Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

О СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Е. А. Гальперин, Н. Н. Красовский

(Москва — Свердловск)

Рассматривается задача о стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы. Развивается теория стабилизации, аналогичная теории устойчивости Ляпунова по первому приближению [1-3]. Выделены критические случаи. Рассмотрен критический случай одного нулевого корня.

В статье приняты следующие обозначения.

Прописными буквами $A, B, C \ldots$ обозначены матрицы $\|a_{ij}\|$, $\|b_{ij}\|$ и т. д. При необходимости будем указывать размеры матрицы, например A_n^m, где m — число столбцов, n — число строк. Квадратная матрица A в степени s обозначена $A^{(s)}$; матрицы и векторы пронумерованы нижним индексом в скобках — $A_{(i)}$, $a_{(i)}$, буквой E обозначена единичная матрица, буквой 0 — нуль-матрица. Матрица, полученная объединением A и B, записывается так

$$\|A,\ B\|,\quad \left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|$$

Символ $r(A)$ означает ранг A; символ $|A|$ — определитель квадратной матрицы A. Под спектром матрицы будем понимать [4] набор собственных чисел ее с их кратностями. Запись $\lambda \in A$ означает, что число λ содержится в спектре A; запись $A \subset B$ означает, что столбцы A содержатся в B. Символом $\{R^n\}$ обозначим n-мерное векторное пространство. Строчные латинские буквы $a, b, c, u, x, y \ldots$ — векторы; скалярное произведение векторов обозначается символом $(a \cdot b) = ab$; $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \ldots$ — скаляры; $i, j, k, r, n, \ldots$, — индексы; $|x|$ — модуль вектора, абсолютная величина числа; t — время.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему

$$dx / dt = f(t, x, u) \qquad (x \in \{R^n\},\ u \in \{R^m\}) \tag{1.1}$$

где f — заданная достаточно гладкая вектор-функция; x — вектор фазовых координат системы. Вектор $u(t, x)$ — управление, которое будем считать не возмущаемым помехами. Вектор x подвержен малым возмущениям v, так что в (1.1)

$$x(t) = x^*(t) + v(t) \qquad (v \in \{R^n\}) \tag{1.2}$$

где $x^*(t)$ — заданное движение, осуществляемое по (1.1) управлением $u^*(t, x^*(t))$. Обозначим

$$w = u - u^* \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.1) и разлагая правые части по величинам v, w, получим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) v_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} w_j + g(t, v, w) \tag{1.4}$$

где производные вычислены вдоль движения $x = x^* (t)$, $u = u^* (t)$; через $g (t, v, w)$ — обозначены члены выше первого порядка малости относительно v, w.

В случае $w \equiv 0$ имеем задачу об устойчивости по Ляпунову [1] движения $v = 0$ системы (1.4). Если при $w \equiv 0$ это движение неустойчиво, то возникает задача о стабилизации движения (1.1), т. е. задача о выборе такого управления $w (t, v)$, при подстановке которого в (1.4) невозмущенное движение $v = 0$ было бы асимптотически устойчивым по Ляпунову. Функцию $w (t, v)$, решающую задачу стабилизации, будем называть регулятором. Если к требованию асимптотической устойчивости добавить условие минимизации некоторого функционала от $v (t)$, $w (t)$, то получается задача оптимальной стабилизации, или задача аналитического конструирования регуляторов [5, 6].

Будем предполагать, что w имеет порядок малости не ниже v, т. е.

$$w (t, 0) = 0 \qquad (t \geqslant 0)$$

$$|w_j (t, v') - w_j(t, v'')| \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} | v_i' - v_i''| \qquad (j = 1,\ldots, m;\ \beta = \text{const}) \qquad (1.5)$$

при малых v', v''.

Примем, что невозмущенное движение $v = 0$ будет установившимся, т. е. правая часть (1.4) не зависит явно от t. Тогда система (1.4) принимает вид

$$dv / dt = Av + Bw + g (v, w) \qquad (A = \text{const},\ B = \text{const}) \qquad (1.6)$$

Заменяя v, w снова на x, u, будем рассматривать систему

$$dx / dt = Ax + Bu + g (x, u) \qquad (1.7)$$

Отбрасывая нелинейные члены, получаем систему уравнений первого приближения

$$dx / dt = Ax + Bu \qquad (1.8)$$

Цель настоящей работы — рассмотреть условия, когда вопрос о стабилизации системы (1.7) решается по ее линейному приближению (1.8); выделить и классифицировать критические случаи, когда возможность стабилизации (1.7) определяется членами $g (x, u)$, и дать решение задачи в критическом случае одного нулевого корня. При этом продолжаются исследования [5–13] (см. также другие материалы [1]).

§ 2. Вспомогательные замечания. Рассмотрим матрицы A_n^n и B_n^m с действительными или комплексными элементами. Составим матрицу

$$V = \| B, AB, \ldots, A^{(n-1)}B \| \qquad (2.1)$$

Пусть $r (V) = r$. Тогда из V можно выделить r линейно независимых столбцов, которые образуют матрицу W_n^r.

Лемма 2.1. Существует матрица Q_r^r, и притом единственная, удовлетворяющая условию

$$AW_n^r = W_n^r Q \qquad (2.2)$$

[1] R. E. Kalman, J. C. Ho, K. S. Narendra, «Controllability of linear dynamical systems». Contr. to Differential Equations, Interscience, 1962, Vol. 1.

Доказательство. При $r = n$ утверждение леммы очевидно, так как $Q=(W^n)^{(-1)}AW^n$. Предположим, что $r<n$. Пусть столбцы B_n^m будут $b_{(j)}$ ($j = 1,\ldots, m$). Рассмотрим m квадратных матриц $W_{(j)}^n = \| b_{(j)}, Ab_{(j)}, \ldots, A^{(n-1)} b_{(j)}\|$, каждая из которых имеет ранг не выше r. Известно [4], что тогда линейно независимыми будут первые r столбцов $W_{(j)}^n$. Используя при $r < n$ это обстоятельство, можно проверить, что столбцы матриц $A^{(n-1)}B$ и $A^{(n)}B$ выражаются линейно через столбцы матрицы $V^* = \|B, AB, \ldots, A^{(n-2)}B\|$. Далее, имеем $AW^r \subset AV \subset \| B, AV\| = \| B, AB,\ldots, A^{(n)}B \|$, поэтому столбцы AW^r выражаются линейно через столбцы V^*. Но так как $V^* \subset V$ и столбцы V выражаются через столбцы W^r, то через них выражаются также столбцы V^*, а следовательно, и столбцы матрицы AW^r. Последнее утверждение равносильно равенству (2.2), поэтому существование матрицы Q доказано.

Предположим теперь от противного, что существуют две матрицы $Q_{(1)}$ и $Q_{(2)}$, удовлетворяющие условию (2.2), т. е. $AW^r = W^r Q_{(1)}$, $AW^r = W^r Q_{(2)}$.

Тогда $W^r (Q_{(1)} - Q_{(2)}) = 0$, и так как $r (W^r) = r = \max$, то $r (Q_{(1)} - Q_{(2)}) = 0$, т. е. $Q_{(1)} - Q_{(2)} = 0$. Это доказывает единственность матрицы Q.

Для вычисления матрицы Q следует решить матричное уравнение (2.2), которое распадается на r систем линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{r} w_{ij}q_{jk} = p_{ik} \qquad (p_{ik} \in AW^r;\ i = 1,\ldots, n;\ k = 1,\ldots, r) \tag{2.3}$$

Дополним матрицу $W_n{}^r$ столбцами некоторой матрицы C_n^{n-r}, элементы которой подчинены лишь тому условию, чтобы матрица

$$D = \| W^r, C^{n-r} \| \tag{2.4}$$

была невырожденной, т. е. $|D| \neq 0$.

Рассмотрим подобное преобразование

$$H = D^{(-1)}AD \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. Матрица H (2.5) имеет вид

$$H = \begin{Vmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} \\ 0 & A_{(3)} \end{Vmatrix} \qquad (A_{(1)} = Q_r{}^r) \tag{2.6}$$

где $Q_r{}^r$ — матрица из равенства (2.2), и спектр матрицы $A_{(3)}$ не зависит от выбора C_n^{n-r} в (2.4).

Доказательство. Используя (2.2) и (2.4), выполним в (2.5) блочное умножение

$$H = D^{(-1)}AD = \| W^r, C^{n-r} \|^{(-1)} \| W^r Q_r{}^r, AC^{n-r} \| =$$

$$= \| W^r, C^{n-r} \|^{(-1)} \{\| W^r Q_r{}^r, O \| + \| O, AC^{n-r} \|\} =$$

$$= \| W^r, C^{n-r} \|^{(-1)} \left\{ \| W^r, C^{n-r} \| \begin{Vmatrix} Q_r{}^r & O \\ O & O \end{Vmatrix} + \| O, AC^{n-r} \| \right\} = \begin{Vmatrix} Q_r{}^r & A_{(2)} \\ O & A_{(3)} \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

результат которого и подтверждает вид (2.6) матрицы H.

Запишем характеристический многочлен матрицы H (2.6)

$$| H - \lambda E | = | Q - \lambda E | \cdot | A_{(3)} - \lambda E | \tag{2.8}$$

Матрица Q в (2.2) определена матрицами A, B и W^r, но она не зависит от C^{n-r}; следовательно, спектр Q не зависит от C^{n-r}. Преобразование подобия (2.5) не меняет [4] спектра A, поэтому из (2.8) заключаем, что совокупность спектров Q и $A_{(3)}$ составляет спектр A, и спектр $A_{(3)}$ не зависит от C^{n-r}. (Матрица $A_{(3)}$ может зависеть от C^{n-r}.) Лемма доказана.

Замечание 2.1. В системе (1.8) без ограничения общности можно считать

$$r(B) = \min(n, m) \tag{2.9}$$

ибо в противном случае можно сократить число управлений. Пусть, например, $m < n$, $r(B) = m - 1$. Тогда (меняя, если надо, нумерацию столбцов B) будем иметь

$$b_{im} = \mu_1 b_{i1} + \mu_2 b_{i2} + \ldots + \mu_{m-1} b_{i,m-1}$$

Полагая

$$u_j^* = u_j + \mu_j u_m \qquad (j = 1, \ldots, m-1) \tag{2.10}$$

получим $B_n^m u = B_n^{m-1} u^*$. Следовательно, последний столбец матрицы B в (1.8) можно убрать без фактического изменения системы (1.8). При этом число управлений по (2.10) сокращается на единицу.

В нелинейной системе (1.7) при $r(B) < \min(n, m)$, вообще говоря, нельзя сократить число управлений согласно (2.10) без изменения стабилизируемости системы. Однако, вводя в (1.7) управления u_j^* (2.10) и u_m вместо u_j ($j = 1, \ldots, m$), добьемся выполнения условия (2.9) для системы (1.8) без фактического изменения нелинейной системы (1.7). При этом в некритическом случае стабилизации (см. ниже стр. 994) найдется линейный регулятор u_{j0}^*, после чего u_m можно взять произвольно. В критических случаях регулятор u_{j0}^* стабилизирует лишь некоторую подсистему первого приближения. Возможность стабилизации всей системы (1.7) определяется тогда членом $g(x, u)$, причем может оказаться целесообразным выбирать и компоненту u_m регулятора, исходя из дополнительных нелинейных соотношений (см. стр. 1002).

Замечание 2.2. Если $AB = C$, то столбцы C линейно выражаются через столбцы A. Поэтому столбцы $A^{(k)}B$ выражаются через столбцы A, следовательно,

$$r(V) = r(W^r) \leqslant r(\|B, A\|) \tag{2.11}$$

и ввиду (2.9) матрицу W^r для системы (1.8) можно выбрать в виде

$$W_n^r = \| B^m, AG^{r-m} \| \tag{2.12}$$

что и будем предполагать ниже.

Замечание 2.3. Если в системе (1.8) совершить преобразование переменных $x = Dy$, где D согласно (2.4), то в новой системе $dy / dt = A_* y + B_* u$, причем $A_* = D^{(-1)}AD = H$ согласно (2.5), и в силу (2.4), (2.12)

$$B_* = D^{(-1)}B = \| B, AG, C \|^{(-1)} \| B, AG, C \| \begin{Vmatrix} E_m \\ O \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_m \\ O_{n-m}^m \end{Vmatrix} \tag{2.13}$$

Составим матрицы

$$V = \| B, AB, \ldots, A^{(n-1)}B \|, \quad V_* = \| B_*, HB_*, \ldots, H^{(n-1)}B_* \| \tag{2.14}$$

Ввиду (2.5), (2.13) получим

$$V_* = D^{(-1)}V \tag{2.15}$$

Далее, в силу (2.6) имеем

$$H^{(n)} = \begin{Vmatrix} Q^{(n)} & P_{(n)} \\ O & A_{(3)}^{(n)} \end{Vmatrix} \tag{2.16}$$

где $P_{(n)}$ определенным образом выражается через матрицы Q, $A_{(2)}^{..}$, $A_{(3)}^{..}$.

Теперь из (2.13), (2.14), (2.16) следует

$$V_* = \begin{Vmatrix} M_r^{n \cdot m} \\ O_{n-r} \end{Vmatrix} \tag{2.17}$$

где

$$M = M_r^{n \cdot m} = \left\| \begin{Vmatrix} E_m \\ O_{r-m}^m \end{Vmatrix}, \; Q \begin{Vmatrix} E_m \\ O_{r-m}^m \end{Vmatrix}, \ldots, Q^{(n-1)} \begin{Vmatrix} E_m \\ O_{r-m}^m \end{Vmatrix} \right\| \tag{2.18}$$

Если $r(V) = r$, то в силу (2.15), (2.17) получаем, что ранг матрицы M (2.18) и ранг матрицы

$$M_{*r}^{r\cdot m} = \|B_{**}, \ldots, Q^{(r-1)} B_{**}\|, \qquad B_{**} = \left\| \begin{matrix} E_m \\ O_{r-m}^m \end{matrix} \right\| \tag{2.19}$$

также равны r.

Приведем определение [7] (см. также сноску на стр. 989).

Определение 2.1. Система (1.1) называется полностью управляемой, если для любых x_0, t_0, x_1 существует некоторый момент $t_1 > t_0$ и некоторое управление $u(t, x)$, которое переводит фазу (t_0, x_0) в фазу (t_1, x_1). Начальная фаза (t_0, x_0) произвольна; конечная фаза (t_1, x_1) включает произвольный вектор x_1; в более сильном случае произволен также момент t_1.

Управляемость системы (1.8) связана с рангом матрицы V. Эта матрица (2.1) была введена в задачах об оптимальном управлении в работе [14] в связи с условием общности положения [15].

Справедливы следующие утверждения [6-9].

1°. Система (1.8) полностью управляема в том, и только в том случае, если матрица V, определенная (2.1), имеет ранг n. При этом конечная фаза (t_1, x_1) может быть взята произвольно.

2°. Если ранг матрицы V равен n, то существует линейный регулятор $u = Px$, такой, что система (1.8) становится асимптотически устойчивой.

§ 3. Стабилизация по первому приближению. Согласно материалу § 2, для системы (1.8) по известным матрицам A и B можно по (2.12) и (2.3) построить матрицы W^r и Q и затем найти спектры A и Q. В силу леммы 2.2 спектр $Q_r{}^r$ состоит из некоторых r собственных чисел матрицы A. Справедлива теорема

Теорема 3.1. (1) Если спектр матрицы Q содержит все собственные числа матрицы A, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re} \lambda_{p_i} > 0 \quad (i = 1, \ldots, l); \qquad \operatorname{Re} \lambda_{h_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \qquad (l + m \leqslant n)$$

то невозмущенное движение системы (1.7) стабилизируется линейным регулятором $u = Px$ независимо от членов $g(x, u)$.

(2) Если спектр матрицы Q не содержит хотя бы одного числа λ_{pi} матрицы A, для которого $\operatorname{Re} \lambda_{p_i} > 0$, то невозмущенное движение системы (1.7) неустойчиво при любом выборе управления, удовлетворяющего (1.5). Стабилизация системы (1.7) в этом случае, следовательно, невозможна, независимо от членов $g(x, u)$.

(3) Если спектр матрицы Q содержит все собственные числа A, для которых $\operatorname{Re} \lambda_{p_i} > 0$ $(i = 1, \ldots, l)$, но не содержит хотя бы одного числа λ_{h_k} с $\operatorname{Re} \lambda_{h_k} = 0$, то возможность стабилизации системы (1.7) определяется членами $g(x, u)$ выше первого порядка малости.

Доказательство. Преобразуем систему (1.8) неособым линейным преобразованием

$$x = Dp \tag{3.1}$$

с матрицей D, определенной (2.4). Получим

$$\frac{dp}{dt} = Hp + B_* u \quad (p \in \{R^n\}) \qquad (H = D^{(-1)} AD; \; B_* = D^{(-1)} B) \tag{3.2}$$

В силу (2.6) и (2.13) систему (3.2) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = Qy + A_{(2)}z + \left\| \begin{matrix} E_m \\ O_{r-m} \end{matrix} \right\| u \qquad (y \in \{R^r\}) \tag{3.3}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_{(3)}z, \qquad p = \left\| \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\| \qquad (z \in \{R^{n-r}\}) \tag{3.4}$$

Подсистема (3.4) совершенно неуправляема. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = Qy + \left\| \begin{matrix} E_m \\ O_{r-m} \end{matrix} \right\| u \qquad (y \in \{R^r\}) \tag{3.5}$$

Матрица вида (2.1) для системы (3.5) равна M_* (2.19). В силу замечания 2.3 матрица M_* имеет ранг r. Поэтому (§ 2, 1°) система (3.5) полностью управляема.

Рассмотрим пункт (1) теоремы. По предположению спектр матрицы $A_{(3)}$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \lambda_{r_j} < 0$ ($j = 1, \ldots, n - r$); подсистема (3.4) асимптотически устойчива. Для системы (3.5) имеем $r(V) = r(M_*) = r$, поэтому в силу 2° § 2 можно найти регулятор

$$u = P_m^r y \qquad (y \in \{R^r\}) \tag{3.6}$$

который стабилизирует систему (3.5) Этот же регулятор стабилизирует, очевидно всю систему (3.2). Регулятор (3.6) в переменных x_i имеет вид

$$u = \| P_m^r, O^{n-r} \| D^{(-1)}x \qquad (x \in \{R^n\}) \tag{3.7}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B \, \| P_m^r, O^{n-r} \| D^{(-1)}x$$

имеет все корни с отрицательными действительными частями. Следовательно, и нелинейная система (1.7) при u (3.7) асимптотически устойчива в силу теоремы Ляпунова [1] (стр. 127). Это доказывает пункт (1) теоремы.

Рассмотрим пункт (2). По предположению в неуправляемую подсистему (3.4) попадает по крайней мере одно из чисел λ_{p_i} с $\operatorname{Re} \lambda_{p_i} > 0$; эта подсистема неустойчива, независимо от управлений. При любом выборе $u(x)$ система первого приближения (1.8) будет неустойчива и будет иметь траекторию, уходящую от точки $x = 0$ при $t \to \infty$, как экспонента. В силу теоремы Ляпунова [1] (стр. 128) отсюда следует неустойчивость системы (1.7).

Примечание 3.1. Теорема Ляпунова [1] доказана для аналитических правых частей системы (1.7), но она сохраняет силу и в более общих случаях [2, 3] и, в частности, в нашем случае (1.5), когда правые части (1.7) удовлетворяют условиям Липшица.

Рассмотрим пункт (3). По предположению в неуправляемую подсистему (3.4) попадают только числа λ_{hk} с $\operatorname{Re} \lambda_{hk} \leqslant 0$ и среди них хотя бы одно число с $\operatorname{Re} \lambda_{h_k} = 0$. Систему (3.5) можно стабилизировать регулятором $u = Py$. При этом при любом фиксированном управлении $u = Py$ характеристическое уравнение системы (1.8) будет иметь все корни λ_i с $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$ и среди них хотя бы один корень λ_j с $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$. Следовательно, при выбранном управлении $u = Py$ устойчивость системы (1.7) определяется [1-3] нелинейными членами $g(x, u)$, что и доказывает (3) теоремы.

Примечание 3.2. Для решения вопроса о стабилизируемости определение матрицы Q (2.3) не обязательно. Можно по известным матрицам A и B построить матрицу W^r, дополнить ее до матрицы D (2.4) столбцами C^{n-r} и выполнить подобное преобразование (2.5), причем вычислить лишь субматрицу $A_{(3)}$ и спектр ее собственных чисел.

Спектр $A_{(3)}$ дополняет спектр Q до спектра матрицы A. Отсюда следуют критерии стабилизируемости, соответствующие пунктам (1) — (3) теоремы **3.1** и базирующиеся на спектре $A_{(3)}$. При этом существенно, что в силу леммы 2.2 спектр $A_{(3)}$ не зависит от выбора C^{n-r}. Не приводя формулировок, отметим лишь, что таким путем приходим, в частности, к утверждениям из статьи [9], соответствующим здесь пунктам (1) и (2) при $r(B) = 1$.

Примечание 3.3. Для конкретного определения стабилизирующего управления $u(x)$ не требуется приводить систему (1.8) к виду (3.3) — (3.4). Если известно, что условие стабилизируемости выполняется, то для системы (1.8) можно сразу искать регулятор $u(x)$, решая задачу [5] об оптимальной стабилизации системы (1.8) по отношению к функционалу

$$J(u) = \int_{t_0}^{\infty} \omega(x, u)\, dt = \int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{m} c_j u_j^2 \right) dt = \min \tag{3.8}$$

Эта задача разрешима тогда и только тогда, когда система (1.8) стабилизируема (см. [5-9, 12]).

Теперь целесообразно определить следующее понятие, введение и исследование которого и составляет основную цель данной статьи.

Определение 3.1. Случаи, рассмотренные в пункте (3) теоремы 3.1, будем называть критическими случаями стабилизации. Пусть спектр матрицы A содержит l характеристических корней λ_{p_i}, для которых $\operatorname{Re}\lambda_{p_i} > 0$ $(i = 1, \ldots, l)$, r нулевых характеристических корней $\lambda_{g_k} = 0$ $(k = 1, \ldots, r)$, q чисто мнимых корней $\operatorname{Re}\lambda_{h_k} = 0$; $\lambda_{h_k} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, q)$ и s корней λ_{r_j} с $\operatorname{Re}\lambda_{r_j} < 0$ $(j = 1, \ldots, s)$; при этом $l + r + q + s = n$.

Будем говорить, что имеет место критический случай m нулевых корней и p чисто мнимых корней, если спектр матрицы Q содержит все характеристические корни λ_{p_i} с $\operatorname{Re}\lambda_{p_i} > 0$ $(i = 1, \ldots, l)$, но не содержит ровно m корней $\lambda_{g_k} = 0$ $(k = 1, \ldots, m;\ m \leqslant r)$ и ровно p мнимых корней $\operatorname{Re}\lambda_{h_k} = 0$; $\lambda_{h_k} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, p;\ p \leqslant q)$, причем $m \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ и $m + p \geqslant 1$. Это условие эквивалентно тому, что спектр матрицы $A_{(3)}$ содержит только числа $\operatorname{Re}\lambda_{r_j} < 0$, m чисел $\lambda_{g_k} = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ и p мнимых чисел $\operatorname{Re}\lambda_{h_k} = 0$, $\lambda_{h_k} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, p)$.

Примечание 3.4. Если матрицы A и B системы (1.8) действительны, то p — четное число. Это следует из того, что матрицу D можно выбрать действительной, а тогда матрицы Q и $A_{(3)}$ тоже будут действительны.

§ 4. Геометрический критерий стабилизируемости. Пусть матрица A имеет простую структуру, т. е. имеет n линейно независимых собственных векторов. Рассмотрим систему (1.8), где $r(B) = m \leqslant n$. Пусть матрица V (2.1) имеет ранг r $(m \leqslant r \leqslant n)$. Возьмем матрицу W^r в виде (2.12). Столбцы W^r порождают подпространство $\{W^r\}$ из $\{R^n\}$. Обозначим собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_j матрицы A символом $s_{(j)}$. Система векторов $s_{(j)}$ образует невырожденную матрицу $S = \| s_{(1)}, \ldots, s_{(n)} \|$. Из системы $\{s_{(j)}\}$ выделим матрицу S^{n-r}, которая вместе с W^r образует линейно независимую систему n базисных векторов

$$K = \| W^r, S^{n-r} \| = \| B^m, AG^{r-m}, S^{n-r} \| \tag{4.1}$$

Невырожденное линейное преобразование

$$x = Kp \tag{4.2}$$

переведет систему (1.8) в систему

$$\frac{dp}{dt} = Hp + B_* u \tag{4.3}$$

где $H = K^{(-1)}AK$. $B_* = K^{(-1)}B$ имеют вид (2.6), (2.13) соответственно.

Используя свойство $As_{(j)} = \lambda_j s_{(j)}$, вычислим матрицу H. Имеем, подобно (2.7)

$$H = K^{(-1)}AK = \|W^r, S^{n-r}\|^{(-1)}\|W^r Q^r, AS^{n-r}\| = \|W^r, s_{(i_1)}, \ldots, s_{(i_{n-r})}\|^{(-1)} \times$$

$$\times \|W^r Q^r, \lambda_{i_1} s_{(i_1)}, \ldots, \lambda_{i_{n-r}} s_{(i_{n-r})}\| = \left\| \begin{array}{c|c} Q_r{}^r & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_{i_1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \lambda_{i_{n-r}} \end{matrix} \end{array} \right\| \tag{4.4}$$

где матрица Q вычисляется по (2.3) и не зависит от S^{n-r}.

Аналогичным образом проверяется, что преобразование (4.2) при

$$K_* = \|W^r, C^{n-r-m}, S^m\| \; (m < n - r, \; S^m = \|s_{(i_1)}, \ldots, s_{(i_m)}\|)$$

где C^{n-r-m} — какая-либо матрица, дополняющая $\|W^r, S^m\|$ до базиса в $\{R^n\}$, преобразует матрицу A к виду

$$H = K_*{}^{(-1)}AK_* = \left\| \begin{array}{c|c|c} Q_r & A^{n-r-m}_{(2)*} & 0 \\ \hline 0 & A^{n-r-m}_{(3)*} & \begin{matrix} \lambda_{i_1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \lambda_{i_m} \end{matrix} \end{array} \right\| \tag{4.5}$$

В силу (2.13), (4.4) система (4.3) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = Qy + \left\| \begin{matrix} E_m \\ O^m_{r-m} \end{matrix} \right\| u, \qquad y \in \{R^r\} \tag{4.6}$$

$$\frac{dz_{i_k}}{dt} = \lambda_{i_k} z_{i_k}, \qquad p = \left\| \frac{y}{z} \right\| \qquad (k = 1, \ldots, n - r) \tag{4.7}$$

Для решения вопроса о возможности стабилизации системы (1.8) в соответствии с теоремой 3.1 теперь следует определить, какие именно λ_{ik} войдут в матрицу

$$A_{(3)} = \left\| \begin{matrix} \lambda_{i_1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \lambda_{i_{n-r}} \end{matrix} \right\| \tag{4.8}$$

Для выяснения геометрической картины распределения λ_j среди Q и $A_{(3)}$ (4.8) отметим свойства векторов образующих матрицы W^r и S.

Свойство 4.1. Если числа λ_j различны, то матрица S содержит ровно r собственных векторов $s_{(j)}$, попадающих в пространство $\{W^r\}$.

Действительно, пространству $\{W^r\}$ не может принадлежать больше, чем r собственных векторов; если бы их было меньше r, то за счет выбора вектора $s_{(i_k)}$ в матрице $K_* = \|W^r, C^{n-r-1}, s_{(i_k)}\|$ можно было бы менять по построению (4.5) спектр матрицы $A_{(3)}$, что противоречит лемме 2.2.

Опираясь на линейную независимость векторов $s_{(j)} \in S$, свойство 4.1 можно доказать и без использования леммы 2.2.

В самом деле, предположим, что матрица S содержит лишь k векторов $s_{(j)}$, лежащих в $\{W^r\}$, и пусть эти векторы образуют матрицу S^k, причем

$k < r$. Остальные векторы $s_{(j)} \in S$ $(j = k+1, \ldots, n)$ пусть образуют матрицу S^{n-k}. Пространства $\{S^k\}$, $\{S^{n-k}\}$ и $\{W^r\}$ обладают свойством

$$A\{S^k\} \subset \{S^k\}, \qquad A\{S^{n-k}\} \subset \{S^{n-k}\}, \qquad A\{W^r\} \subset \{W^r\}$$

Так как $k < r$, то найдутся векторы $w \in \{W^r\}$, такие, что

$$w = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j s_{(j)} \qquad \left(\sum \mu_{(j)}^2 \neq 0\right)$$

т. е. пересечение

$$\{W_*\} = \{S^{n-k}\} \cap \{W^r\}$$

содержит ненулевые векторы. По построению ясно, что $\{W_*\}$ не содержит ни одного собственного вектора $s_{(j)}$ матрицы A. Однако имеем $A\{W_*\} \subset \{W_*\}$. Отсюда следует, что $\{W_*\}$ содержит по крайней мере один собственный вектор $s_{(j)}$ матрицы A. Полученное противоречие доказывает, что $k < r$ быть не может.

Свойство 4.2. Если среди чисел λ_j имеются кратные, то при простой структуре матрицы A, как известно [4], каждому корню λ^0 кратности p_0 соответствует ровно p_0 линейно независимых собственных векторов $s_{(j)}{}^0$ $(j = 1, \ldots, p_0)$. Пусть кратность корня λ^0 в матрице Q_r^r равна k_0; $0 \leqslant k_0 \leqslant \min(r, p_0)$.

Тогда линейно независимые векторы $s_{(j)}{}^0$ $(j = 1, \ldots, p_0)$ можно выбрать так, что ровно k_0 из них попадут в $\{W^r\}$.

Действительно, пусть p_i — кратность λ_i в матрице A, k_i — кратность λ_i в матрице Q, и пусть векторы $s_{(ij)}$ $(j = 1, \ldots, p_i)$, соответствующие собственному значению λ_i, как-нибудь выбраны. Матрица

$$K_{(i)}^{r+p_i} = \| W^r,\ s_{(i1)}, \ldots, s_{(ip_i)} \| \tag{4.9}$$

имеет ранг

$$r(K_{(i)}) = r + p_i - k_i \tag{4.10}$$

В самом деле, если

$$r(K_{(i)}) = r + m_i > r + p_i - k_i$$

то преобразование (4.2) при $K_* = \| W^r, C^{n-r-m_i}, S^{m_i} \|$ приводит матрицу A к виду (4.5), где кратность λ_i в $A_{(3)}$ была бы равна $m_i > p_i - k_i$, что невозможно, так как при доказательстве леммы 2.2 было установлено равенство $m_i = p_i - k_i$. Итак

$$r(K_{(i)}) \leqslant r + p_i - k_i \tag{4.11}$$

для всех λ_i. Если бы в (4.11) по крайней мере в одном случае было строгое неравенство, то из (4.11) вытекало бы, что $r(\| W^r, S^n \|) < n$. Следовательно, справедливо равенство (4.10). Но (4.10) означает, что для числа λ^0 можно найти новые собственные векторы

$$s_{(i)}{}^{0*} = \sum_{j=1}^{p_0} \alpha_i{}^j s_{(j)}{}^0 \qquad (\alpha_i{}^j = \text{const};\ i, j = 1, \ldots, p_0) \tag{4.12}$$

такие, что ровно k_0 из них попадают в пространство $\{W^r\}$.

Таким образом, в случае кратных корней λ_j при простой структуре матрицы A можно выбрать собственные векторы $s_{(i)}$ так, что матрица S будет содержать ровно r векторов, попадающих в пространство $\{W^r\}$.

Свойство 4.3. Если A и B действительны, то комплексно сопряженные векторы оба одновременно попадают в пространство $\{W^r\}$. В самом деле, в этом случае матрицы V и W^r будут действительны, а тогда если вектор $s_{(j)}\in\{W^r\}$, то также и сопряженный ему вектор $\bar{s}_{(j)}$ принадлежит $\{W^r\}$.

Используя свойства 4.1, 4.2 и 4.3, можно определить $\lambda_i \in A_{(3)}$. Для этого находим матрицу S собственных векторов A и определяем столбцы $s_{(j_i)}$, входящие в выражение (4.1) для матрицы K. Именно из матриц

$$K_{(j)}^{r+k} = \| W^r, \; s_{(j_1)}, \ldots, s_{(j_k)} \| \qquad (k = q_j \text{— кратность } \lambda_j) \tag{4.13}$$

выделяем субматрицы максимального ранга r_j $(r \leqslant r_j \leqslant r + q_j)$, содержащие W^r. Вошедшие в них столбцы $s_{(j_i)}$ войдут в выражение (4.1) матрицы K; соответствующие им числа λ_j с кратностями $r_j - r$ войдут в матрицу $A_{(3)}$.

Таких векторов $s_{(j_i)}$ будет ровно $n - r$. В случае действительных A и B из двух комплексно сопряженных собственных векторов достаточно проверить один.

Теперь сформулируем геометрический критерий стабилизируемости.

Обозначим собственные векторы, соответствующие собственным числам

$$\operatorname{Re}\lambda_{p_i} > 0 \quad (i = 1, \ldots, l), \qquad \operatorname{Re}\lambda_{h_k} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\operatorname{Re}\lambda_{r_j} < 0 \quad (k = 1, \ldots, q)$$

соответственно символами

$$s_{(i)}^{+}, \; s_{(k)}^{0}, \; s_{(j)}^{-} \qquad (l + m + q = n)$$

Теорема 4.1. (1) Если все собственные векторы $s_{(i)}^{+}$ $(i = 1, \ldots, l)$ и $s_{(k)}^{0}$ $(k = 1, \ldots, m)$ принадлежат пространству $\{W^r\}$, то невозмущенное движение системы (1.7) стабилизируется регулятором $u = Px$ независимо от членов $g(x, u)$.

(2) Если хотя бы один собственный вектор $s_{(i)}^{+}$ не принадлежит пространству $\{W^r\}$, то стабилизация системы (1.7) невозможна.

(3) Если все собственные векторы $s_{(i)}^{+}$ $(i = 1, \ldots, l)$ принадлежат пространству $\{W^r\}$, но хотя бы один вектор $s_{(k)}^{0}$ не содержится в $\{W^r\}$, то возможность стабилизации системы (1.7) определяется членами $g(x, u)$.

Справедливость теоремы 4.1 следует из теоремы 3.1 по свойствам (4.1), (4.2) и (4.3), по лемме 2.2 и по построению (4.4) матрицы $A_{(3)}$ (4.8) при преобразовании (4.4).

Этим же путем из теоремы 4.1 выводится следующее утверждение, которое сформулируем, предполагая, что все числа λ_j различны.

Следствие 4.1. (1). Если имеется $n - r$ собственных векторов $s_{(j)}^{-}$, не попадающих в пространство $\{W^r\}$, то невозмущенное движение системы (1.7) стабилизируется регулятором $u = Px$ независимо от $g(x, u)$.

(2) Если в совокупности векторов $s_{(k)}^{0}$, $s_{(j)}^{-}$ имеется меньше, чем $n - r$ векторов, не содержащихся в $\{W^r\}$, то стабилизация системы (1.7) невозможна.

(3) Если условие (1) не выполняется, но в совокупности векторов $s_{(k)}^{0}$, $s_{(j)}^{-}$ имеется $n - r$ векторов, не попадающих в пространство $\{W^r\}$, то возможность стабилизации (1.7) зависит от членов $g(x, u)$.

Примечание 4.1. Случай кратных корней λ_j при простой структуре матрицы A отличается от рассмотренного в следствии 4.1 тем, что векторы $s_{(j_k)}$ $(k = 1, \ldots, q_j)$, соответствующие корню λ_j кратности q_j в условиях (1) — (3), надо проверять не по отдельности, а всей группой и считать столько раз, сколько векторов $s_{(j_k)}$ войдет в субматрицу из (4.13), содержащую W^r и имеющую максимальный ранг.

В соответствии с определением 3.1 дадим теперь геометрическую классификацию критических случаев стабилизации.

Сохраним обозначение $s_{(k)}^0$ $(k = 1, \ldots, m)$ для собственных векторов, соответствующих нулевым корням $\lambda_{h_k} = 0$, и введем обозначение $s_{(h)}^0$ $(h = 1, \ldots, f)$ для векторов, соответствующих чисто мнимым корням $\operatorname{Re}\lambda_h = 0$, $\lambda_h \neq 0$. Обозначения $s_{(i)}^{+}$ $(i = 1, \ldots, l)$ и $s_{(j)}^{-}$ $(j = 1, \ldots, q)$ остаются прежними; $l + m + q + f = n$.

Из теоремы 4.1 следует, что критический случай стабилизации имеет место тогда и только тогда, когда все векторы $s_{(i)}^{+}$ принадлежат $\{W^r\}$, но хотя бы один собственный вектор $s_{(k)}^0$, $s_{(h)}^0$ не содержится в $\{W^r\}$.

При этом имеет место критический случай k нулевых корней и p чисто мнимых корней, если все $s_{(i)}^{+} \in \{W^r\}$, но в совокупности m векторов $s_{(j)}^0$ $(j = 1, \ldots, m)$ имеется ровно k векторов $s_{(j)}^0$, входящих в субматрицу из (4.13), содержащую W^r и имеющую максимальный ранг $r^0 = r + k$, а в совокупности f векторов $s_{(h)}^0$ $(h = 1, \ldots, f)$ имеется ровно p векторов $s_{(h)}^0$, входящих в субматрицу из (4.13), содержащую W^r и имеющую максимальный ранг $r^* = r + p$.

Примечание 4.2. Если матрицы A и B в (1.8) действительны, то p — четное число.

Пусть теперь матрица A имеет сложную структуру. Тогда уже нельзя дать геометрическую картину условий стабилизируемости, опирающуюся только на собственные векторы A. В общем случае рассмотрим матрицу $T = \| T_{(1)}, \ldots, T_{(n)} \|$, преобразующую A к жордановой форме G, т. е.

$$G = T^{(-1)} A \cdot T \tag{4.14}$$

Пусть матрица A имеет l характеристических корней с $\operatorname{Re}\lambda_{p_i} > 0$, m корней с $\operatorname{Re}\lambda_{h_k} = 0$ и q корней с $\operatorname{Re}\lambda_{r_j} < 0$. Скажем, что столбец $T_{(s)}$ матрицы T отвечает корню λ_s, если на главной диагонали G в s-ой строке стоит λ_s. Векторы $T_{(s)}$, отвечающие корням $\operatorname{Re}\lambda_{p_i} > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{h_k} = 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_{r_j} < 0$, обозначим символами $T_{(i)}^{+}$, $T_{(k)}^{0}$ и $T_{(j)}^{-}$ соответственно.

Теперь можно получить геометрический критерий стабилизируемости, опирающийся на $T_{(s)}$. Для этого достаточно в теореме 4.1 заменить $s_{(i)}^{+}$, $s_{(k)}^0$ и $s_{(j)}^{-}$ на $T_{(i)}^{+}$, $T_{(k)}^0$ и $T_{(j)}^{-}$.

Для доказательства справедливости получающегося таким образом критерия следует рассмотреть преобразование (4.2), где

$$K = \| W^r, T^{n-r} \| \tag{4.15}$$

причем T^{n-r} — матрица из столбцов $T_{(s_i)} \in T$ $(i = 1, \ldots, n - r)$, образующих с W^r базис в $\{R^n\}$. При этом спектр $A_{(3)}$ в (2.6) будет состоять из чисел $\lambda_{s_1}, \ldots, \lambda_{s_{n-r}}$. В самом деле, решение $\{y(t), z(t)\}$ преобразованной системы

$$\frac{dy}{dt} = Qy + A_2 z, \qquad \frac{dz}{dt} = A_{(3)} z, \qquad x = K \left\| \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\| \tag{4.16}$$

с начальным условием $y(0) = 0$, $z_i(0) = 0$, $i \neq s_j$, $z_{s_j}(0) = 1$ соответствует решению $x(t)$ системы (1.8) с начальным условием $x(0) = T_{s_j}$.

Но это решение $x(t)$ имеет вид [2, 3]

$$x(t) = P(t) e^{\lambda_{s_j} t} \tag{4.17}$$

где $P(t)$ — вектор-многочлен. Поэтому решение $z(t)$ системы

$$\frac{dz}{dt} = A_{(3)} z \tag{4.18}$$

с начальным условием $z_i(0) = 0$ $(i \neq s_j)$, $z_{s_j}(0) = 1$ имеет вид

$$z(t) = Q_{s_j}(t) e^{\lambda_{s_j} t}$$

где $Q_{s_j}(t)$ — вектор-многочлен, ибо $\{y(t), z(t)\} = K^{-1} x(t)$. Отсюда следует, что фундаментальная матрица $Z(t)$ решений системы (4.18) имеет вид

$$Z(t) = \| Q_{(s_1)}(t) e^{\lambda_{s_1} t}, \ldots, Q_{(s_{n-r})}(t) e^{\lambda_{s_{n-r}} t} \|$$

а это согласно известной теории строения решений линейных систем [2, 3] и доказывает наше утверждение о спектре $A_{(3)}$.

Дальнейшее доказательство критерия повторяет доказательство теоремы 3.1.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Критический случай стабилизируемости системы (1.7) имеет место тогда и только тогда, когда все векторы $T^+_{(i)}$ принадлежат $\{W^r\}$, но хотя бы один вектор $T^0_{(k)}$ не принадлежит $\{W^r\}$.

Примечание 4.3. В случае простой структуры A векторы $T_{(i)}$ совпадают [4] с собственными векторами $s_{(i)}$ матрицы A.

§ 5. Критический случай одного нулевого корня. Пусть правые части (1.8) — аналитические функции в окрестности точки $x = 0$. Предположим в соответствии с определением 3.1, что спектр матрицы Q (2.2) включает в себя все характеристические корни λ_i матрицы A с $\operatorname{Re} \lambda_i \geqslant 0$, но не включает ровно один нулевой характеристический корень $\lambda^0 = 0$ ее.

Согласно § 4 этот случай имеет место тогда, когда все векторы $s^+_{(i)}$, $s^0_{(h)}$ простой матрицы A содержатся в подпространстве $\{\|B, AB, \ldots, A^{(n-1)}B\|\}$, но ровно один вектор $s^0_{(k)}$ $(k = 1)$ не содержится в этом подпространстве. При кратных корнях λ_i или при сложной структуре A случай одного нулевого корня имеет место тогда, когда матрица $\|W^r, T^0_{(1)}, \ldots, T^0_{(m)}\|$, содержащая все $T^0_{(k)}$ $(k = 1, \ldots, m)$, отвечающие корню $\lambda^0 = 0$ кратности m, имеет ранг $r + 1$, и все векторы $T^+_{(i)}$, $T^0_{(h)}$ содержатся в подпространстве $\{\|B, AB, \ldots, A^{(n-1)}B\|\}$.

Подсистема (3.4) имеет в таком случае один линейный интеграл [1-3] $lz = \mathrm{const}$, $l = (l_1, \ldots, l_{n-r}) = \mathrm{const}$, которому соответствует линейный интеграл

$$\xi = \| O_1{}^r L_1{}^{n-r} \| D^{(-1)} x = (0, \ldots, 0, l_1, \ldots, l_{n-r}) D^{(-1)} x = \mathrm{const} \qquad (L_1{}^{n-r} = l) \tag{5.1}$$

системы (1.8), каково бы ни было управление $u(x)$.

Принимая величину ξ за новую переменную и полагая $x_i = v_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, приводим нелинейную систему (1.7) к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = X(\xi, v, u) \qquad (\xi \in \{R^1\},\ u \in \{R^m\}) \tag{5.2}$$

$$\frac{dv}{dt} = A_* v + B_* u + c\xi + Y(\xi, v, u) \qquad (v \in \{R^{n-1}\}) \tag{5.3}$$

Здесь ξ — скаляр, v — $(n-1)$-вектор, A_* — $(n-1)\times(n-1)$-матрица, $B_* = (n-1)\times m$-матрица, c — $(n-1)$-вектор, X, Y — векторы, содержащие члены выше первого порядка малости по ξ, v, u.

Можно проверить, что система

$$dv/dt = A_* v + B_* u \tag{5.4}$$

удовлетворяет условию (1) теоремы 3.1. Поэтому она может быть стабилизирована управлением типа (3.6). Пусть найденный для (5.4) регулятор имеет вид

$$u_*(v) = P_m{}^{n-1} v \tag{5.5}$$

Будем искать для системы (5.2) — (5.3) регулятор в виде

$$u^j(v, \xi) = u_*{}^j(v) + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s{}^j \xi^s + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k{}^j |\xi|^k \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5.6}$$

При $\beta_k{}^j = 0$ получается аналитический регулятор. Введение неаналитической добавки расширяет, вообще говоря, возможности стабилизации (см. пример стр. 1004).

В соответствии с методом Ляпунова [1-3] рассмотрим систему

$$\varphi(\xi, |\xi|, v) = A_* v + B_* u + c\xi + Y(\xi, v, u) = 0 \tag{5.7}$$

где $u = u(\xi, |\xi|, v)$ по (5.5), (5.6).

После подстановки (5.6) в (5.2) — (5.3) система (5.4) принимает вид

$$dv/dt = (A_* + B_* P)\, v \tag{5.8}$$

Так как $u^*(v)$ будет регулятором для (5.4), то

$$\left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial v_j} \right|_{\xi = v = 0} = |A_* + B_* P| \neq 0 \tag{5.9}$$

Поэтому в достаточно малой окрестности начала координат $v = 0$, $\xi = 0$ существует единственное решение системы (5.7), представляемое рядами

$$v_i{}^\circ = \sum_{s+k=1}^{\infty} a_{sk}{}^i \xi^s |\xi|^k \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{5.10}$$

в которых коэффициенты a_{sk}^i определенным образом выражаются через коэффициенты α_s^j, β_k^j.

Функция $X(\xi, v, u)$ в правой части (5.2) имеет вид

$$X(\xi, v, u) = \sum_{k+l+p=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} b_{klp}{}^{ij} \xi^k v_i^l u_j^p \tag{5.11}$$

Подставляя (5.5), (5.6) и (5.10) в (5.11), получим ряд

$$X^\circ(\xi, |\xi|) = \sum_{s+k=2}^{\infty} c_{sk} \xi^s |\xi|^k \quad (c_{sk} = c_{sk}(\alpha_s^j, \beta_k^j)) \tag{5.12}$$

Ряд (5.12) есть правая часть уравнения (5.2), получающаяся после преобразования Ляпунова

$$v_i = w_i + v_i^\circ \qquad (i = 1, \ldots n-1) \tag{5.13}$$

если положить $w_i \equiv 0$.

Подстановка (5.13) преобразует систему (5.2) — (5.3) к новым переменным ξ, w. В силу выбора управления (5.6) преобразованная система может иметь разрывы в правых частях на плоскости $\xi = 0$. Однако можно проверить, что это не препятствует здесь проведению рассуждений по плану Ляпунова [1].

Обозначим $b_{k00}{}^{ij} = b_k$ в (5.11). Если в (5.11) совокупность членов наинизшего измерения

$$k + l + p = \min \tag{5.14}$$

имеет вид $b_k \xi^k$, то:

1) при k — четном или при k — нечетном, но $b_k > 0$, движение системы (5.2) — (5.3), а следовательно, и (1.7) не может быть стабилизировано регулятором (5.6);

2) при k — нечетном, $b_k < 0$, движение системы (1.7) стабилизируется регулятором $u_*(v)$ (5.5).

Это следует непосредственно из известной теории критического случая одного нулевого корня [1—3].

Если же члены (5.14) в (5.11) содержат переменные v_i, u_j, то ряд (5.12) в совокупности членов наинизшего измерения

$$s + k = l \qquad (l = 2, 3, \ldots) \tag{5.15}$$

либо будет содержать функции от ξ, не зависящие от коэффициентов α_s^j, β_k^j (этот случай аналогичен рассмотренному в предыдущем абзаце), либо будет содержать функции от ξ, зависящие от α_s^j или β_k^j. В последнем случае применяем следующую процедуру.

Обозначим сумму коэффициентов при всех нечетных функциях в совокупности членов (5.12), удовлетворяющих (5.15) через $h_l^* = h_l^*(\alpha_s^j, \beta_k^j)$, и аналогичную сумму при четных функциях — через $h_l = h_l(\alpha_s^j, \beta_k^j)$.

Тогда стабилизация обеспечивается управлением (5.6), если коэффициенты α_s^j, β_k^j в (5.6) можно выбрать так, чтобы для членов наинизшего измерения удовлетворялось условие $h_p^* < -|h_p|$, где $p = \min l \geqslant 2$.

При этом в (5.6) достаточно предположить

$$u^j(v) = u_*^j(v) + \alpha^j\xi + \beta^j |\xi|$$

В особенном случае $X(\xi, v, u) \equiv 0$ стабилизация системы (5.2) — (5.3) регулятором (5.6) невозможна, однако при $u = u_*(v)$ (5.5) невозмущенное движение (5.2) — (5.3) будет устойчиво по Ляпунову, а каждое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически приближается к некоторому установившемуся движению $\xi = a$, $v_i = 0$.

Если нельзя удовлетворить условию $h_p^* < -|h_p|$, то надо удовлетворить хотя бы ослабленному условию $h_p^* = -|h_p|$. После этого следует рассмотреть в (5.12) совокупность членов следующего по порядку измерения. Оставшимися коэффициентами α_s^j, β_k^j надо распорядиться так, чтобы для этой совокупности удовлетворялось одно из условий

$$h_{p+1}^* < -|h_{p+1}| \quad \text{или} \quad h_{p+1}h_p < 0, \quad h_{p+1}^* < |h_{p+1}|$$

или хотя бы одно из условий:

$$h_{p+1}h_p > 0, \quad h_{p+1}^* = -|h_{p+1}| \quad \text{или} \quad h_{p+1}h_p \leqslant 0, \quad h_{p+1}^* = |h_{p+1}| \qquad \text{и т. д.}$$

Регулятор будет построен, если в этом процессе наступит момент, когда после некоторого шага $l > p$ будет выполнено соотношение

$$h_l^* < -|h_l| \tag{5.16}$$

или соотношение

$$h_l h_p < 0, \quad h_l^* < |h_l| \tag{5.17}$$

причем величины h_i^*, h_i при $p \leqslant i \leqslant l-1$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &h_{i_m}h_p > 0, \qquad h_{i_m}^* = -|h_{i_m}|, \qquad p \leqslant i_m \leqslant l-1 \\ &h_{i_n}h_p \leqslant 0, \qquad h_{i_n}^* = |h_{i_n}|, \qquad p+1 \leqslant i_n \leqslant l-1 \\ &(m = 1, \ldots, r;\ n = 1, \ldots, q;\ r + q = l - p) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Если же для любых возможных значений α_s^j, β_k^j в силу связей или структуры системы (5.2) — (5.3) при некотором $l \geqslant p$ и при условиях (5.18) для $p \leqslant i \leqslant l-1$ оказывается выполненным соотношение

$$h_l^* > |h_l| \tag{5.19}$$

или соотношение

$$h_l^* > -|h_l|, \qquad h_l h_p > 0 \tag{5.20}$$

то стабилизация указанным путем не проходит.

Справедливость этих утверждений следует из критериев устойчивости неаналитической системы в критическом случае одного нулевого корня [16].

Аналитический регулятор получается из (5.6) при $\beta_k^j = 0$. Регулятор нужно искать в виде

$$u^j(v) = u_*^j(v) + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^j \xi^s \tag{5.21}$$

В этом случае ряд (5.12) будет иметь вид

$$X^\circ(\xi) = \sum_{s=2}^{\infty} c_s \xi^s \tag{5.22}$$

Обозначим через $c_s{}^*$ первый из отличных от нуля коэффициентов ряда (5.22).

Тогда стабилизация возможна [1-3], если подходящим выбором α_s^j можно добиться того, чтобы выполнялось условие

$$c_s{}^* < 0 \qquad (s \text{ — нечетное}) \tag{5.23}$$

Если в силу связей или структуры системы (5.2) — (5.3) удовлетворить условию (5.23) нельзя и $c_s{}^* \neq 0$ при s — четном, или $c_s{}^* > 0$ при s — нечетном, то система (1.7) не стабилизируется регулятором (5.21).

Примечание 5.1. Выше предполагалось, что матрица B_{*n-1}^{m} в (5.4) удовлетворяет условию (2.8) : $r(B_*) = m = \max$. Если этого нет, то делаем замену управлений (2.10). Тогда размерность регулятора $u_*(v)$ (5.5) будет равна рангу $r(B_*)$. Так как размерность нелинейного регулятора u (5.6) равна m, то вектор $u_*(v)$ следует дополнить $m - r(B_*)$ компонентами, которые можно взять произвольными аналитическими функциями вектора v.

Рассмотрим пример, построенный на основе примера из книги [2] (стр. 138).

Пример. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2, \qquad \frac{dy}{dt} = y + kx + lx^2 + mxy + ny^2 + u$$

где a, b, c, k, l, m, n — постоянные, x, y, u — скаляры. При $u \equiv 0$ система неустойчива. Линейное приближение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = y + kx + u$$

Имеем матрицы

$$A = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{matrix}\right\|, \qquad B = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|, \qquad V = \|B, AB\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|, \qquad r(V) = 1 < 2$$

Нулевой корень $\lambda_1 = 0$ в неуправляемой подсистеме $dx / dt = 0$. Для уравнения $dy / dt = y + u$ регулятор можно взять в виде $u_* = -2y$.

1) Решение в подклассе (5.21) аналитических регуляторов. Ищем регулятор вида (5.21)

$$u = u_* + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s x^s = -2y + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s x^s$$

Система (5.7) имеет вид

$$-y + kx + lx^2 + mxy + ny^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s x^s = 0$$

$$y(x) = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

где

$$B_1 = k + \alpha_1, \quad B_2 = l + mk + nk^2 + m\alpha_1 + 2nk\alpha_1 + n\alpha_1{}^2 + \alpha_2 = B_2{}^0 + \alpha_2$$

$$B_3 = (m + 2nk + 2n\alpha_1) B_2 + \alpha_3 = B_3{}^0 + \alpha_3$$

Имеем

$$X^0 = ax^2 + bxy + cy^2 = A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$$

где

$$A_2 = a + bk + b\alpha_1 + c(k + \alpha_1)^2, \qquad A_3 = (b + 2cB_1)(B_2{}^0 + \alpha_2)$$

$$A_4 = cB_2{}^2 + (b + 2cB_1)(B_3{}^0 + \alpha_3)$$

Параметр α_1 выбираем из условия $A_2 = 0$; если это невозможно (например, при $b = c = 0$, $a \neq 0$), то стабилизация невозможна. Пусть при выбранном α_1 имеем $A_2 = 0$. Если при этом $b + 2cB_1 \neq 0$, то α_2 берем из условия $A_3 < 0$; если при любом возможном α_2 имеем $A_3 > 0$, то стабилизация невозможна. Если $b + 2cB_1 = 0$, то $A_3 = 0$; тогда α_2 — резервный параметр, которым можно распорядиться в дальнейшем.

Пусть $b + 2cB_1 = 0$; $A_3 = 0$. Тогда α_2, α_3 и α_4 выбираем из условия $A_4 = 0$, $A_5 < 0$ и т. д. Определив первые подходящие α_s $(s = 1, \ldots, s_0)$, полагаем остальные $\alpha_{s_0+n} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и регулятор найден.

2) Решение в классе регуляторов вида (5.6). Ищем регулятор вида

$$u = u_* + \alpha x + \beta\,|x| = -2y + \alpha x + \beta\,|x|$$

Имеем систему (5.7)

$$-y + kx + lx^2 + mxy + ny^2 + \alpha x + \beta\,|x| = 0$$

$$y(x, |x|) = B_1 x + B_1^*|x| + \ldots \qquad (B_1 = k + \alpha,\ B_1^* = \beta)$$

Имеем

$$X^\circ = ax^2 + bxy + cy^2 = A_2 x^2 + A_2^* x\,|x| + \ldots,$$

где

$$A_2 = a + bB_1 + cB_1^2 + cB_1^{*2} = a + b(k + \alpha) + c(k + \alpha)^2 + c\beta^2$$

$$A_2^* = bB_1^* + 2cB_1B_1^* = [b + 2c\,[k + \alpha)]\,\beta$$

Выбираем α, β так, чтобы выполнялось условие $A_2^* < -|A_2|$, т. е.

$$[b + 2c(k + \alpha)]\,\beta < -|a + b(k + \alpha) + c(k + \alpha)^2 + c\beta^2|$$

Если это сделать можно, то регулятор найден. Пусть, например, $a, b, c > 0$, $b^2 - 4ac > 0$. Тогда стабилизирующим управлением будет регулятор, в котором $\alpha = -k$; $\beta_2 > \beta > \beta_1$, где β_1 и β_2 — корни уравнения $c\beta^2 + b\beta + a = 0$. Если при любом возможном выборе α, β будет $A_2^* > -|A_2|$, то стабилизация регулятором (5.6) невозможна.

Если можно найти такие α, β, чтобы было по крайней мере $A_2^* = -|A_2|$, то надо рассмотреть члены следующего измерения, выбирая u в общем виде (5.6).

Поступила 31 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехтеоретиздат, 1953.
5. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 4, 5, 6; 1961, т. XXII, № 4; 1962, т. XXIII, № 11.
6. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control Sumposium Internacional de Ecuaciones Differenciales Ordinarias, Publ. por La Univ. Nac. Autonoma de Mexico y La Socieded. Matem. Mexicana, 1961.
7. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК, т. I. Изд. АН СССР, 1961.
8. Курцвеиль Я. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика. 1961, т. XXII, № 6.
9. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
10. Markus L., Lee E. B. On the existence of optimal controls I. Basic Engr. Trans. ASME, 1961, 83. D.
11. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
12. Красовский Н. Н. К проблеме существования оптимальных траекторий. Изв. высш. учебн. завед. 1959, № 6 (13).
13. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
14. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, вып. 1.
15. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
16. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.