О СХОДИМОСТИ МЕТОДА БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА

В. А. Медведев (Москва)

Изучается сходимость метода Бубнова — Галеркина для линейных уравнений в гильбертовых пространствах. Для уравнений с вполне непрерывным оператором приводится новое доказательство сходимости метода, позволяющее обобщить известные результаты.

Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задан линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор L с плотными в H областью определения и областью значений, и требуется решить уравнение

$$Lx = f, \qquad f \in H$$

Метод Бубнова — Галеркина состоит в следующем. Пусть R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — проекционно полная [1] в H последовательность конечномерных подпространств из области определения оператора L, а P_n — операторы ортогонального проектирования на эти подпространства. Ищется приближенное решение $x_n \in R_n$ из условия

$$P_n L x_n = P_n f$$

Обозначим

$$\tau_n = \min \frac{|P_n L x_n|}{|L x_n|}, \qquad x_n \in R_n$$

В работе [1] доказано, что если последовательности подпространств R_n и $L_n = LR_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ проекционно полны в H, то для сильной сходимости Lx_n к f при $n \to \infty$ при любом $f \in H$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $\tau > 0$, где $\tau = \inf \lim \tau_n$ при $n \to \infty$. Как и в работе [1], оператор L будем называть правильным, если всякие две проекционно полные последовательности R_n и $L_n = LR_n$ удовлетворяют условию $\tau > 0$. (Заметим, что в случае ограниченного оператора L проекционная полнота последовательности L_n следует из проекционной полноты последовательности R_n).

Теорема 1. Пусть линейный ограниченный оператор L имеет обратный оператор L^{-1}. Если существует положительное число δ такое, что для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $x_n \in H$ при условии $|x_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ выполняется неравенство $\delta \leqslant \inf \lim |(Lx_n, x_n)|$ при $n \to \infty$, то оператор L — правильный.

Здесь и в дальнейшем будем считать, что ограниченные линейные операторы определены во всем H.

Доказательство. Предположим, что оператор L не есть правильный. Тогда существует такая проекционно полная последовательность подпространств R_n и последовательность $x_n \in R_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|P_n L x_n|}{|L x_n|} = 0, \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|P_n L x_n|}{|x_n|} = 0 \tag{1}$$

так как $|Lx_n| \leqslant \|L\| |x|$. Можем, очевидно, считать, что $|x_n| = 1$. Пусть z — произвольный элемент из H. Имеем

$$|(x_n, L^*z)| = |(Lx_n, z)| \leqslant |(Lx_n, P_n z)| + |(Lx_n, z - P_n z)| \leqslant$$
$$\leqslant |P_n L x_n| |z| + |(Lx_n, z - P_n z)|$$

При $n \to \infty$ из равенства (1) следует $\lim |P_n L x_n| = 0$, а из ограниченности последовательности $\{Lx_n\}$ и проекционной полноты последовательности $\{R_n\}$ вытекает $\lim |(Lx_n, z - P_n z)| = 0$.

Таким образом, $\lim (x_n, L^*z) = 0$. Область значений оператора L^* плотна в H, так как в противном случае существовал бы отличный от нуля $x \in H$, ортогональный всем элементам вида L^*z, откуда следовало бы равенство $Lx = 0$, противоречащее существованию оператора L^{-1}. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к нулю. Далее

$$|(Lx_n, x_n)| \leqslant |P_n L x_n|$$

Из равенства (1) следует, что $\lim |(Lx_n, x_n)| = 0$ при $n \to \infty$, а это противоречит условиям теоремы. Теорема доказана.

Попутно доказана ограниченность оператора L^{-1}. В самом деле, если бы оператор L^{-1} был неограниченным, то существовала бы последовательность $x_n \in H$ ($n = 1, 2, \ldots$), для которой выполнялось бы равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|Lx_n|}{|x_n|} = 0$$

Повторяя с небольшими изменениями рассуждения после равенства (1), снова пришли бы к противоречию.

Теорема 2. Пусть линейный ограниченный оператор L имеет вид $L = L_0 + T$, где L_0 — правильный, а T — вполне непрерывный оператор. Если нуль не принадлежит спектру оператора L, то оператор L — правильный.

Доказательство. Допустим, что теорема не верна. Тогда, повторяя доказательство теоремы 1, получим, что существует проекционно полная последовательность подпространств $\{R_n\}$ и такая слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in R_n$, $|x_n| = 1$, что выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} |P_n L x_n| = 0 \tag{2}$$

Из существования и ограниченности оператора L^{-1} следует

$$|Lx_n| \geqslant \frac{1}{\|L^{-1}\|} \tag{3}$$

По неравенству треугольника имеем

$$|P_n L_0 x_n| \leqslant |P_n L x_n| + |P_n T x_n|, \qquad |L_0 x_n| \geqslant |Lx_n| - |Tx_n| \tag{4}$$

В силу известных свойств вполне непрерывных операторов

$$\lim_{n\to\infty} |Tx_n| = 0 \tag{5}$$

Используя неравенства (3), (4) и равенства (2), (5), получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|P_n L_0 x_n|}{|L_0 x_n|} = 0$$

Пришли к противоречию, так как оператор L_0, по условию, правильный. Теорема доказана. В частных случаях, когда оператор L_0 — единичный или положительно определенный, эта теорема известна. Н. И. Польский высказал предположение [1], что верна

Теорема 3. Пусть L_0 — линейный ограниченный оператор, для которого выполняется неравенство $\inf |(L_0 x, x)| > 0$, $x \in H$, $|x| = 1$, а T — вполне непрерывный линейный оператор. Если нуль не принадлежит спектру оператора $L = L_0 + T$, то оператор L — правильный.

Теорема 3 прямо следует из теоремы 2, так как L_0 — правильный оператор [1]. Она легко получается также из теоремы 1.

Рассмотрим теперь задачу о собственных значениях. Пусть

$$L = A + \lambda B$$

где A и B — линейные ограниченные операторы, λ — число из некоторой области D комплексной плоскости. В дальнейшем будем говорить, что λ есть регулярная точка оператора L, если существует ограниченный оператор L^{-1}, определенный во всем пространстве H, и принадлежит спектру оператора L в противном случае. Значение λ, при котором уравнение $Lx = 0$ имеет нетривиальное решение, будем называть собственным значением оператора L, а это нетривиальное решение собственным вектором оператора L, принадлежащим собственному значению λ. То же относится к оператору $P_n L$, который будем рассматривать только на элементах подпространства R_n.

Теорема 4. Пусть некоторое замкнутое ограниченное множество $D_0 \subset D$ не содержит точек спектра оператора L. Если оператор L — правильный при любом $\lambda \in D_0$, то, начиная с некоторого номера n, D_0 не содержит точек спектра оператора $P_n L$.

Доказательство. Обозначим

$$\mu_n(\lambda) = \min \frac{|P_n L x_n|}{|x_n|}, \qquad x_n \in R_n$$

Очевидно, $\mu_n(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда λ есть собственное значение оператора P_nL, и, если $\mu_n(\lambda) \neq 0$, то λ есть регулярная точка оператора P_nL и

$$\|(P_nL)^{-1}\| = \frac{1}{\mu_n(\lambda)} \tag{6}$$

Из неравенства $|x_n| \leqslant \|L^{-1}\| \, |Lx_n|$ получаем

$$\frac{|P_nLx_n|}{|x_n|} \geqslant \frac{|P_nLx_n|}{\|L^{-1}\| \, |Lx_n|} \geqslant \frac{\tau_n}{\|L^{-1}\|}$$

и, следовательно,

$$\mu_n(\lambda) \geqslant \frac{\tau_n(\lambda)}{\|L^{-1}\|} \tag{7}$$

Так как оператор L — правильный при $\lambda \in D_0$, то из неравенства (7) следует

$$0 < \mu(\lambda) = \inf \lim \mu_n(\lambda) \quad \text{при } n \to \infty \tag{8}$$

Для любых точек $\lambda \in D$ и $\lambda' \in D$ имеем

$$\left| \frac{|P_nL(\lambda')x_n|}{|x_n|} - \frac{|P_nL(\lambda)x_n|}{|x_n|} \right| \leqslant \frac{|P_nL(\lambda')x_n - P_nL(\lambda)x_n|}{|x_n|} \leqslant \|B\| \, |\lambda' - \lambda|$$

Откуда получаем

$$|\mu_n(\lambda') - \mu_n(\lambda)| \leqslant \|B\| \, |\lambda' - \lambda| \tag{9}$$

В силу неравенств (8) и (9) для произвольной точки $\lambda \in D_0$ существует такая окрестность, что, начиная с некоторого номера n, для всех точек λ' этой окрестности выполняется неравенство $\mu_n(\lambda') \geqslant {}^1/_2\,\mu(\lambda) > 0$. Отсюда по известной лемме о выделении конечного покрытия следует существование положительного числа δ такого, что, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство $\mu_n(\lambda) \geqslant \delta > 0$ для всех $\lambda \in D_0$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\lambda_0 \in D$ есть собственное значение оператора L такое, что существует окрестность точки λ_0, не содержащая других точек спектра оператора L, причем оператор L правильный для всех точек $\lambda \neq \lambda_0$ этой окрестности. Тогда существует последовательность $\{\lambda_n\}$ собственных значений операторов P_nL, сходящаяся к λ_0.

Доказательство. Возьмем окружность C с центром в точке λ_0, целиком лежащую в окрестности, удовлетворяющей условиям теоремы. Так как окружность есть замкнутое ограниченное множество, то, как следует из доказательства теоремы 4, существует положительное число δ такое, что $\mu_n(\lambda) \geqslant \delta$ $(\lambda \in C)$, начиная с некоторого n. Пусть x — один из собственных векторов оператора L, принадлежащих собственному значению λ_0. Очевидно, что

$$\lim \frac{|P_nLP_nx|}{|P_nx|} = \frac{|Lx|}{|x|} = 0 \text{ при } n \to \infty$$

и, следовательно, $\lim \mu_n(\lambda_0) = 0$. Поэтому, начиная с некоторого номера n, будут одновременно выполняться неравенства

$$\mu_n(\lambda) \geqslant \delta \quad \text{при } \lambda \in C, \qquad \mu_n(\lambda_0) < \delta$$

и, значит, функция $\mu_n(\lambda)$ имеет минимум в некоторой точке λ_n, $|\lambda_n - \lambda_0| < \rho$, где ρ — радиус окружности C. Докажем, что $\mu_n(\lambda_n) = 0$. Допустим, что это не так. Тогда все точки круга $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \rho$ будут регулярными для оператора P_nL, и, следовательно, оператор $(P_nL)^{-1}$ будет голоморфной функцией от λ в круге $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \rho$. Но тогда норма оператора $(P_nL)^{-1}$ не может иметь максимум внутри круга $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \rho$. (Этот факт следует из теоремы о среднем в точности так же, как принцип максимума модуля в теории аналитических функций [2].) Отсюда и из равенства (6) следует, что функция $\mu_n(\lambda)$ не может иметь в круге $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \rho$ минимум, отличный от нуля. Следовательно, $\mu_n(\lambda_n) = 0$. В силу теоремы 4 имеем при $n \to \infty$ $\lim \lambda_n = \lambda_0$.

Замечание 1. Теоремы 4 и 5 остаются справедливыми, если оператор L есть голоморфная функция от λ; доказательство почти не отличается от приведенного.

Замечание 2. Были рассмотрены только ограниченные операторы. Доказанные теоремы можно применить для исследования сходимости метода Бубнова — Галеркина и в случае неограниченного оператора, если можно так ввести новое пространство H_0, что уравнения метода Бубнова — Галеркина в H совпадают с уравнениями метода Бубнова — Галеркина в H_0 для уравнения, эквивалентного исходному, но уже с ограниченным в H_0 оператором, удовлетворяющим условиям теорем. Ведение нового пространства осуществлено в работе [3] для некоторых дифференциальных операторов.

Замечание 3. В работе [1] рассмотрен проекционный метод более общий, чем метод Бубнова — Галеркина. В этом методе выбираются две проекционно полные последовательности подпространств $\{R_n\}$ и $\{M_n\}$ соответственно в H_1 и H_2, где H_1 — гильбертово пространство, в котором лежит область определения данного оператора, а H_2 — гильбертово пространство, в котором лежит область значений этого оператора. Теорема 2 останется верной и в этом случае, если изменить формулировку так:

Пусть линейный ограниченный оператор L, имеющий обратный ограниченный оператор L^{-1}, имеет вид $L = L_0 + T$, где T — вполне непрерывный, а L_0 — оператор, для которого последовательности $\{R_n\}$ и $\{M_n\}$ удовлетворяют условию (А). Тогда последовательности $\{R_n\}$ и $\{M_n\}$ удовлетворяют условию (А) и для оператора L.

Останутся верными также теоремы 4 и 5, если их формулировки изменить соответствующим образом. Изменения, которые надо сделать в доказательствах, очевидны.

Поступила 20 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л ь с к и й Н. И. Проекционные методы в прикладной математике. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 4.
2. Л а в р е н т ь е в М. А. и Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
3. М и х л и н С. Г. О сходимости метода Галеркина. Докл. АН СССР, 1948, т. 61, № 2.

Замечание к работе Пальмова В. А. «Контактная задача о пластинке, лежащей на упругом слое». (ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3. стр. 416—422)

1. Формула для величины $K(x, t)$, входящей в ядро интегрального уравнения (стр. 421), приведена неправильно. Правильный вид следующий:

$$K(x, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} x^2 t^2 + H(x-t) + H(x+t) - 2[H(x) + H(t)]$$

$$H(x) = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\right)$$

Автор, по-видимому, ошибочно положил (формула (4.3))

$$\int_0^\infty J_1(\lambda)\cos\lambda t d\lambda = \sqrt{1-t^2} \qquad \text{вместо} \qquad \int_0^\infty J_1(\lambda)\cos\lambda t d\lambda = 1$$

2. Кроме того, в разложении функции Макдональда $K_0(\beta)$ при $\beta \sim 0$ слагаемое $C = 0.5772\ldots$ (постоянная Эйлера) ошибочно берется со знаком плюс, а не минус.

В связи с этим выражения (4.7) и (4.8) должны быть

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{\beta\to 0} \Pi = x(\ln 2 - 1) + \ldots, \qquad I = \frac{x^2}{2}(\ln 2 - 1) + \ldots$$

Вследствие того, что выражение для ядра уравнения (3.8) получено неверно, таблица значений $\omega(x)$, вычисленных по формуле (5.3), требует пересчета.

Лаборатория механики грунтов НИИ оснований. *О. Д. Шилова*

Замечания О. Д Шиловой правильны. Ошибки объясняются тем, что без надлежащей проверки были использованы формулы. приведенные в книге Р. О. Кузьмина, Бесселевы функции, 1935 (стр. 47, формула 6, и стр. 152, формула 39). Эти формулы даны там с ошибками. Приношу О. Д. Шиловой благодарность за присланные замечания.

В. А. Пальмов