АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С МАЛЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. И. Рожков (Москва)

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$x^{\cdot}(t) = f(t, x(t), x(t-\Delta t), x^{\cdot}(t-\Delta t)) \qquad (1)$$

где $\Delta t > 0$ — малое постоянное запаздывание, и предположим, что существует решение вырожденного уравнения

$$\chi^{\cdot}(t) = f(t, \chi(t), \chi(t), \chi^{\cdot}(t)), \qquad \chi(0) = x^{\circ} \qquad (2)$$

периодическое, с периодом T. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $f = f(t, x, y, u)$ имеет в некоторой окрестности вырожденного решения (2) непрерывные вторые производные и удовлетворяет в этой окрестности условию

$$|f_u| < a < 1 \qquad (3)$$

Пусть далее вырожденное решение асимптотически устойчиво по первому приближению, т. е.

$$f_{(x)} + f_{(y)} < -\beta, \qquad \beta > 0 \qquad (4)$$

где скобка у индексов означает, что производные берутся вдоль вырожденного решения.

Тогда при достаточно малом Δt существует, и притом единственное, периодическое решение уравнения (1) с периодом T.

Для этого решения будет построена асимптотика по степеням малого запаздывания Δt.

Доказательство. Построим последовательно функции $x_n(t)$, определив их как решение уравнений

$$x^{\cdot}_{n+1}(t) = f(t, x_{n+1}(t), x_{n+1}(t-\Delta t)), x^{\cdot}_{n+1}(t-\Delta t)) \qquad (0 < t < T) \qquad (5)$$
$$x_{n+1}(t) = x_n(T + t) \quad \text{при} -\Delta t \leqslant t \leqslant 0$$
$$x_0(t) = \chi(t) \quad \text{при} -\Delta t \leqslant t \leqslant 0$$

Как следует из результатов работы А. Б. Васильевой [1], решение уравнения (5) существует при выполнении неравенства (3). Докажем, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[-\Delta t, T]$. Имеем

$$x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot} = f(t, x_0, [x_0]), [x_0^{\cdot}] - f(t, \chi, \chi, \chi^{\cdot}) = f_x^*(x_0 - \chi) + f_y^*[x_0 - \chi] +$$
$$+ f_u^*[x^{\cdot} - \chi^{\cdot}] + R \qquad (6)$$

Здесь

$$|R| = |f(t, \chi, [\chi], [\chi^{\cdot}]) - f(t, \chi, \chi, \chi^{\cdot})| < C_1 \Delta t$$

и для краткости будем обозначать $[z] \equiv z(t - \Delta t)$; звездочка вверху означает, что аргументы берутся в промежуточной точке.

Из работы [1] следует

$$|x_0 - \chi| < C\Delta t, \quad |x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot}| < C\Delta t \qquad (-\Delta t \leqslant t \leqslant T) \qquad (7)$$

В таком случае

$$|x_0 - \chi - [x_0 - \chi]| < C\Delta t^2, \qquad |x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot} - [x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot}]| < C\Delta t^2$$

(второе неравенство следует из уравнения (6)); поэтому уравнение (6) можно переписать так

$$x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot} = (f_{(x)} + f_{(y)})(x_0 - \chi) + f_{(u)}(x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot}) + R + O(\Delta t^2) \qquad (8)$$
$$x_0 - \chi = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Решив это обыкновенное дифференциальное уравнение, получим

$$x_0 - \chi = \int_0^t [R + O(\Delta t^2)] \exp \int_s^t \frac{f_{(x)} + f_{(y)}}{1 - f_{(u)}} d\xi \, ds$$

а значит в силу формул (3) и (4)

$$|x_0 - \chi| < \frac{1 + a}{\beta} C_1 \Delta t + O(\Delta t^2) < \left(\frac{1 + a}{\beta} C_1 + 1\right) \Delta t = C_2 \Delta t \qquad (9)$$

Если теперь обозначим

$$b_1 = \max |f_x|, \qquad b_2 = \max |f_y^*|$$

для точек, принадлежащих некоторой окрестности вырожденного решения, то легко получим из (8) и (9)

$$|x_0^{\cdot} - \chi^{\cdot}| < \left(\frac{b_1 + b_2}{1-a} C_2 + \frac{C_1 + 1}{1-a}\right) \Delta t \tag{10}$$

Аналогично, из работы [1] имеем

$$|x_1 - \chi| < C\Delta t, \qquad |x_1^{\cdot} - \chi^{\cdot}| < C\Delta t$$

Тогда опять

$$|x_1 - \chi - [x_1 - \chi]| < C\Delta t^2, \qquad |x_1^{\cdot} - \chi^{\cdot} - [x_1^{\cdot} - \chi^{\cdot}]| < C\Delta t^2$$

Поэтому

$$x_1^{\cdot} - \chi^{\cdot} = (f_{(x)} + f_{(y)})(x_1 - \chi) + f_{(u)}(x_1^{\cdot} - \chi^{\cdot}) + R + O(\Delta t^2)$$

Отсюда при помощи формул (5) и (9) получим

$$|x_1 - \chi| < C_2 \Delta t\, e^{-\gamma t} + C_2 \Delta t, \qquad \gamma = \frac{\beta}{1 + a}$$

$$|x_1^{\cdot} - \chi^{\cdot}| < \frac{b_1 + b_2}{1-a} C_2 \Delta t (e^{-\gamma t} + 1) + \frac{C_1 + 1}{1-a} \Delta t$$

Продолжая аналогичные рассуждения, будем иметь

$$|x_{n+1} - \chi| < C_2 \Delta t\, [e^{-\gamma t}(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots + a_1^n) + 1] <$$

$$< C_2 \Delta t \left[\frac{1}{1 - a_1} + 1\right] = \frac{2 - a_1}{1 - a_1} C_2 \Delta t \qquad (a_1 = e^{-\gamma T} < 1) \tag{11}$$

$$|x_{n+1}^{\cdot} - \chi^{\cdot}| < \frac{(b_1 + b_2)(2 - a_1)}{(1 - a)(1 - a_1)} C_2 \Delta t + \frac{C_1 + 1}{1 - a} \Delta t \tag{12}$$

Отсюда следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности $\{x_n(t)\}$ на отрезке $-\Delta t \leqslant t \leqslant T$.

Докажем, что на этом отрезке и сама последовательность $\{x_n(t)\}$ и последовательность из производных $\{x_n^{\cdot}(t)\}$ равномерно сходятся. Предельная же функция, очевидно, будет давать решение поставленной задачи.

Итак, рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Она удовлетворяет уравнению:

$$x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot} = f_x^*(x_{n+1} - x_n) + f_y^*[x_{n+1} - x_n] + f_u^*[x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot}]$$

Как и при доказательстве равномерной ограниченности последовательности, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению, предварительно оценив разности $|x_{n+1} - x_n - [x_{n+1} - x_n]|$, $|x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot} - [x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot}]|$.

В результате будем иметь

$$x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot} = (f_x^* + f_y^*)(x_{n+1} - x_n) + f_u^*(x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot}) + O(R_n)$$

или

$$x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot} = \frac{f_x^* + f_y^*}{1 - f_u^*}(x_{n+1} - x_n) + O(R_n) \tag{13}$$

$$|R_n| < C\Delta t(\xi_n + \xi_{n-1} + \eta_n + \eta_{n-1}), \qquad \xi_n = \max|x_{n+1} - x_n|$$

$$\eta_n = \sup|x_{n+1}^{\cdot} - x_n^{\cdot}| \tag{14}$$

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = (x_{n+1}(0) - x_n(0)) \exp \int_0^t \frac{f_x^* + f_y^*}{1 - f_u^*} ds + O(R_n) \tag{15}$$

Из формулы (15) легко получить

$$|x_{n+1}(T) - x_n(T)| < a_1 |x_{n+1}(0) - x_n(0)| + |O(R_n)|$$

Но по построению

$$x_{n+1}(T) - x_n(T) = x_{n+2}(0) - x_{n+1}(0)$$

поэтому это неравенство принимает вид

$$|x_{n+2}(0) - x_{n+1}(0)| < a_1 |x_{n+1}(0) - x_n(0)| + |O(R_n)| \tag{16}$$

Далее, из формулы, аналогичной (15), для разности $x_{n+2} - x_{n+1}$ легко заключить

$$\xi_{n+1} < |x_{n+1}(0) - x_{n+1}(0)| + O(R_{n+1})| \tag{17}$$

С другой стороны, по определению

$$|x_{n+1}(0) - x_n(0)| \leqslant \xi_n \tag{18}$$

При помощи (16), (17), (18), (13), (14) получим рекуррентные соотношения:

$$\xi_{n+2} < a_1\xi_{n+1} + C\Delta t\,(\xi_{n+1} + \xi_n + \eta_{n+1} + \eta_n) \tag{19}$$

$$\eta_{n+2} < \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\xi_{n+2} + C\Delta t\,(\xi_{n+1} + \xi_n + \eta_{n+1} + \eta_n$$

Пусть $\alpha_0 = \max(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Вследствие оценок (11) и (12) заранее имеем $\alpha_0 < C\Delta t$. Докажем, что для $n > 0$ справедлива формула

$$\xi_{n+2} < (a_1 + \varepsilon)^n \alpha_0 \qquad (\varepsilon > 0) \tag{20}$$

где ε сколь угодно мало при $\Delta t \to 0$. Прибегнем к методу индукции. Из (19) имеем

$$\xi_3 < \alpha_1 a_0 + C\Delta t\,4\alpha_0 = (a_1 + 4C\Delta t)\,\alpha_0 < (a_1 + \varepsilon)\,\alpha_0$$

если только

$$\varepsilon \geqslant 4C\Delta t \tag{21}$$

Если кроме неравенства (21) выполнено также неравенство

$$\varepsilon \geqslant C\Delta t\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a} + \frac{2}{a_1} + \frac{4C\Delta t}{a_1}\right) \tag{22}$$

то

$$\xi_4 < a_1(a_1 + \varepsilon)\,\alpha_0 + C\Delta t\,(2\alpha_0 + (a_1 + \varepsilon)\,\alpha_0 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}(a_1 + \varepsilon)\,\alpha_0 + 4C\Delta t\alpha_0) <$$

$$< (a_1 + \varepsilon)\left(a_1 + C\Delta t + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}C\Delta t + \frac{2C\Delta t}{a_1 + \varepsilon} + \frac{4C^2\Delta t^2}{a_1 + \varepsilon}\right)\alpha_0 < (a_1 + \varepsilon)^2\,\alpha_0$$

Пусть, кроме того, ε удовлетворяет и такой оценке

$$\varepsilon \geqslant C\Delta t\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right)\left(1 + \frac{2}{a_1}\right) \tag{23}$$

Предположим теперь, что для $n \leqslant m$ неравенство (20) справедливо, докажем тогда его для $n = m + 1$. Имеем из (19)

$$\xi_{m+3} < a_1(a_1 + \varepsilon)^m \alpha_0 + C\Delta t\Big[(a_1 + \varepsilon)^m \alpha_0 + (a_1 + \varepsilon)^{m-1}\alpha_0 +$$

$$+ \frac{b_1 + b_2}{1 - a}(a_1 + \varepsilon)^m \alpha_0 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}(a_1 + \varepsilon)^{m-1}\alpha_0 + C\Delta t\,[(a_1 + \varepsilon)^{m-1}\alpha_0 +$$

$$+ (a_1 + \varepsilon)^{m-2}\alpha_0 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}(a_1 + \varepsilon)^{m-1}\alpha_0 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}(a_1 + \varepsilon)^{m-2}\alpha_0 +$$

$$+ C\Delta t\Big[(a_1 + \varepsilon)^{m-2}\alpha_0 + (a_1 + \varepsilon)^{m-3}\alpha_0 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}(a_1 + \varepsilon)^{m-2}\alpha_0 +$$

$$+ \frac{b_1 + b_2}{1 + a}(a_1 + \varepsilon)^{m-3}\alpha_0 + \ldots\Big]\ldots\Big]\ldots\Big] < \alpha_0(a_1 + \varepsilon)^m\Big[a_1 + C\Delta t\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right) +$$

$$+ \frac{C\Delta t}{a_1 + \varepsilon}\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right)(1 + C\Delta t) + \left(\frac{C\Delta t}{a_1 + \varepsilon}\right)^2\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right)(1 + C\Delta t) + \ldots\Big] <$$

$$< \alpha_0(a_1 + \varepsilon)^m\Big[a_1 + C\Delta t\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right) + \left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right)(1 + C\Delta t)\times$$

$$\times\left(\frac{C\Delta t}{a_1 + \varepsilon - C\Delta t}\right)\Big] = \alpha_0(a_1 + \varepsilon)^m\Big[a_1 + C\Delta t\left(1 + \frac{b_1 + b_2}{1 - a}\right)\left(1 + \frac{C\Delta t + 1}{a_1 + \varepsilon - C\Delta t}\right)\Big]$$

В силу выполнения оценки (23) имеем

$$\xi_{m+3} < (a_1 + \varepsilon)^{m+1}\alpha_0$$

что и требовалось доказать.

Так как $a_1 + \varepsilon < 1$, то из формул (20) и (19) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n^{\cdot}(t)\}$ на всем промежутке $-\Delta t \leqslant t \leqslant T$.

Итак, существование периодического решения уравнения (1) доказано. Докажем, что в малой окрестности вырожденного решения не существует другого, отличного от построенного, периодического решения уравнения (1).

Пусть существует другое периодическое решение x_1 уравнения (1). Тогда, повторив для разности $x - x_1$ рассуждения, проведенные для доказательства сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$, получим

$$\max_{[nT,(n+1)T]} |x - x_1| < (a_1 + \sigma)^{n-2} \max_{[0,T]} |x - x_1|$$

где $\sigma > 0$ мало, вместе с выбранной окрестностью вырожденного решения.

Но в силу периодичности x и x_1

$$\max_{[nT,(n+1)T]} |x - x_1| = \max_{[0,T]} |x - x_1|$$

и так как в малой окрестности вырожденного решения $a_1 + \sigma < 1$, то $|x - x_1| \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана. Перейдем теперь к вопросу о построении асимптотики.

По построению периодического решения и в силу неравенств (11) и (12) получаем формулу нулевого приближения

$$X_0 = x_0 \equiv \chi, \qquad |x - X_0| < C\Delta t, \qquad |x^{\cdot} - X_0^{\cdot}| < C\Delta t \tag{24}$$

Рассмотрим следующий ряд, частичные суммы которого и будут давать нужные асимптотические формулы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t^k x_k(t) \tag{25}$$

Подставив этот ряд в уравнение (1), разложив правую часть по степеням Δt и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях Δt, получим уравнения для членов ряда (25). Например,

$$x_0^{\cdot} = f(t, x_0(t), x_0(t), x_0^{\cdot}(t)), \qquad x_1^{\cdot} = f_{(x)} x_1 + f_{(y)}(x_1 - x_0^{\cdot}) + f_{(u)}(x_1^{\cdot} - x_0^{\cdot\cdot})$$

$$x_2^{\cdot}(t) = f_{(x)} x_2 + f_{(y)}\left(x_2 + \frac{x_0^{\cdot\cdot}}{2!} - x_1^{\cdot}\right) + f_{(u)}\left(x_2^{\cdot} + \frac{x_0^{\cdot\cdot\cdot}}{2!} - x_1^{\cdot}\right) + f_{(xx)}\frac{x_1^2}{2!} +$$

$$+ f_{(yy)}\left(\frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_0^{\cdot 2}}{2!} - x_1 x_0^{\cdot}\right) + f_{(uu)}(\ldots) + f_{(xy)}(\ldots) + f_{(xu)}(\ldots) + f_{(yu)}(\ldots)$$

Однако для того, чтобы определить члены ряда (25), надо задать еще начальные условия. Начальное условие для нулевого члена $x_0(0) = x^\circ$ известно, поэтому $x_0(t)$ будет найдено. Перепишем теперь уравнение для функции x_k $(k = 1, \ldots, n)$, выделив в нем члены, содержащие x_k, и обозначим остаток через $D_k(t)$

$$x_k^{\cdot}(t) = (f_{(x)} + f_{(y)})\, x_k + f_{(u)} x_k^{\cdot} + D_k(t)$$

Или, разрешив относительно производной, получим

$$x_k^{\cdot} = F x_k + B_k, \qquad F = (f_{(x)} + f_{(y)})(1 - f_{(u)})^{-1}, \quad B_k = D_k (1 - f_{(u)})^{-1} \tag{26}$$

Заметим, что остаток $D_k(t)$ содержит функции $x_i(t)$ для $i < k$. Предположим, что все $x_i(t)$ для $i < k$ найдены и что все функции $x_i(t)$ $(i < k)$ периодичны с периодом T, определим тогда $x_k(0)$ из условия периодичности функции $x_k(t)$.

Решая уравнение (26), получим

$$x_k(T) = x_k(0) \exp \int_0^T F(t)\, dt + \int_0^T B_k(s) \exp \int_s^T F(\xi)\, d\xi\, ds$$

Но по условию периодичности $x_k(T) = x_k(0)$. Поэтому окончательно имеем

$$x_k(0) = \left(\int_0^T B_k(s) \exp \int_s^T F(\xi)\, d\xi\, ds\right)\left(1 - \exp \int_0^T F(t)\, dt\right)^{-1} \tag{27}$$

Таким образом, зная $x_i(t)$ для $i < k$, определим и $x_k(t)$. Так как для единицы утверждение справедливо, то, применяя метод индукции, можно найти все $x_k(t)$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Отметим, что все функции $x_k(t)$ периодичны с периодом T.

Докажем теперь, что если начальные условия определены по формуле (27), то функция

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta t^k x_k \tag{28}$$

отличается от периодического решения уравнения (1) на величину порядка $O(\Delta t^{n+1})$.

Как уже было установлено $\Delta_0 = x - x_0 = O(\Delta t)$ и $\Delta_0^{\cdot} = x^{\cdot} - x_0^{\cdot} = O(\Delta t)$.

Выделим теперь в уравнении для Δ_0 члены с точностью до $O(\Delta t^2)$. Имеем

$$\Delta_0^{\cdot} = f(t, \Delta_0 + x_0, [\Delta_0 + x_0], [\Delta_0^{\cdot} + x_0^{\cdot}]) - f(t, x_0, x_0, x_0^{\cdot}) = f_x^*\Delta_0 + f_y^*[\Delta_0] + f_u^*[\Delta_0^{\cdot}] + f(t, x_0, [x_0], [x_0^{\cdot}]) - f(t, x_0, x_0, x_0^{\cdot}) = f_{(x)}\Delta_0 + f_{(y)}\Delta_0 + f_{(u)}\Delta_0^{\cdot} + D_1(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

или

$$\Delta_0^{\cdot} = F\Delta_0 + B_1\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{29}$$

В силу периодичности функций x и x_0 их разность $\Delta_0(t)$ также периодична с периодом T. Решив уравнение (29) и использовав равенство $\Delta_0(0) = \Delta_0(T)$, найдем

$$\Delta_0(0) = \Delta t\left(\int_0^T B_1(s)\exp\int_s^T F(\xi)\,d\xi\,ds\right)\left(1 - \exp\int_0^T F(t)\,dt\right)^{-1} + O(\Delta t^2) \tag{30}$$

Сравнивая формулы (26) и (29), (27) и (30) для $k = 1$, получим

$$|x - (x_0 + \Delta t x_1)| < C\Delta t^2, \qquad |x^{\cdot} - (x_0^{\cdot} + \Delta t x_1^{\cdot})| < C\Delta t^2$$

Итак, пусть для $k \leqslant n - 1$ оценка

$$|x - X_k| < C\Delta t^{k+1}, \qquad |x^{\cdot} - X_k^{\cdot}| < C\Delta t^{k+1}$$

доказана. Покажем справедливость ее и для $k = n$. В самом деле, если поступим как при доказательстве первого приближения, выделив в уравнение для разности $\Delta_{n-1} = x - X_{n-1}$ члены с точностью до $O(\Delta t^{n+1})$, то получим

$$\Delta_{n-1}^{\cdot} = F\Delta_{n-1} + \Delta t^n B_n + O(\Delta t^{n+1}) \tag{31}$$

Так как $\Delta_{n-1}(0) = \Delta_{n-1}(T)$, то из (31) найдем

$$\Delta_{n-1}(0) = \Delta t^n\left(\int_0^T B_n(s)\exp\int_s^T F(\xi)\,d\xi\,ds\right)\left(1 - \exp\int_0^T F(t)\,dt\right)^{-1} + O(\Delta t^{n+1}) \tag{32}$$

Сравнивая (31) и (26), (32) и (27), найдем

$$|x - X_n| < C\Delta t^{n+1}, \quad |x^{\cdot} - X_n^{\cdot}| < C\Delta t^{n+1} \tag{33}$$

что и требовалось доказать. Из изложенного выше ясно, что для выполнения оценки (33) достаточно, чтобы функция f была $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности вырожденного решения ($n \geqslant 1$).

Заметим, что все полученные результаты переносятся на случай системы уравнений нейтрального типа, причем условие (3) заменяется следующим: собственные числа $\lambda_k(t)$ матрицы $f_{(u)}$ не превосходят по модулю единицы.

В заключение приношу благодарность А. Б. Васильевой за руководство работой.

Поступила 5 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б. Асимптотика решений дифференциально-разностных уравнений в случае малого отклонения аргумента. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5