Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

М. С. Яров-Яровой
(Москва)

Работы Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина [1] и М. Д. Кислика [2] по построению аналитической теории движения искусственных спутников Земли показывают важность общего исследования канонических систем, интегрируемых методом разделения переменных.

Ниже предлагается сравнительно простой способ построения полного интеграла с разделенными переменными уравнения Гамильтона—Якоби. Вид самого уравнения может быть произвольным. Однако особое внимание уделяется тому случаю, когда левая часть уравнения есть сумма однородных полиномов второй, первой и нулевой степени относительно импульсов, причем коэффициенты этих полиномов зависят не только от координат, но и от времени. При весьма слабых предположениях рассматриваемый способ дает необходимые и достаточные условия интегрируемости [1], налагаемые на характеристическую функцию задачи. Дается способ выделения всех тех уравнений, которые интегрируются после преобразования координат или после общего контактного преобразования. Доказано, что если уравнение Гамильтона—Якоби имеет тип уравнения для движения материальной точки в n-мерном эвклидовом пространстве, то оно интегрируется [1] только в эллипсоидальных координатах и их вырождениях.

После того как Якоби [3, стр. 6] в 1843 г. в результате точного математического анализа установил, что главную функцию Гамильтона V можно найти не из двух, как это утверждал Гамильтон, а из одного уравнения в частных производных первого порядка, встал вопрос о методах интегрирования этого уравнения. Среди всех методов для некоторых уравнений оказался весьма эффективным метод разделения переменных, и Якоби в той же работе нашел, что уравнение Гамильтона—Якоби вида

$$^1/_2\,(p_1^2 + \ldots + p_n^2) = h \qquad (p_i = \partial V \,/\, \partial x^i) \tag{0.1}$$

интегрируется не только в прямоугольных координатах $x^1, \ldots, x^n$, но и в соответствующих эллипсоидальных координатах. Выражения x^i через эллипсоидальные координаты он назвал «замечательной подстановкой».

Вскоре встал вопрос об интегрировании уравнения Гамильтона — Якоби более общего вида [2]

$$^1/_2 g^{ij}p_ip_j - U = h \qquad (p_i = \partial V \,/\, \partial q^i;\ \ i, j = 1, \ldots, n) \tag{0.2}$$

и Лиувилль в 1847 г. нашел свой случай интегрируемости. Он доказал также, что уравнение (0.1) для $n = 2$ может интегрироваться только в эллиптических координатах и их вырождениях (полярных и т. п.).

В 1865 г. была опубликована кандидатская, в 1869 г.— докторская диссертация В. Г. Имшенецкого [4], в которых метод разделения переменных был применен не только к уравнению Гамильтона — Якоби, но и к общему уравнению в частных производных первого порядка. Его идеи использованы в этой работе.

---

[1] Для краткости в дальнейшем слова «методом разделения переменных» будут везде опускаться, если не оговорено противное.

[2] В статье используются обозначения, принятые в тензорном анализе.

В 1880 г. Морера [5] нашел все случаи интегрируемости уравнения (0.2) для $n = 2$. Независимо от него эти же случаи нашел Штеккель [6] в 1891 г. В этой работе Штеккель также нашел весьма общий случай интегрируемости уравнения (0.2), который представляет собой обобщение случая Лиувилля. Он же [7] в 1893 г. доказал, что этот случай — самый общий для уравнения (0.2), содержащего только квадраты импульсов

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g^{ii}p_i^2 - U = h \tag{0.3}$$

Доказательство Штеккеля необходимости и достаточности интегрируемости уравнения (0.3) можно найти в монографиях Шарлье [8] и А. И. Лурье [9].

После работы Штеккеля осталось найти случаи интегрируемости уравнения (0.2), содержащего произведения импульсов с разными индексами, импульсы в первой степени и явно время в характеристической функции

$$H^* = p + {}^1/_2\, g^{ij}p_ip_j + h^ip_i - U = 0 \qquad (p = \partial V / \partial t;\ i, j = 1, \ldots, n) \tag{0.4}$$

В 1904 г. Леви-Чивита в своем письме к Штеккелю [10] получил необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнения (0.2), выраженные системой уравнений в частных производных относительно характеристической функции задачи $H = H(q^1, \ldots, q^n;\ p_1, \ldots, p_n)$ общего вида

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q^i\,\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^j} + \frac{\partial^2 H}{\partial q^i\,\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \tag{0.5}$$
$$(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n)]$$

Эта система справедлива и для уравнения (0.4), если через H обозначать его левую часть, а время t считать одной из координат.

Леви-Чивита подставляет сюда характеристическую функцию задачи (0.2) и получает в уравнениях (0.5) сумму однородных полиномов относительно p_i четвертого, второго и нулевого порядков. Вследствие произвольности постоянных интегрирования в p_i все коэффициенты в этих полиномах равны нулю. Приравнивание нулю коэффициентов в полиномах четвертой степени дает систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно g^{ij}. Приравнивание нулю коэффициентов при вторых степенях p_i и свободного члена дает уравнения в частных производных относительно g^{ij} и U. Отсюда Леви-Чивита получает теорему: если интегрируется уравнение (0.2), то интегрируется уравнение с $U = 0$, т. е. при отсутствии сил. Аналогичное исследование можно провести и для уравнения (0.4).

Интегрирование уравнений для g^{ij} Леви-Чивита подразделяет на ряд случаев. Один случай для произвольного n оказалось возможным полностью исследовать. Этот случай отличается от случая Штеккеля, однако он имеет малую пользу, так как здесь обязательно $U = 0$. Рассмотрение остальных случаев исключительно сложно; поэтому Леви-Чивита ограничивается случаем $n = 2$ и подтверждает еще раз результаты, полученные Морера [5] и Штеккелем [6, 7].

В 1908 г. Даль-Аква [11] выписал явно все уравнения в частных производных для g^{ij}, которые получаются из уравнений Леви-Чивита, и исследовал их для $n = 3$, получив все четыре типа интегрируемых уравнений (для $n = 2$ получается три типа). В нашей статье [12] на основании интегрируемых типов Даль-Аква доказано, что «замечательная» подстановка Якоби является не только достаточным, но и необходимым условием того, что уравнение (0.1) интегрируется методом разделения переменных в случае $n = 3$.

В 1911 г. Бургатти [13] на основании исследований Леви-Чивита [10] и Даль-Аква [11] выписал выражения для импульсов через произвольные постоянные интегрирования α_j, h, которые являются самыми общими для $n = 2, 3$ и кажутся самыми общими с первого взгляда для произвольного n, но не смог доказать, что эти выражения действительно самые общие для $n \geqslant 4$. Выражения Даль-Аква [11] и Бургатти [13] не приводятся, так как они представляют собой частые случаи найденных в п. 1.

В последние десятилетия так и не удалось доказать, что случаи Бургатти — самые общие для произвольного n. Правда, были найдены случаи интегрируемости различных обобщений уравнения Гамильтона — Якоби. К сожалению, полного перечня работ по этому вопросу не имеется, обзорной работы также нет. Здесь упомянем кратко лишь о тех работах, которые нам известны.

Г. Н. Дубошин в своих дополнениях к переводу книги Мультона [14] отмечает, что Н. Д. Моисеев обобщил случай интегрируемости Лиувилля на характеристическую функцию вида $H = T_2 - T_0 - U$ $(T_0 \neq 0)$. В. Г. Демин [15] обобщил случай Штеккеля на уравнения, содержащие импульсы линейно.

Однако возможности здесь ограничены. Например, Зигель [16] доказал, что в некоторых весьма общих случаях даже не существует контактного преобразования $(p, q) \to (\alpha, \beta)$, выраженного аналитически (α, β — постоянные интегрирования).

1. Установим новые случаи интегрируемости уравнения (0.4).

Теорема 1.1. Пусть дано целое число r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ и пусть даны r^2 произвольных непрерывных функций $\vartheta^{ij}(q^i)$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ и $(n-r)^2$ произвольных непрерывных функций $\varphi^{ij}(q^i)$ $(i, j = r+1, \ldots, n)$ таких, что каждая из них зависит только от одной переменной q^i и образованные из них определители $\Theta = \mathrm{Det}\,\|\vartheta^{ij}\|$ и $\Phi = \mathrm{Det}\,\|\varphi^{ij}\|$ отличны от нуля. Пусть, кроме того, даны произвольные непрерывные функции

$$\vartheta^{ij}(q^i),\ \sigma^{ikl}(q^i),\ \sigma^{ik}(q^i),\ \psi^i(q^i) \quad (i = r+1 \ldots, n;\ j = 0, \ldots, r;\ k, l = 1, \ldots, r)$$

и непрерывные функции времени

$$c^{kl}(t),\quad c^{ii}(t),\quad c^k(t),\quad \psi(t) \qquad (i = r+1, \ldots, n;\ k, l = 1, \ldots, r)$$

Тогда интегрируемое методом разделения переменных уравнение Гамильтона — Якоби (0.4) с коэффициентами

$$g^{ij} = \frac{2}{\Theta^2} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} c^{kl}(t)\, \Theta^{ik}\Theta^{jl} + \qquad (i, j = 1, \ldots, r)$$

$$+ \frac{2}{\Theta^2\Phi} \sum_{m=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} c^{uu}(t)\, \Phi^{mu}\Theta^{ik}\Theta^{jl} (\vartheta^{mk}\vartheta^{ml} - \sigma^{mkl}) \tag{1.1}$$

$$g^{ij} = -\frac{2}{\Theta\Phi} \sum_{u=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} c^{uu}(t)\, \Phi^{ju}\Theta^{ik}\vartheta^{jk} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, r \\ j = r+1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$g^{ii} = \frac{2}{\Phi} \sum_{u=r+1}^{n} c^{uu}(t)\, \Phi^{iu} \quad (i = r+1, \ldots, n), \qquad g^{ij} = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = r+1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$h^i = -\frac{2}{\Theta^2} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} c^{kl}(t)\, \Theta^{ik}\Theta^{jl}\vartheta^{jo} + \frac{1}{\Theta} \sum_{k=1}^{r} c^k(t)\, \Theta^{ik} -$$

$$- \frac{2}{\Theta^2\Phi} \sum_{m=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} c^{uu}(t)\, \Phi^{mu}\Theta^{ik}\Theta^{jl} (\vartheta^{mk}\vartheta^{ml} - \sigma^{mkl})\, \vartheta^{jo} + \tag{1.4}$$

$$+ \frac{1}{\Theta\Phi} \sum_{m=r+1}^{n} \sum_{u=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} c^{uu}(t)\, \Phi^{mu}\Theta^{ik}(2\vartheta^{mk}\vartheta^{mo} - \sigma^{mk}) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

$$h^i = \frac{2}{\Theta\Phi} \sum_{u=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} c^{uu}(t)\, \Phi^{iu}\Theta^{kl}\vartheta^{il}\vartheta^{ko} - \frac{2}{\Phi} \sum_{u=r+1}^{n} c^{uu}(t)\, \Phi^{iu}\vartheta^{io} \tag{1.5}$$

$$(i = r+1, \ldots, n)$$

$$U = -\frac{1}{\Theta^2} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \sum_{u=1}^{r} c^{kl}(t)\, \Theta^{mk}\Theta^{ul}\vartheta^{mo}\vartheta^{uo} +$$

$$+ \frac{1}{\Theta} \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} c^{k}(t)\, \Theta^{mk}\vartheta^{mo} + \psi(t) -$$

$$- \frac{1}{\Theta^2\Phi} \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \sum_{u=1}^{r} c^{jj}(t)\, \Phi^{ij}\Theta^{mk}\Theta^{ul}\left(\vartheta^{ik}\vartheta^{il} - \sigma^{ikl}\right)\vartheta^{mo}\vartheta^{uo} +$$

$$+ \frac{1}{\Theta\Phi} \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} c^{jj}(t)\, \Phi^{ij}\Theta^{mk}\left(2\vartheta^{ik}\vartheta^{io} - \sigma^{ik}\right)\vartheta^{mo} -$$

$$- \frac{1}{\Phi} \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} c^{jj}(t)\, \Phi^{ij}\left[(\vartheta^{io})^2 - \psi^{i}\right] \tag{1.6}$$

где Φ^{ij}, Θ^{ij} — алгебраические дополнения i-й строки и j-го столбца определителей Φ, Θ, имеет полный интеграл вида

$$V = \alpha_{n+1} + \int\limits^{t} p\,dt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits^{q^i} p_i\,dq^i \qquad (p = \partial V / \partial t,\ p_i = \partial V / \partial q^i) \tag{1.7}$$

где

$$p = -\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} c^{kl}(t)\,\alpha_k\alpha_l - \sum_{u=r+1}^{n} c^{uu}(t)\,\alpha_u - \sum_{k=1}^{r} c^{k}(t)\,\alpha_k + \psi(t) \tag{1.8}$$

$$p_i = \vartheta^{io}(q^i) + \sum_{k=1}^{r} \vartheta^{ik}(q^i)\,\alpha_k \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{1.9}$$

$$p_i = \vartheta^{io}(q^i) + \sum_{k=1}^{r} \vartheta^{ik}(q^i)\,\alpha_k +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sigma^{ikl}(q^i)\,\alpha_k\alpha_l + \sum_{k=1}^{r} \sigma^{ik}(q^i)\,\alpha_k + \psi^{i}(q^i) + \sum_{u=r+1}^{n} \varphi^{iu}(q^i)\,\alpha_u\right]^{1/2} \tag{1.10}$$

$$(i = r+1, \ldots, n)$$

Доказательство. Воспользуемся результатами В. Г. Имшенецкого [4] и покажем, что исключение произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из уравнений (1.8) — (1.10) приводит к уравнению вида (0.4) с коэффициентами, определяемыми формулами (1.1) — (1.6). В самом деле, уравнения (1.9) позволяют выразить α_j $(j = 1, \ldots, r)$ через p_i $(i = 1, \ldots, r)$ и элементы матрицы $\|\vartheta^{ij}\|^{-1}$, которая существует, так как по условию теоремы $\mathrm{Det}\,\|\vartheta^{ij}\| = \Theta \neq 0$. Но тогда уравнения (1.10), в которые подставлены выражения α_j $(j = 1, \ldots, r)$, позволяют найти α_u $(u = r+1, \ldots, n)$, так как по условию $\mathrm{Det}\,\|\varphi^{ij}\| = \Phi \neq 0$. Подстановка выражений для α_i $(i = 1, \ldots, n)$ в (1.8) даст уравнение вида (0.4), причем, как показывают достаточно длинные выкладки, неприводимые здесь, коэффициенты этого уравнения определяются при помощи формул (1.1) — (1.6). Остается только проверить, что $\mathrm{Det}\,\|\partial^2 V / \partial q^i\,\partial\alpha_j\| \neq 0$. Но этот определитель для уравнений (1.9), (1.10) равен $A\Theta\Phi$, где

$$A = 2^{-(n-r)} \prod_{u=r+1}^{n} \left(p_u - \vartheta^{uo} - \sum_{k=1}^{r} \vartheta^{uk}\alpha_k\right)^{-1} \neq 0$$

так как бесконечно большие значения p_u, α_k не рассматриваются, а функции ϑ^{uk} — непрерывные. Поэтому $\mathrm{Det}\,\|\partial^2 V / \partial q^i \partial\alpha_j\| \neq 0$, так как по условию $\Theta \neq 0$, $\Phi \neq 0$.

Уравнение (1.7) позволяет найти V простой квадратурой, потому что каждый импульс зависит только от одной, сопряженной ему координаты. Теорема доказана.

В силу этой теоремы установлен случай интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби с характеристической функцией, зависящей явно от времени. Этот случай в известной нам литературе не рассматривался. Поэтому сравнение с известными случаями может быть произведено только для $\partial H / \partial t = 0$.

Из анализа работ [5-7, 10, 11, 13] ясно, что представленные выше выражения для g^{ij}, U ($h^i = 0$) совпадают с теми, которые будут самыми общими для $n = 2, 3$, и совпадают с выражениями, найденными Штеккелем [7] ($r = 0$), Бургатти [13] ($r \neq 0$) и Н. Д. Моисеевым [14] для произвольного n. Для $h^i \neq 0$ выражения (1.1) — (1.6) включают в себя случай, найденный В. Г. Деминым [15] (здесь $r = 0$).

Одно кажущееся обобщение заключается в том, чтобы функции ϑ^{i0}, ϑ^{ij}, $- c^j$, ψ считать зависящими не от одной переменной, а от всех: t, $q^1, \ldots, q^n$, подчинив их только условиям интегрируемости

$$\partial p_i / \partial q^j = \partial p_j / \partial q^i, \qquad \partial p / \partial q^i = \partial p_i / \partial t$$

Однако этот случай заменой переменных приводится к уже рассмотренному (об этой подстановке см. п. 3).

То, что найденные выражения охватывают все известные случаи, не является случайностью.

2. *Теорема* 2.1. Для того чтобы уравнение (0.4), имеющее положительно определенную квадратичную форму $g^{ij}p_ip_j$ и непрерывные коэффициенты g^{ij}, h_i, U, интегрировалось методом разделения переменных, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты g^{ij}, h^i, U имели вид, указанный в теореме 1.1.

Доказательство. Будем также основываться на идеях В. Г. Имшенецкого. Известно [4], что в полном интеграле произвольные постоянные α рассматриваются не зависящими от t, $q^1, \ldots, q^n$ (в противном случае получается либо общий, либо особенный интеграл). Поэтому, если разрешить уравнение Гамильтона—Якоби (0.4) относительно каждой из производных p, p_i и считать, что V ищется в виде

$$V = V^0(t) + V^1(q^1) + \ldots + V^n(q^n)$$

то слева будет стоять функция только той переменной, по которой происходит дифференцирование V, справа — функция всех переменных. Но все эти переменные, кроме той, от которой зависит левая часть, в силу их независимости, можно положить равными начальным значениям. Но тогда, если $\mathrm{Det} \| \partial^2 V / \partial q^i \partial \alpha_j \| \neq 0$, то входящие в p, p_i произвольные постоянные можно выбрать так, что p, p_i обратятся в свои начальные значения p^0, p_i^0, причем совокупность начальных значений t_0, q_0^i, p^0, p_i^0 также должна удовлетворять уравнению (0.4). Так как $g^{ij}p_ip_j$ есть положительно определенная форма относительно p_i, то $g^{ii} \neq 0$, и для каждого p_i получается квадратное уравнение, из которого

$$p_i = \vartheta_1{}^i + \vartheta_0{}^i \pm \sqrt{\theta_2{}^i + \theta_1{}^i + \theta_0{}^i} \tag{2.1}$$

Кроме того,

$$p = \theta_2 + \theta_1 + \theta_0 \tag{2.2}$$

Все дальнейшие рассуждения проведем для того случая, когда перед радикалом в (2.1) стоит плюс. Для минуса результаты аналогичные.

В формулах (2.1), (2.2) нижние значки указывают на степень того однородного полинома относительно $p_i{}^0$, p^0, который обозначен данной буквой. Начальное значение p^0 определяется формулой

$$p^0 = -\frac{1}{2} g_0^{ij} p_i^0 p_j^0 - h_0^i p_i^0 + U_0 \tag{2.3}$$

где индексом 0 отмечено то, что в g^{ij}, h^i, U положено $t = t_0$, $q^i = q_0^i$.

Если подставить выражения (2.1), (2.2) в уравнение (0.4), то получится тождество относительно t, q^i, t_0, q_0^i, p_i^0, если только внести p^0 из формулы (2.3) в выражение $\theta_2^i + \theta_1^i + \theta_0^i$, которое в дальнейшем обозначим через $\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i$. Тогда тождество имеет вид

$$\theta_2 + \theta_1 + \theta_0 + \frac{1}{2} g^{ij} (\vartheta_1^i + \vartheta_0^i + \sqrt{\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i}) (\vartheta_1^j + \vartheta_0^j + \sqrt{\varphi_2^j + \varphi_1^j + \varphi_0^j}) +$$
$$+ h^i (\vartheta_1^i + \vartheta_0^i + \sqrt{\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i}) - U = 0 \tag{2.4}$$

и определяет тот вид коэффициентов g^{ij}, h^i, U, при котором переменные в V разделены. Анализ этого тождества существенно зависит от того, будут подкоренные выражения $\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i$ полными квадратами или нет. В общем случае можно предположить, что $\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i$ есть полный квадрат для $i = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\vartheta_1^i + \vartheta_0^i + \sqrt{\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i} = \chi_1^i + \chi_0^i \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{2.5}$$

После этого тождество (2.4) принимает вид

$$\theta_2 + \theta_1 + \theta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} g^{ij} (\chi_1^i + \chi_0^i)(\chi_1^j + \chi_0^j) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} g^{ij} (\chi_1^i + \chi_0^i)(\vartheta_1^j + \vartheta_0^j) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} g^{ij} (\chi_1^i + \chi_0^i) \sqrt{\varphi_2^j + \varphi_1^j + \varphi_0^j} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} g^{ij} (\vartheta_1^i + \vartheta_0^i)(\vartheta_1^j + \vartheta_0^j) + \frac{1}{2} \sum_{i=r+1}^{n} g^{ii} (\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i) +$$
$$+ \sum_{\substack{i,\, j=r+1 \\ i>j}}^{n} g^{ij} (\vartheta_1^i + \vartheta_0^i) \sqrt{\varphi_2^j + \varphi_1^j + \varphi_0^j} +$$
$$+ \sum_{\substack{i,j=r+1 \\ i>j}}^{n} g^{ij} \sqrt{\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i} \sqrt{\varphi_2^j + \varphi_1^j + \varphi_0^j} + \sum_{i=1}^{r} h^i (\chi_1^i + \chi_0^i) +$$
$$+ \sum_{i=r+1}^{n} h^i (\vartheta_1^i + \vartheta_0^i) + \sum_{i=r+1}^{n} h^i \sqrt{\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i} - U = 0 \tag{2.6}$$

В силу произвольности начальных значений импульсов из него непосредственно следует

$$g^{ij} = 0 \qquad (i \neq j, \ i, j = r + 1, \ldots, n) \tag{2.7}$$

а потому ϑ_1^i зависит только от $p_1^0, \ldots, p_r^0$ и не зависит от $p_{r+1}^0, \ldots, p_n^0$. С другой стороны, φ_2^i по этой же причине не содержит произведений $p_l^0 p_m^0$ ($l \neq m$; l, $m = r + 1, \ldots, n$). Следовательно, $\varphi_2^i + \varphi_1^i + \varphi_0^i$ равно $(-\vartheta_1^i + \chi_1^i - \vartheta_0^i + \chi_0^i)^2$ только тогда, когда χ_1^i также не зависит от $p_{r+1}^0, \ldots, p_n^0$. Введение обозначений

$$\chi_1^i = \sum_{j=1}^{r} \vartheta^{ij}(q^i) p_j^0, \qquad \chi_0^i = \vartheta^{i0}(q^i) \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{2.8}$$

$$\vartheta_1^i = \sum_{j=1}^{r} \vartheta^{ij}(q^i) p_j^0, \qquad \vartheta_0^i = \vartheta^{i0}(q^i) \qquad (i = r + 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

$$\varphi_2{}^i = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \sigma^{ikl}(q^i)\, p_k{}^0 p_l{}^0 + \sum_{k=1}^{r}\sum_{m=r+1}^{n} \sigma^{ikl}(q^i)\, p_k{}^0 p_m{}^0 + \tag{2.10}$$

$$+ \sum_{m=r+1}^{n} \varphi^{im}(q^i)\,(p_m{}^0)^2 \qquad (i = r+1, \ldots, n)$$

$$\varphi_1^i = \sum_{k=1}^{r} \sigma^{ik}(q^i)\, p_k{}^0 + \sum_{m=r+1}^{n} \sigma^{im}(q^i)\, p_m{}^0 \qquad (i = r+1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

$$\varphi_0{}^i = \psi^i(q^i) \qquad (i = r+1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

$$\theta_2 = -\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} c^{kl}(t)\, p_k{}^0 p_l{}^0 - \sum_{k=1}^{r}\sum_{m=r+1}^{n} c^{km}(t)\, p_k{}^0 p_m{}^0 - \sum_{m=r+1}^{n} c^{mm}(t)\,(p_m{}^0)^2 \tag{2.13}$$

$$\theta_1 = -\sum_{k=1}^{r} c^k(t)\, p_k{}^0 - \sum_{m=r+1}^{n} c^m(t)\, p_m{}^0, \qquad \theta_0 = \psi(t) \tag{2.14}$$

и приравнивание нулю коэффициентов при радикалах и при степенях начальных значений импульсов (в силу их произвольности) дает системы линейных уравнений для последовательного определения g^{ij}, h^i, U.

Для нахождения g^{ii} $(i = r+1, \ldots, n)$ достаточно приравнять нулю коэффициенты при $(p_i{}^0)^2$ $(i = r+1, \ldots, n)$, в силу их произвольности, в уравнении (2.6). Разрешая эти уравнения относительно g^{ii}, получим формулу типа (1.3). Если приравнять нулю коэффициенты при $p_i{}^0 p_j{}^0$ $(i = r+1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r)$, то получим уравнения для g^{ii} $(i = r+1, \ldots, n)$ только что описанного вида. Поэтому $c^{kl}(t)$, $\sigma^{ikl}(q^i)$ $(k = 1, \ldots, r;\ l = r+1, \ldots, n)$ должны быть линейными комбинациями с постоянными коэффициентами соответственно $c^{jj}(t)$, $\varphi^{ij}(q^i)$ $(i, j = r+1, \ldots, n)$. Коэффициенты g^{ij} $(i = 1, \ldots, r;\ j = r+1, \ldots, n)$ определяются из уравнений, выражающих равенство нулю коэффициентов при радикалах; при этом получаются выражения типа (1.2). Выражения типа (1.1) получаются из уравнений, вытекающих из равенства нулю коэффициентов при $p_k{}^0 p_l{}^0$ $(k, l = 1, \ldots, r)$ с подстановкой туда только что определенных коэффициентов g^{jj}, g^{ij} $(i = 1, \ldots, r;\ j = r+1, \ldots, n)$. Из равенства нулю коэффициентов при первых степенях $p_i{}^0$ $(i = r+1, \ldots, n)$ получаются выражения для h^i $(i = r+1, \ldots, n)$ типа (1.5); а из равенства нулю коэффициентов при первых степенях $p_i{}^0$ $(i = 1, \ldots, r)$ для h^i $(i = 1, \ldots, r)$ получаются выражения типа (1.4). Наконец, свободный от $p_i{}^0$ член дает выражение для силовой функции U типа (1.6).

Таким образом, для всех коэффициентов получаются выражения, отличающиеся от выражений (1.1) — (1.6) только тем, что их левые части не зависят от начальных значений t_0, $q_0{}^i$, а правые части — формально говоря — зависят. Придавая этим начальным значениям какие-либо числовые значения, придем к формулам (1.1) — (1.6).

Так как $\mathrm{Det}\, \| \partial^2 V / \partial q^i\, \partial \alpha_j \| = A\Phi\Theta$ (п. 1) не равен нулю, то $\Phi \neq 0$, $\Theta \neq 0$.

Теорема доказана.

Использованный при доказательстве этой теоремы способ нахождения полного интеграла приводит к тем же результатам, что и уравнения Леви-Чивита, при выводе которых также предполагается $\partial H / \partial p_i \neq 0$ [10]; однако наш способ значительно проще. Естественно, что он может быть применен как к уравнению Гамильтона самого общего вида, так и к уравнению или системе уравнений в частных производных любого порядка. Кроме того, этот способ не требует решения самих канонических уравнений, как это предлагается В. Г. Имшенецким [4].

Из теорем 1.1 и 2.1 следует, что случаи Бургатти ($\partial H / \partial t = 0$) будут самыми общими.

3. Выражения (1.1) — (1.6) даже для того общего случая, который упомянут в конце п. 1, можно существенно упростить введением новых независимых координат Q^i, времени T и главной функции W, частные производные которых по старым координатам и времени определяются формулами

$$\frac{\partial Q^i}{\partial t} = -c^i, \quad \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} = \vartheta^{ij}, \quad \frac{\partial Q^i}{\partial q^l} = 0, \quad \frac{\partial Q^k}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q^k}{\partial q^j} = 0, \quad \frac{\partial Q^k}{\partial q^l} = \delta_l^k$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P = p + \psi, \quad \frac{\partial W}{\partial q^j} = P_j = p_j - \vartheta^{j0}, \quad \frac{\partial W}{\partial q^l} = P_l = p_l - \vartheta^{l0}, \quad T = t$$

$$(\delta_l^k = 1 \text{ при } k = l, \ 0 \text{ при } k \neq l; \ i, j = 1, \ldots, r; \ k, l = r + 1, \ldots, n)$$

Нетрудно проверить, что условия интегрируемости здесь выполнены.

Но тогда соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби

$$P + {}^1/_2\, G^{ij} P_i P_j + H^i P_i - U^* = 0 \qquad (3.1)$$

имеет коэффициенты

$$G^{ij} = 2c^{ij}(T) - \frac{2}{\Phi} \sum_{k=r+1}^{n} \sum_{l=r+1}^{n} c^{ll}(T)\, \Phi^{kl} \sigma^{kij}(Q^k) \qquad (i, j = 1, \ldots, r)$$

$$G^{ii} = \frac{2}{\Phi} \sum_{k=r+1}^{n} c^{kk}(T)\, \Phi^{ik} \qquad (i = r + 1, \ldots, n)$$

$$G^{ij} = 0 \qquad (i \neq j, \ i = 1, \ldots, n; \ j = r + 1, \ldots, n)$$

$$H^i = -\frac{1}{\Phi} \sum_{k=r+1}^{n} \sum_{l=r+1}^{n} c^{ll}(T)\, \Phi^{kl} \sigma^{ki}(Q^k) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

$$H^i = 0 \qquad (i = r + 1, \ldots, n)$$

$$U^* = \frac{1}{\Phi} \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} c^{jj}(T)\, \Phi^{ij} \psi^i(Q^i)$$

Полный интеграл уравнения (3.1) дается формулами

$$W = \int_T P\,dT + \sum_{i=1}^{n} \int_{Q^i} P_i\,dQ^i, \quad P = -\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} c^{kl}(T)\, \alpha_k \alpha_l - \sum_{j=r+1}^{n} c^{jj}(T)\, \alpha_j$$

$$P_i = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, r) \qquad (3.2)$$

$$P_j = \left[\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sigma^{jkl}(Q^j)\, \alpha_k \alpha_l + \sum_{k=1}^{r} \sigma^{jk}(Q^j)\, \alpha_k + \psi^j(Q^j) + \sum_{m=r+1}^{n} \varphi^{jm}(Q^j)\, \alpha_m\right]^{1/2}$$

$$(j = r + 1, \ldots, n)$$

Следовательно, такая замена переменных существенно упрощает выражения (1.1) — (1.6). Формулы (3.2) показывают, что новые импульсы P_i $(i = 1, \ldots, r)$ сохраняют постоянные значения; следовательно, координаты Q^i $(i = 1, \ldots, r)$ будут циклическими.

Проведенное исследование показывает, насколько важно найти все такие виды зависимостей главной функции V от произвольных постоянных интегрирования α, при которых исключение этих постоянных из $p = \partial V / \partial t$ и $p_i = \partial V / \partial q^i$ даст уравнение вида (0.4). Полное решение этой важной проблемы, поставленной еще Бургатти [13], представляет в общем случае, по-видимому, огромные трудности и даже невозможно в классе аналитических функций [16].

4. Как обобщение результатов пп. 1, 2 рассмотрим следующее. Пусть V и p по-прежнему определяются формулами (1.7), (1.8), для p_i $(i = 1, \ldots, r)$ имеем формулы, описанные в конце п. 1, но α_i

($i = r + 1, \ldots, n$) равны сумме однородных полиномов второй, первой и нулевой степени относительно p_j ($j = 1, \ldots, n$), коэффициенты которых зависят от обобщенных координат и времени. Тогда зависимость p_j от α_i ($i = 1, \ldots, n$) будет, вообще говоря, иррациональной и даже трансцендентной, так как уже для $n = 2$ при получении такой зависимости необходимо решать алгебраические уравнения четвертой степени.

Кроме того, необходимо выполнение условий интегрируемости [10] $\partial p_i / \partial q^j = \partial p_j / \partial q^i$, которые приводятся к равенству нулю скобок Пуассона $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ ($i, j = 1, \ldots, n$). В последних уравнениях равны нулю все коэффициенты при степенях p_i, так как входящие в p_i постоянные интегрирования могут принимать произвольные значения. Это дает уравнения в частных производных относительно g_k^{ij}, h_k^i, U_k, если $\alpha_k = {}^1/_2\, g_k^{ij} p_i p_j + h_k^i p_i - U_k$ ($k = r + 1, \ldots, n$); эти уравнения уже при $n = 2$ ($g_k^{12} \neq 0$) получаются достаточно сложными, однако при $g_k^{12} = 0$ получаем известный случай Лиувилля—Штеккеля.

Возможность другого обобщения дает решение уравнения Гамильтона — Якоби для движения по инерции материальной точки во вращающейся системе координат

$$ {}^1/_2\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + n\,(yp_x - xp_y) = h $$

которое не интегрируется предложенными выше способами, хотя полный интеграл уравнения

$$ p + {}^1/_2\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + n\,(yp_x - xp_y) = 0 $$

находится методом, описанным в конце п. 1. Из него можно получить полный интеграл первого уравнения; зависимость V от α будет трансцендентной, очень сложной. Поэтому «обычная» замена $p = -h$ даже в случае $\partial H / \partial t = 0$ может существенно усложнить интегрирование уравнения (0.4).

Как показывают формулы п. 1, для интегрируемых уравнений типа (0.4) уравнения характеристик (канонические уравнения) имеют первые интегралы, квадратичные или линейные относительно импульсов. Это обстоятельство позволяет эффективно решать некоторые вопросы устойчивости для таких систем методом связок первых интегралов (т. е. методом Н. Г. Четаева). Метод связок можно применить и к системам, описанным в этом пункте.

5. Пусть опять дано уравнение Гамильтона — Якоби (0.4), но с заданными функциями g^{ij}, h^i, U от t, q^i. Требуется определить, интегрируется это уравнение методом разделения переменных или нет. Наиболее просто это сделать при помощи метода, который уже был использован нами при доказательстве теоремы 2.1, так как этот метод не требует проверки очень сложных выражений для g^{ij}, h^i, U, найденных в п. 1. Этот метод приводится к выполнению следующих операций:

а) Разрешение уравнения (0.4) относительно каждой частной производной p, p_i.

б) Каждую из координат q^i (и время), кроме той, которая входит в левую часть, делаем равной начальному значению, что делает входящие туда импульсы также равными постоянным начальным значениям. При этом начальные значения координат, времени и импульсов должны удовлетворять, естественно, уравнению (0.4).

в) Интегрируем полученные выражения по переменной, входящей в левую часть, и суммируем, составляя таким образом главную функцию V.

г) Подставляем частные производные p, p_i в (0.4) и проверяем, делается (0.4) тождеством $0=0$ или нет, если начальные значения удовлетворяют упомянутому в п. б) условию. В первом случае уравнение (0.4) интегрируется методом разделения переменных, во втором — нет.

Если уравнение (0.4) не интегрируется методом, указанным выше, то следует перейти ко второму этапу: проверить, не интегрируется ли это уравнение предложенным методом при замене переменных. Например, задача двух тел интегрируется таким методом в полярных координатах, но не интегрируется в прямоугольных. Встает общий вопрос: нельзя ли указать критерий, по которому можно было решить: существует ли такая замена переменных $(q, t, p) \to (q', t', p')$, причем в переменных q', t', p' данное уравнение интегрируется.

Проанализируем сначала случай $\partial H / \partial t = 0$, предполагая, что в уравнении (0.2) координаты q преобразуются только в координаты q' $(q \to q')$. В этом случае можно воспользоваться теоремой Леви-Чивита [10], гласящей, что если интегрируется уравнение (0.2), то интегрируется уравнение (0.2) при $U = 0$. Согласно результатам, полученным в тензорном анализе (см., например, [17]), при замене $q \to q'$ должно быть

$$R_{l'k'i'j'} = \frac{\partial q^l}{\partial q'^{l'}} \frac{\partial q^k}{\partial q'^{k'}} \frac{\partial q^i}{\partial q'^{i'}} \frac{\partial q^j}{\partial q'^{j'}} R_{lkij} \tag{5.1}$$

где R_{lkij} — тензор кривизны Римана, соответствующий метрике g^{ij}, а $R_{l'k'i'j'}$ — тензор кривизны Римана для метрики $g'^{i'j'}$. Уравнения (5.1) и решают поставленную задачу. В самом деле, в их левые части можно подставить выражения $g'^{i'j'}$ п. 3, а в правые части — выражения R_{lkij} в исходной системе координат, которые известны. Из уравнений (5.1), используя также формулы для преобразования g^{ij}, нужно исключить все производные $\partial q^i / \partial q'^{i'}$, которых n^2, а всех уравнений (5.1) по крайней мере n^3 (п. 5). Полученные уравнения для функций φ, σ с индексами можно решать обобщением метода «закрепления чужих переменных», о котором говорилось в п. 2. Подставляя найденные выражения для φ, σ в уравнения (5.1) и разрешая их относительно каждой из производных $\partial q^i / \partial q'^{i'}$, можно получить формулы преобразования $q \to q'$. Аналогичные результаты можно получить и в более общем случае (п. 3), когда существуют только квадратичные интегралы, находящиеся в инволюции, так как и здесь справедлива упомянутая теорема Леви-Чивита.

Для подстановок типа $(q, t) \to (q', t')$ обобщение уравнений (5.1) может быть сделано методами тензорного анализа. При более общих канонических подстановках $(q, t, p) \to (q', t', p')$ форма уравнений (0.4), вообще говоря, теряется и вывод обобщения уравнений (5.1) становится очень сложным. Здесь можно получить уравнения в частных производных относительно производящей функции преобразования S и характеристической функции H, используя уравнения Леви-Чивита (0.5) и общую теорию контактных преобразований [9, 16]. Уже при $n = 2$ уравнения содержат около десяти тысяч членов. Гораздо проще это сделать при помощи изложенных в начале этого пункта правил, применяя их к уравнению Гамильтона—Якоби самого общего вида. Вполне возможно, что некоторые упрощения здесь могут быть связаны с введением специального математического формализма. Хотя идея вывода обобщений уравнений (5.1) сравнительно проста, но громоздкие выкладки здесь не приводятся.

Нетрудно видеть, что только что описанным способом можно решить следующую важную проблему: нахождение всех типов характеристических функций H, для которых уравнение $p + H = 0$ интегрируется методом Гамильтона — Якоби вообще. В самом деле, после контактного преобразования $(q,\ t,\ p) \to (\alpha,\ \beta)$ уравнение $(p + H)_{\alpha,\ \beta} = 0$, которое выражено через α, β, должно иметь полный интеграл $V = \alpha_1\beta_1 + ,\ldots, + \alpha_n\beta_n$, т. е. в новых координатах и времени (либо α, либо β) переменные в V разделены. Так как соответствующим уравнениям (см. предыдущий абзац) удовлетворяет не каждая характеристическая функция H, то это означает, что метод Гамильтона — Якоби не может быть использован для интегрирования произвольного уравнения $p + H = 0$. Это обстоятельство уже отмечалось ранее [16], однако там не было дано способа для выделения всех интегрируемых уравнений.

Так как решение упомянутых уравнений для S и H исключительно сложно, то интересен следующий прием. Пусть $H = H_0 + H^{(1)}$, где уравнение с H_0 интегрируется[1] и вводит постоянные $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$. Переходим в $H^{(1)}$ к переменным $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$ и выделяем ту часть H_1, которая соответствует интегрируемому случаю. Этот процесс можно продолжать и дальше. Если $H = H_0 + H_1 + \ldots + H_N$, где N — конечно, то процесс обрывается на N-м шаге. Если N бесконечно, то возникают два вопроса. Первый: можно ли таким способом «исчерпать» всю функцию H. Второй: возможно ли применять метод Гамильтона — Якоби к таким бесконечным разбиениям. Может все же случиться, что или при разумных ограничениях на H или для ограниченного класса траекторий или для ограниченного интервала времени ответы будут положительными.

Следует все же подчеркнуть, что некоторые важные задачи интегрируются именно после общего преобразования $(q,\ t,\ p) \to (q',\ t',\ p')$; имеются в виду осредненные варианты задач небесной механики [18–20].

Теорема 5.1. Если интегрируется уравнение (0.4), то интегрируется сопряженное уравнение

$$\frac{\partial V'}{\partial t} - H\left(p,\ \frac{\partial V'}{\partial q}\ ,\ t\right) = 0$$

Доказательство. В самом деле, если разрешить $p_i = p_i(q^i) = \partial V / \partial q^i$ относительно q^i, получим $q^i = q^i(p_i) = \partial V' / \partial p_i$, т. е. в V' переменные разделены.

Форма уравнения (0.4) позволяет написать канонические уравнения, в которых независимой переменной может быть любая из координат q^i. Для этого достаточно

[1] См. первое примечание на стр. 973.

уравнение (0.4) представить в виде $p_i + H_i = 0$, где H_i не содержит p_i. Независимой переменной в канонической системе может быть даже переменная q^{n+1}, которая в левую часть уравнения (0.4) не входит. Для этого достаточно прибавить к левой части уравнения (0.4), или его следствия, частную производную $p_{n+1} = \partial V / \partial q^{n+1}$, считая V зависящей также и от q^{n+1}.

6. Методы, развитые в предыдущем пункте, можно применить к уравнению (0.1).

Теорема 6.1. Если в уравнении (0.1) перейти от декартовых прямоугольных координат x^i к криволинейным q^i (т. е. сделать подстановку типа $q \to q'$), то наиболее общими криволинейными координатами q^i, в которых уравнение (0.1) интегрируется методом разделения переменных, будут эллипсоидальные и их вырождения (сферические, цилиндрические).

Теорема 6.1 фактически устанавливает, что подстановка Якоби [3] будет не только достаточным, но и необходимым условием интегрируемости уравнения (0.1).

Доказательство. Для $n = 3$ эта теорема уже была доказана в работе [12]. Для произвольного n ее можно доказать методом математической индукции для наиболее интересного случая $r = 0$. Так как $\partial H / \partial t = 0$, то имеет место просто случай Штеккеля. Сделаем еще одно предположение: функции $\varphi^{ij}(q^i)$ — линейно независимые. Так как для метрического тензора, соответствующего уравнению (0.1), все составляющие тензора кривизны Римана равны нулю, то нужно решать уравнения $R_{lkij} = 0$ и определять отсюда вид функций φ^{ij} и форму подстановки $q \to q'$. Для ортогональных координат не равны нулю и независимы между собой только следующие составляющие

$$R_{ikij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial q^k \partial q^j} + \frac{1}{4} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} + \frac{1}{4} g^{jj} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{jj}}{\partial q^k} +$$

$$+ \frac{1}{4} g^{kk} \frac{\partial g_{kk}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} \qquad (i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i;\ i, j, k = 1, \ldots, n;\ g^{ii} = 1 : g_{ii}) \tag{6.1}$$

$$R_{ijij} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial q^j \partial q^j} - \frac{\partial^2 g_{jj}}{\partial q^i \partial q^i}\right) + \frac{1}{4} g^{ii}\left[\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^j}\right)^2 + \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^i}\frac{\partial g_{jj}}{\partial q^i}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} g^{jj}\left[\left(\frac{\partial g_{jj}}{\partial q^i}\right)^2 + \frac{\partial g_{jj}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^j}\right] - \frac{1}{4}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,\, j}}^{n} g^{kk} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k}\frac{\partial g_{jj}}{\partial q^k} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n) \tag{6.2}$$

Эти выражения настолько сложны, что даже подстановка сюда g^{ii} для эллипсоидальных координат $q^1, \ldots, q^n$ дает нуль только после довольно длинных выкладок, которые приводятся вкратце. Для эллипсоидальных координат

$$g^{ii} = \frac{4f(q^i)}{(q^i - q^1)\ldots(q^i - q^n)}, \qquad f(q^i) = (q^i - a_1^2)\ldots(q^i - a_n^2) \tag{6.3}$$

Здесь в знаменателе, конечно, пропущено $q^i - q^i$. Далее

$$\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial q^k \partial q^j} = \frac{g_{ii}}{(q^i - q^k)(q^i - q^j)}, \qquad g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} = \frac{g_{ii}}{(q^i - q^j)(q^i - q^k)}$$

$$g^{jj}\frac{\partial q_{ii}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{jj}}{\partial q^k} = \frac{g_{ii}}{(q^i - q^j)(q^j - q^k)}, \qquad g^{kk}\frac{\partial g_{kk}}{\partial q^j}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} = \frac{-g_{ii}}{(q^j - q^k)(q^i - q^k)}$$

Таким образом, все составляющие $R_{ikij} = 0$. Затем

$$\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial q^j \partial q^j} = \frac{\partial^2 g_{jj}}{\partial q^i \partial q^i} = 0$$

Докажем тождество

$$g^{11} + \ldots + g^{nn} = -4\,(a_1^2 + \ldots + a_n^2) + 4\,(q^1 + \ldots + q^n) \tag{6.4}$$

Действительно, если воспользоваться формулой (6.3) и привести в сумме (6.4) все дроби к общему знаменателю

$$\prod_{k>l}^{n} (q^k - q^l)$$

то числитель дроби будет равен

$$4 \sum_{m=0}^{n} \sum_{u=1}^{n} b_m (q^u)^m \prod_{\substack{k>l \\ k,l \neq u}}^{n} (q^k - q^l) = 4 \sum_{m=0}^{n} b_m \begin{vmatrix} (q^1)^m & (q^1)^{n-2} \ldots q^1 & 1 \\ (q^2)^m & (q^2)^{n-2} \ldots q^2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (q^n)^m & (q^n)^{n-2} \ldots q^n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\, b_n \prod_{k>l}^{n} (q^k - q^l)(q^1 + \ldots + q^n) + 4\, b_{n-1} \prod_{k>l}^{n} (q^k - q^l)$$

где положено $f(q^i) = b_n (q^i)^n + b_{n-1} (q^i)^{n-1} + \ldots + b_1 q^i + b_0$. Отсюда следует формула (6.4). Обозначим последнюю сумму в (6.2) через S_{ij}. Так как

$$\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} = \frac{g_{ii}}{q^k - q^i}, \qquad \frac{\partial g_{jj}}{\partial q^k} = \frac{g_{jj}}{q^k - q^j}, \qquad \frac{\partial^2 g^{kk}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{g^{kk}}{(q^k - q^i)(q^k - q^j)}$$

то

$$S_{ij} = -\frac{1}{4} g_{ii} g_{jj} \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} g^{kk}$$

В силу (6.4)

$$S_{ij} = \frac{g_{ii} g_{jj}}{4} \frac{\partial^2 (g^{ii} + g^{jj})}{\partial q^i \partial q^j} = -\frac{g_{ii} + g_{jj}}{4\,(q^i - q^j)^2} + \frac{g^{ii} g_{jj}}{4\,(q^j - q^i)} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^i} + \frac{g_{ii} g^{jj}}{4\,(q^i - q^j)} \frac{\partial g_{jj}}{\partial q^j}$$

Но сумма двух квадратных скобок в (6.2) равна — S_{ij}. Поэтому $R_{ijij} = 0$.

Обратное рассуждение проводится так. Пусть функции в последней строке определителя Ф расположены так, чтобы в некоторой области изменения q^n

$$(\ln \varphi^{nk})' > (\ln \varphi^{nk+1})' \qquad (k = 2, \ldots, n-1)$$

Это всегда возможно, так как между функциями φ^{ni} нет линейной зависимости. Но тогда в более узкой области изменения q^n либо $(\ln \varphi^{n1})'$ больше $(\ln \varphi^{nn})'$ (случай I), либо меньше (случай II). Если перейти к новой независимой переменной $dq^{*n} = dq^n : \varphi^{nn}$ в случае I или $dq^{*n} = dq^n : \varphi^{n2}$ в случае II, то в n-й строке будут стоять функции $\varphi^{*nk}(q^n) = \varphi^{nk} : \varphi^{nn}$ $(\varphi^{*nn} = 1)$ или $\varphi^{*nk}(q^n) = \varphi^{nk} : \varphi^{n2}$ $(\varphi^{*n2} = 1)$. Теперь можно подставить определитель Ф с преобразованной n-й строкой в $R_{ikij} = 0$ и привести полученное слева выражение к общему знаменателю. Если $i, j, k \neq n$, то при таком выборе функций φ^{*ni} ни одно из произведений шести функций φ^{*ni} не будет равняться постоянному числу. Ввиду произвольности q^n член, не зависящий от φ^{*ni}, должен равняться нулю. Этот член равен левой части уравнения $R_{ikij}^{(n-1)} = 0$, если Ф имеет $n - 1$ строку и столбец. Но для случая $n - 1$ независимой переменной теорема по предположению верна. Точно такое рассуждение можно провести еще раз, если в последнюю строку определителя Ф поставить функции другой переменной q, перенумеровав переменные. Итак, после соответствующей замены переменных

$$\Phi = \begin{vmatrix} (\varphi^1)^{n-2} \varphi^{*1} & \ldots & \varphi^1 \varphi^{*1} & \varphi^{*1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi^n)^{n-2} \varphi^{*n} & \ldots & \varphi^n \varphi^{*n} & \varphi^{*n} & 1 \end{vmatrix}$$

Пусть $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Коэффициент при) $(\Phi_{n-2,n-1,n})^6$, где $\Phi_{n-2,n-1,n}$ есть алгебраическое дополнение Φ для минора

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} \varphi^1\varphi^{*1} & \varphi^{*1} & 1 \\ \varphi^2\varphi^{*2} & \varphi^{*2} & 1 \\ \varphi^3\varphi^{*3} & \varphi^{*3} & 1 \end{vmatrix}$$

в уравнении $R_{ikij} = 0$ равен нулю. Для определителя Φ^* и его дополнений получается уравнение, уже рассмотренное в работе [12]. Поэтому

$$\Phi = \mathrm{Det} \, \| (\varphi^i)^{n-1}, \ldots, \varphi^i, \quad 1 \, \| = \prod_{k>l}^{n} (\varphi^k - \varphi^l)$$

если φ^i и φ^{*i} линейно независимы. Отсюда после соответствующей замены переменных

$$g^{ii} = \prod_{k \neq i}^{n} (\varphi^i - \varphi^k) \tag{6.5}$$

Дифференциальное уравнение для функций φ^i получим, если подставить g^{ii} из (6.5) в $R_{ijij} = 0$; отсюда для φ^k $(k \neq i, j)$

$$(d\varphi^k / dq^k)^2 = a_0^{(k)} (\varphi^k - a_1^{(k)}) \ldots (\varphi^k - a_n^{(k)}) \qquad (a_i^{(j)} = \mathrm{const})$$

Рассуждения, аналогичные в работе [12], дают $a_i^{(k)} = a_i$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, а пределы изменения функций

$$\varphi^1 \geqslant a_1 \geqslant \varphi^2 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant \varphi^n \geqslant a_n.$$

Таким образом, при соответствующем выборе a_i, $a_0^{(k)}$, q^i

$$g_{ii} = \frac{1}{4} \prod_{k \neq i}^{n} [\wp(q^k) - \wp(q^i)] \tag{6.6}$$

если же взять $\varphi^i = q^i$, то получим (6.3). Следовательно, q^i будут эллипсоидальными координатами в пространстве x^k.

Если $r > 0$, и если между функциями φ^{ij} (для $i = r + 1, \ldots, s$) существует линейная зависимость, то Q^i $(i = 1, \ldots, r)$ (п. 3) должны быть либо углами, выражающими круговую осевую симметрию координатной системы, либо одной из декартовых координат (сравните цилиндрические координаты), а Q^i $(i = r + 1, \ldots, s)$ будут вырожденными эллипсоидальными координатами (параболическими, сферическими и т. д.). Однако соответствующее доказательство, проводимое методами математической индукции в сочетании с методом «разветвления» подслучаев при возрастании n, очень громоздко. При $r = n$, как показал еще Леви-Чивита [10], координаты Q^i могут быть только декартовыми прямоугольными. Теорема доказана.

Случай интегрируемости Лиувилля при $n > 2$ для уравнения (0.1) может иметь место, как это следует из уравнений $R_{lkij} = 0$, только для тривиального случая: для декартовых прямоугольных координат.

Итак, эллипсоидальные координаты будут самыми общими, в которых интегрируется уравнение (0.1). Но если это так, то можно найти и общие выражения для h^i, U п. 3. Так как ни силовая функция задачи n тел $(n > 2, h^i = 0)$, ни выражения для h^i, U для ограниченной круговой и эллиптической задачи трех тел этим выражениям не удовлетворяют, то названные задачи не могут быть проинтегрированы методом разделения переменных в координатах. Впрочем, это еще не означает, что полученные результаты вообще нельзя использовать в указанных проблемах. Например, можно искать решение методом «разбиения» функции H (п. 5). Полученные результаты имеют практическое значение [19, 20], если в качестве H_1 взять характеристическую функцию дважды осредненной ограниченной задачи трех тел. Наконец, можно искать общие частные решения указанных и интегрируемых задач.

Пока еще не исследован вопрос о том, при каких типах общих контактных преобразований $(p, q) \to (p', q')$ уравнение (0.1) будет интегрироваться в переменных p', q' (см. п. 5).

Естественно также поставить задачу о нахождении наиболее общих координат, при которых канонические уравнения с характеристической функцией (0.1) имеют находящиеся в инволюции квадратичные относительно p_i интегралы (п. 3). Если $n = 2$ и координаты ортогональны, то они будут эллиптическими (п. 3). Но для $n > 2$ и для неортогональных координат в случае $n \geqslant 2$ вопрос остается открытым.

В заключение за ценные советы приношу глубокую благодарность Г. Н. Дубошину, В. В. Румянцеву, П. К. Рашевскому, И. С. Аржаных, А. А. Богоявленскому, В. Г. Демину.

Поступила 25 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. В сб. Искусств. спутники Земли, 1961, вып. 8, 64—71.
2. Кислик М. Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. В сб. Искусств. спутники Земли, 1960, вып. 4,3—17.
3. Якоби К. Лекции по динамике. ОНТИ, 1936.
4. Имшенецкий В. Г. Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков. Изд. Моск. матем. об-ва, 1916.
5. Morera G. Separaz. d. variabili nelle equaz. del moto d'un punto su una superf. Atti della R. Acc. di Torino, 1880, t. 16, 276—295.
6. Stäckel P. Integrat. d. Hamilton — Jacobischen Diff.— Gleichungen mittelst Separat. der Var. Habilitationschrift, Halle, 1891.
7. Stäckel P. Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit. Math. Ann., 1893, t. 42, 537—563.
8. Charlier C. L. Die Mechamik des Himmels. Leipzig, 1907.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
10. Levi-Civita T. Integraz. della equaz. di Hamilton — Jacobi per separaz. di variabili. Math. Ann., 1904, t. 59, 383—397.
11. Dall'Acqua F. Sulle integrazione dell'equazione di Hamilton — Jacobi per separazione di variabili. Math. Ann., 1908, t. 66, 398—415.
12. Яров-Яровой М. С. Об интегрировании уравнений движения материальной точки методом разделения переменных. Сб. докл. на конф. в Казанск. авиац. ин-те, посвященной памяти Н. Г. Четаева. Изд. АН СССР, 1963.
13. Burgatti P. Determinazione dell'equazioni di Hamilton — Jacobi i tegrabili mediante la separazione delle variabili. Roma, Lincei, Rend., 1911, t. 20, 108—111; (см. также Memoire scelte. Bologna, 1951, 119—124).
14. Мультон. Введение в небесную механику. Пер. под ред. Г. Н. Дубошина. Добавление I. ОНТИ, 1935.
15. Демин В. Г. Об одном частном случае интегрируемости уравнения Гамильтона-Якоби. Вестник МГУ, сер. физ., астрон., 1960, № 1, 80—82.
16. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. ИЛ, 1959.
17. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Гостехтеоретиздат, 1953.
18. Моисеев Н. Д. О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. Тр. ГАИШ, 1945, т. 15, вып. I, 75—117.
19. Яров-Яровой М. С. Интерполяционно-аналитическая теория движения Цереры. Тр. ГАИШ, 1960, т. 28, 25—90.
20. Лидов М. Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. В сб. Пробл. движения искусств. небесных тел. Изд. АН СССР, 1963, 119—134.