0^\infty J_p(xt)\,J_q(yt)\,t^r\,dt = 2^r x^p y^{-1-r-p}\,\frac{\Gamma(1/2(1+r+p+q))}{\Gamma(1/2(1-r+q-p))\,\Gamma(1+p)} \times$$
$$\times F\left(\frac{1+r+p+q}{2},\ \frac{1+r+p-q}{2};\ 1+p;\ \frac{x^2}{y^2}\right) \tag{7.3}$$
$$x^2 < y^2, \qquad \mathrm{Re}\,(p+q+r+1) > 0, \qquad \mathrm{Re}\, r < 1$$

Вторая формула получается перестановкой букв $(x, p) \rightleftarrows (y, q)$. Уравнение вида

$$f(x) = \int_0^a W_{p,q}^{(r)}(x, y)\,\varphi(y)\,dy \tag{7.4}$$

рассматривалось в работе [12] с точки зрения методов Винера — Хопфа и М. Г. Крейна. Но известно, что любое уравнение типа Винера — Хопфа можно привести к двум повторным уравнениям Вольтерра. Этот «метод Копсона» в ряде случаев оказывается весьма простым и сильным и с успехом применялся различными авторами [15], в том числе и пишущим эти строки в работе [4] и др. В данном случае этот метод приводит к формуле обращения

$$\varphi(x) = \frac{-2^{1-r}x^q}{\Gamma(1/2(1+r+p+q))\,\Gamma(1/2(1+r+q-p))} \times$$
$$\times \frac{d}{dx}\int_x^a \left\{\frac{t^{1-r-p-q}}{(t^2-x^2)^{1/2(1-r+q-p)}}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u^{1+p} f(u)\,du}{(t^2-u^2)^{1/2(1-r+p-q)}}\right\} dt \tag{7.5}$$

имеющей место при следующих достаточных условиях: (1) $\mathrm{Re}\, r \in [0, 1]$ (2) $|\mathrm{Re}\,(p-q)| < \mathrm{Re}\,(1-r)$; (3) произведение $x^{1+p} f(x)$ интегрируемо на всем отрезке $[0, a]$; если на конце $x = 0$ оно имеет особенность, то не выше $O(x^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$.

Замечание. Интегрированием по частям формула (7.5) приводится к виду, который может оказаться более удобным, так как в нем особенность при $x = a$ будет явно выделена

$$\varphi(x) = \frac{2^{1-r}x^{q+1}}{\Gamma(1/2(1+r+p+q))\,\Gamma(1/2(1+r+q-p))}\left\{\frac{\psi(a)}{(a^2-x^2)^{1/2(1-r+q-p)}} - \right.$$
$$\left. - \int_x^a \frac{\psi'(t)\,dt}{(t^2-x^2)^{1/2(1-r+q-p)}}\right\} \tag{7.6}$$

где

$$\psi(t) = t^{-p-q-r} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u^{1+p} f(u)\,du}{(t^2 - u^2)^{1/2(1-r+p-q)}}$$

Доказательство. Функции F в формулах (7.3) представим интегралами Эйлера

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tz)^{-b}\,dt$$

Для функции, входящей в первую формулу (7.3), имеем

$$F = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(^1/_2(1+r+q+p))\,\Gamma(^1/_2(1+p-q-r))} \times$$
$$\times \int_0^1 t^{1/2(-1+q+p+r)}(1-t)^{1/2(-1+p-q-r)}\left(1 - t\frac{x^2}{y^2}\right)^{1/2(-1+q-p-r)} dt \qquad (7.7)$$

Вследствие ограничений (1), (2), наложенных на параметры, такое представление допустимо. Сделаем в интеграле (7.7) подстановку $t = s^2/x^2$. Внося результат в формулу (7.3), после сокращений получаем

$$W_{p,q}^{(r)}(x, y) = \frac{2^{1+r}x^{-p}y^{-q}}{\Gamma(^1/_2(1-r+p-q))\,\Gamma(^1/_2(1-r+q-p))} \times$$
$$\times \int_0^x (x^2 - s^2)^{1/2(-1+p-q-r)}(y^2 - s^2)^{1/2(-1+q-p-r)} s^{p+q+r}\,ds \qquad (7.8)$$

Производя такую же выкладку со второй формулой (7.3), получаем аналогичный результат с той разницей, что буквы x, p обмениваются местами с буквами y, q. Оба результата можно записать в виде одной формулы

$$W_{p,q}^{(r)}(x, y) = \frac{2^{1+r}x^{-p}y^{-q}}{\Gamma(^1/_2(1-r+p-q))\,\Gamma(^1/_2(1-r+q-p))} \times$$
$$\times \int_0^{\min(x,y)} \frac{t^{p+q+r}\,dt}{(x^2 - t^2)^{1/2(1+r+q-p)}(y^2 - t^2)^{1/2(1+r+p-q)}} \qquad (7.9)$$

Введем обозначения (7.10)

$$\psi(y) = y^{-q}\varphi(y); \qquad g(x) = 2^{-1-r}\,\Gamma\left(\frac{1-r+p-q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+r+q-p}{2}\right)x^p f(x)$$

Тогда уравнение (7.4) примет вид

$$\int_0^x \psi(y)\,dy \int_0^y \frac{t^{p+q+r}\,dt}{(x^2 - t^2)^{1/2(1+r+q-p)}(y^2 - t^2)^{1/2(1+r+p-q)}} +$$
$$+ \int_x^a \psi(y)\,dy \int_0^x \frac{t^{p+q+r}\,dt}{(x^2 - t^2)^{1/2(1+r+q-p)}(y^2 - t^2)^{1/2(1+r+p-q)}} = g(x) \qquad (7.11)$$

В связи с ограничениями, наложенными на параметры, в обоих слагаемых допустимо изменение порядка интегрирования. Выполнив это (в первом слагаемом — по формуле Дирихле) и сложив результаты, приведем уравнение (7.4) к виду

$$\int_0^x \frac{t^{p+q+r}}{(x^2 - t^2)^{1/2(1+r+q-p)}}\,dt \int_t^a \frac{\psi(y)\,dy}{(y^2 - t^2)^{1/2(1+r+p-q)}} = g(x) \qquad (7.12)$$

Тем самым задача приведена к двукратному решению уравнений Абеля. Напомним, что уравнение Абеля

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x^2 - t^2)^m} = f(x)$$

с непрерывной правой частью имеет в случае $0 < m < 1$ единственное решение

$$\varphi(x) = \frac{2\sin m\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{yf(y)\,dy}{(x^2-y^2)^{1-m}}$$

(при условии, что интеграл сходится в нижнем пределе). При $m < 0$ решение существует лишь при дополнительных требованиях к правой части. Условия (1), (2), (3) обеспечивают однозначную разрешимость уравнения (7.12). При этом заметим, что в процессе приведения уравнения (7.4) к виду (7.12) эквивалентность нигде не нарушалась. Решая последовательно уравнения Абеля, находим

$$\omega(t) = \int_t^a \frac{\psi(y)\,dy}{(y^2-t^2)^{1/2(1+r+p-q)}} = t^{-p-q-r}\frac{2}{\pi}\cos\frac{(r+q-p)\pi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{ug(u)\,du}{(t^2-u^2)^{1/2(1-r+p-q)}} \tag{7.13}$$

$$\psi(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{(r+p-q)\pi}{2}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{t\omega(t)\,dt}{(t^2-x^2)^{1/2(1-r+q-p)}} \tag{7.14}$$

Объединяя эти результаты и возвращаясь к прежним обозначениям (7.10), после упрощения предынтегрального множителя получим формулу (7.5) ч. и т. д.

В заключение напомним, что успех применения аппарата аналитической теории дифференциальных уравнений к уравнению (0.1) обусловлен специальной формой ядра (п. 1). Это обстоятельство, очевидно, следует учитывать при построении математических моделей линейно деформируемого основания.

Поступила 28 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б. Г. Некоторые вопросы расчета балок и плит, лежащих на упругом основании. Сб. тр. МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1956, № 14, стр. 156—167.
2. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании. Сб. тр. МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1956, № 14, стр. 168—180.
3. Раков А. Х., Рвачев В. Л. Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого — степенная функция глубины. Докл. АН УССР, 1961, 3, стр. 286—290.
4. Ростовцев Н. А. Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задаче о давлении фундамента на неоднородный грунт. ПММ, 1961, т. XXVI, вып. 1, стр. 164—168.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. ГТТИ, 1949, стр. 197—204.
6. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГТТ стр. 112—134.
7. Erdélyi A., Bateman H., Higher Transcendental Functions. Mc. Graw-Hill Book Co. 1955, v. 3, 56—63; v. 2, 162—174, 51—52; v. 1, 81 (10).
8. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во иностр. лит., 1952, стр. 434—451.
9. Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов (Обзор). Гостехиздат, 1950, стр. 153—154.
10. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953, стр. 206—227.
11. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
12. Попов Г. Я. Решение контактных задач теории упругости методом интегральных уравнений. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.
13. Уиттекер Э., Ватсон Г. Курс современного анализа, Физматгиз, 1963, стр. 290—293.
14. Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962, стр. 70—91.
15. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 248—262.