Подставим величины α и φ в оставшееся неиспользованным условие периодичности: $x^{(2)}(T_0 + \alpha) = E_0 + \beta_2$. Приравнивая нулю коэффициенты при μ^n, получим

$$T_0 P_1(T_0) + C_1^{(2)}(T_0) = 0$$

$$T_0 P_2(T_0) + N_1 P_1(T_0) + C_2^{(2)}(T_0) = 0 \qquad (2.19)$$

$$T_0 P_3(T_0) + N_1 P_2(T_0) + N_2 P_1(T_0) + C_3^{(2)}(T_0) - {}^1/_2 N_1^2 C_1^{\cdot\cdot(2)}(T_0) = 0$$

. . . .

Из этих уравнений последовательно определяются величины $P_1(T_0)$, $P_2(T_0)$,... Дальнейший ход решения очевиден. В частности, построение периодического решения с периодом, не зависящим от параметра μ, выполняется при помощи обычного преобразования времени.

Поступила 1 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
2. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
3. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
4. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.

ОБ ОПАСНОСТИ КОМБИНАЦИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

К. Г. Валеев (Ленинград)

Выведены уравнения для отыскания характеристических показателей в случае простого резонанса линейной, квазистационарной системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Для определенного класса уравнений исследуется устойчивость на сопряженных резонансных частотах. Рассмотрено влияние трения на устойчивость решений. Вслед за работой [1] для более широкого класса систем показано, что введение трения, или увеличение введенного трения, может сделать неустойчивым устойчивое решение. Это явление имеет место лишь при комбинационных резонансах, оно отсутствует в случае простого резонанса.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \mu N(\theta t)\frac{dY}{dt} + (C + \mu P(\theta t))Y = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь Y — m-мерный вектор $\mu \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$ — вещественные параметры, C — диагональная матрица, $\omega_s^2 > 0$

$$G = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \omega_m^2 \end{pmatrix}, \qquad N(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k e^{ik\tau}$$

$$N(\tau + 2\pi) \equiv N(\tau), \qquad N_k = \| \nu_{js}^{(k)} \|_1^m, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} | kN_k | < \infty \qquad (1.2)$$

$$P(\tau + 2\pi) \equiv P(\tau), \qquad P(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{ik\tau}, \qquad P_k = \| \pi_{js}^{(k)} \|_1^m, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} | P_k | < \infty$$

Коэффициенты (1.1) вещественны при вещественных значениях τ.

Определение 1.1. Будем относить систему уравнений (1.1), (1.2) к классу M (т. е. механическим системам), если ее характеристические показатели [2] (стр. 168) расположены симметрично относительно мнимой оси.

В определении 1.1. условие симметрии характеристических показателей можно заменить условием симметрии мультипликаторов — корней характеристического уравнения [2] (стр. 165) относительно единичной окружности.

Система (1.1), описывающая обратимый механический процесс, всегда будет класса M. Если определитель Хилла [3], составленный для системы (1.1), будет вещественным при $p = i\omega$, $\operatorname{Im}\omega = 0$, то система (1.1) относится к классу M.

Укажем частные случаи систем класса M.

1) Система уравнений (1.1) не меняет своего вида при замене t на $-t$. Для этого достаточно, чтобы

$$P(-\tau) \equiv P(\tau), \qquad N(-\tau) \equiv -N(\tau) \tag{1.3}$$

2) Система (1.1) будет самосопряженной системой. Для этого достаточно, чтобы

$$P^*(\tau) \equiv P(\tau), \qquad N^*(\tau) \equiv -N(\tau) \equiv \text{const} \tag{1.4}$$

3) Произвольная система приводимая к (1.3), (1.4) преобразованием

$$X = B(t)Y, \qquad \operatorname{Det} B(t) \neq 0, \qquad B(t + 2\pi\theta^{-1}) \equiv B(t) \tag{1.5}$$

где матрицы $B(t)$, $B^{-1}(t)$ ограничены вместе с первыми и вторыми производными при $t \in [0, 2\pi\theta^{-1}]$.

Характеристические показатели системы (1.1) определены с точностью до слагаемого $k\theta i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Они образуют $2m$ группы, которые при $\mu = 0$ имеют вид

$$iw_s + k\theta i, \quad -i\omega_s + k\theta i \qquad (s = 1, \ldots, m, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.6}$$

Характеристические показатели расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси. Они непрерывно меняют свое положение при непрерывном изменении параметров $\mu\theta$. Нулевое решение системы (1.1) класса M не может быть асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$. Если имеется неограниченное решение вида

$$\exp\{p_1 t\}\varphi_1(t) \qquad (\operatorname{Re} p_1 > 0, \; \varphi(t + 2\pi\theta^{-1}) \equiv \varphi(t)$$

то обязательно существует решение вида

$$\varphi_2(t)\exp\{p_2 t\} \quad (\operatorname{Re} p_2 = -\operatorname{Re} p_1 < 0, \; \operatorname{Im} p_2 = \operatorname{Im} p_1, \; \varphi_2(t + 2\pi\theta^{-1}) \equiv \varphi_2(t))$$

При приближении параметров μ, θ к границе области неустойчивости характеристические показатели p_1, p_2 с разных сторон приближаются к мнимой оси. Они совпадают, когда точка параметров μ, θ выходит на границу области неустойчивости. Отсюда следует, что уравнение границы области неустойчивости системы (1.1) класса M можно получить из условия кратности характеристических показателей. При $\mu = 0$ условие совпадения характеристических показателей имеет вид

$$n^{-1}|\omega_j \pm \omega_h| = \theta. \qquad (j, h = 1, \ldots, m; \; n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

Если $\omega_j = \omega_h$, то резонанс называется простым; если $\omega_j \neq \omega_h$, то резонанс называется комбинационным [2] (стр. 341). В статье рассматривается случай резонанса, когда соотношение (1.7) выполняется при данном θ_0 лишь при единственном наборе номеров j, h, n и выборе знака в (1.7).

Для системы уравнений (1.1) класса M всегда

$$\nu_{ss}^{(0)} = 0 \qquad [(s = 1, \ldots, m) \tag{1.8}$$

Определение 1.2. Систему уравнений (1.1), где квадратичная форма

$$f(y_1, \ldots, y_m) = Y^* N_0 Y > 0 \quad \text{при } Y^*Y \neq 0 \tag{1.9}$$

является положительно определенной, будем называть системой класса M с трением, если при $N_0 \equiv 0$ система (1.1) будет системой класса M.

При выполнении (1.9) имеем $\nu_{ss}^{(0)} > 0$ $(s = 1, \ldots, m)$. Для характеристического показателя $p_s(\mu, \theta)$, где

$$p_s(0, \theta_0) = \omega_s i, \qquad \omega_s \pm \omega_h \neq k\theta_0 \qquad (h = 1, \ldots, m, \; k = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.10}$$

получим в первом приближении уравнение

$$p^2 + \mu\nu_{ss}^{(0)} p + \omega_s^2 + \mu\pi_{ss}^{(0)} + O(\mu^2) = 0 \tag{1.11}$$

При $\mu > 0$ имеем

$$\operatorname{Re} p_s = \operatorname{Re}\left(-0.5\,\mu\nu_{ss}^{(0)} + i\sqrt{\omega_s^2 + \mu\pi_{ss}^{(0)} + O(\mu^2)}\right) < 0 \tag{1.12}$$

Поэтому вопрос об устойчивости системы (1.1) решается лишь «резонирующими» показателями p_j, близкими к $i\omega_j$ при малых значениях $|\mu|$, $|\theta - \theta_0|$. Область неустойчивости системы класса M может быть найдена из условия $\operatorname{Re} p_j > 0$. Отметим, что на самой границе области неустойчивости решений системы класса M, как правило, неустойчивы. Решения системы класса M с трением всегда устойчивы.

Определение 1.3. Частоту θ_0 будем называть сильно устойчивой [4], если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $N'(\tau)$, $P'(\tau)$, в (1.1)

$$|N'(\tau) - N(\tau)| < \varepsilon, \qquad |P'(\tau) - P(\tau)| < \varepsilon \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{1.13}$$

оставляющих систему (1.1) в классе M, решения системы (1.1) будут устойчивы при всех θ, μ, удовлетворяющих условию

$$|\theta - \theta_0| < \delta, \qquad 0 \leqslant \mu < \delta, \qquad \delta > 0 \tag{1.14}$$

где ε, δ — некоторые положительные числа.

Только счетное число резонансных частот, а именно вида (1.7), могут не быть сильно устойчивыми.

Определение 1.4. Частоту θ_0 будем называть сильно неустойчивой, если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $N'(\tau)$, $P'(\tau)$ в (1.1), удовлетворяющих (1.13) и оставляющих систему (1.1) в классе M, при любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдутся θ, μ из (1.14), при которых решения системы (1.1) будут неустойчивы.

В этом случае к резонансной частоте θ_0 будет примыкать широкая область неустойчивости.

Условимся называть постоянную симметрическую матрицу C просто положительно определенной матрицей, если ей соответствует положительно определенная квадратичная форма.

2. Ниже рассматривается в основном комбинационный резонанс при частотах θ, близких к резонансной частоте

$$\theta_0 = \theta_{n,j,h} = n^{-1}|\omega_j + \omega_h| \tag{2.1}$$

Формулы для другой резонансной частоты θ_0^*

$$\theta_0^* = \theta_{n,j,h}^* = n^{-1}|\omega_j - \omega_h|, \qquad \omega_j > \omega_h \tag{2.2}$$

могут быть получены из формул для случая (2.1) заменой ω_h на $-\omega_h$. Частоты $\theta_{n,j,h}$ и $\theta_{n,j,h}^*$ будем называть сопряженными.

Ищем решение системы (1.1) в виде векторного ряда

$$Y(t) = e^{pt}\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_s e^{si\theta t}, \qquad Y_k = \begin{pmatrix} y_{k1} \\ \vdots \\ y_{km} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Подставляя $Y(t)$ (2.3) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при различных экспонентах нулю, находим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$[E(p + k\theta i)^2 + C]\,Y_k + \mu\sum_{s=-\infty}^{\infty}[N_{k-s}(p + s\theta i) + P_{k-s}]\,Y_s = 0$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.4}$$

Перейдем от (2.4) к скалярной записи. Введем обозначения

$$d_\alpha(k) = [(p + k\theta i)^2 + \omega_\alpha^2]^{-1}, \qquad f_{\alpha\tau}^{k,s} = \nu_{\alpha r}^{(k-s)}(p + s\theta i) + \pi_{\alpha r}^{(k-s)} \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4), разрешенные относительно $y_{k\alpha}$, принимают вид

$$y_{k\alpha} = -\mu d_\alpha(k) \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_{\alpha r}^{k,s} y_{s\tau} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.6}$$

Рассматривая систему (2.6) в области

$$|\mu| < \varepsilon_1, \qquad |\theta - \theta_0| < \varepsilon_2, \qquad |p - i\omega_j| < \varepsilon_3 \tag{2.7}$$

Предполагаем все время, что соотношения (2.1), (2.2) при данных θ_0, θ_0^* выполняются лишь при одном наборе чисел j, h, n ($j, h = 1, 2, \ldots, m$; $n = 1, 2, \ldots$). Все функции $d_\alpha(k)$ (2.5) будут ограниченными в области (2.7) при достаточно малых значениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, за исключением двух $d_j(0)$, $d_h(-n)$ (2.1), (2.5). У последних знаменатель обращается в нуль при $\theta = \theta_0$, $p = i\omega_j$. Исключим из системы (2.6) два уравнения с индексами $k = 0, \alpha = j$ и $k = -n, \alpha = h$. Оставшиеся уравнения при достаточно малых значениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в (2.7) будут образовывать вполне регулярную систему уравнений [5] (стр. 167)

$$y_{k\alpha} = -\mu d_\alpha(k) \sum_{r=1}^{m} {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' f_{\alpha r}^{k,s} \cdot y_{sr} - \mu d_\alpha(k) \left[f_{\alpha j}^{k,0} \cdot y_{0j} + f_{\alpha h}^{k,-n} y_{-nh}\right] \tag{2.8}$$

Здесь и далее штрих в сумме обозначает, что при суммировании выпускаются слагаемые с индексами $r = j$, $s = 0$ и $r = h$, $s = -n$. Решение системы (2.8) можно получить методом последовательных приближений [5] (стр. 160). Имеем

$$\begin{aligned} y_{k\alpha} = &\left[-\mu d_\alpha(k) f_{\alpha j}^{k,0} + \mu^2 \sum_{r=1}^{m} {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' d_\alpha(k) f_{\alpha r}^{k,s} d_r(s) f_{rj}^{s,0} - \ldots\right] y_{0j} + \\ &+ \left[-\mu d_\alpha(k) f_{\alpha h}^{k,-n} + \mu^2 \sum_{r=1}^{m} {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' d_\alpha(k) f_{\alpha r}^{k,s} d_r(s) f_{rh}^{s,-n} - \ldots\right] y_{-nh} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в оставшиеся два уравнения

$$[(p + k\theta i)^2 + \omega_\alpha^2]\, y_{k\alpha} + \mu \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_{\alpha r}^{k,s} y_{sr} = 0 \tag{2.10}$$

с индексами $k = 0$, $\alpha = j$, $k = -n$, $\alpha = h$, получим систему

$$a_{11} y_{0j} + a_{12} y_{-nh} = 0, \qquad a_{21} y_{0j} + a_{22} y_{-nh} = 0 \tag{2.11}$$

Известные величины a_{sk} ($s, k = 1,2$) имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= p^2 + \omega_j^2 + \mu f_{jj}^{(0)} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' f_{jr}^{0,s} d_r(s) f_r^{s,0} + O(\mu^3) \\ a_{12} &= \mu f_{jh}^{0,-n} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' f_{jr}^{0,s} d_r(s) f_{rh}^{s,-n} + O(\mu^3) \\ a_{21} &= \mu f_{hj}^{-n,0} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' f_{hr}^{-n,s} d_r(s) f_{rj}^{s,0} + O(\mu^3) \\ a_{22} &= (p - n\theta i)^2 + w_h^2 + \mu f_{hh}^{-n,-n} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_{hr}^{-n,s} d_r(s) f_{rh}^{s,-n} + O(\mu^3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Условие существования ненулевого решения системы (2.11) имеет вид

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) позволит определить характеристические показатели, близкие к $i\omega_j$, в области (2.7). Уравнение (2.13) могло быть получено из формулы (1.8) [6]. Здесь приведен более простой вывод уравнения (2.13).

3. Здесь и в дальнейшем везде предполагаем, что при данных θ_0 и θ_0^* в (2.1), (2.2) можно подобрать только одним способом j, h, n (за исключением перемены местами ω_j и ω_h. Положим в (2.13), (2.12)

$$p = i\omega_j + iz\mu, \qquad \theta = \theta_0 + \lambda\mu, \qquad \theta_0 = n^{-1}(\omega_j + \omega_h) \tag{3.1}$$

с точностью до малых $O(\mu)$ уравнение (2.12) принимает вид

$$\begin{vmatrix} i\nu_{jj}^{(0)} + \pi_{jj}^{(0)} / \omega_j - 2z & i\nu_{jh}^{(n)} - \pi_{jh}^{(n)} / \omega_h^- \\ i\nu_{hj}^{(-n)} + \pi_{hj}^{(-n)} / \omega_j & i\nu_{hh}^{(0)} - \pi_{hh}^{(0)} / \omega_h - 2z + 2\lambda n \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) может быть получено из более общего уравнения (5.8) [8]. Для резонансной части θ_0^* (2.2) уравнение для характеристических показателей отличается от (3.2) лишь знаком при ω_h. Введем обозначение

$$g = \left(\frac{\pi_{hj}^{(-n)}}{\omega_j} + i\nu_{hj}^{(-n)}\right)\left(\frac{\pi_{jh}^{(n)}}{\omega_h} - i\nu_{jh}^{(n)}\right) \tag{3.3}$$

Чертой сверху обозначена комплексная сопряженность. Квадратное уравнение (3.2) имеет решение

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} - \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} + i(\nu_{jj}^{(0)} + \nu_{hh}^{(0)}) + 2\lambda n \pm \right.$$
$$\left. \pm\left[\left(\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} + i(\nu_{jj}^{(0)} - \nu_{hh}^{(0)}) - 2\lambda_h\right)^2 - 4g\right]^{1/2}\right\} \tag{3.4}$$

Для системы (1.1) класса M без трения $\nu_{jj}^{(0)} = \nu_{hh}^{(0)} = 0$. Так как z_1, z_2 должны быть симметрично расположенными относительно вещественной оси, то подкоренное выражение в (3.4) должно быть вещественным при $\operatorname{Im}\lambda = 0$, т. е. $\operatorname{Im} g = 0$ (3.3). Отсюда имеем теорему.

Теорема 3.1. Для того чтобы система (1.1) относилась к классу M, необходимо, чтобы

$$\operatorname{Im} g \equiv \operatorname{Im}\left(\frac{\pi_{hj}^{(-n)}}{\omega_j} + i\nu_{hj}^{(-n)}\right)\left(\frac{\pi_{jh}^{(n)}}{\omega_h} - i\nu_{jh}^{(n)}\right) = 0 \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. Для того чтобы система уравнений (1.1) относилась к классу M при всевозможных положительно определенных диагональных матрицах C, в (1.1) необходимо, чтобы

$$\arg \pi_{hj}^{(n)} = \arg \pi_{jh}^{(n)} = \arg \nu_{hj}^{(n)} - \frac{\pi}{2} = \arg \nu_{jh}^{(n)} - \frac{\pi}{2} \pmod \pi \tag{3.6}$$

Условия (3.5), (3.6) выполняются в случаях (1.3), (1.4).

Для системы (1.1) класса M без трения на границе области неустойчивости подкоренное выражение равно нулю. Из этого следует

$$\lambda = \frac{1}{2n}\left[\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} \pm 2\sqrt{g}\right] \tag{3.7}$$

где g определено в (3.3). Рассмотрим случай системы (1.1) класса M, где $N(\tau) \equiv 0$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (C + \mu P(\theta t))\, Y = 0 \qquad (\mu \geqslant 0) \tag{3.8}$$

Из формулы (3.7), где $\nu_{jh}^{(-n)} = \nu_{jh}^{(n)} = 0$, следует теорема.

Теорема 3.3. Для системы уравнений (3.8) класса M с положительно определенной диагональной матрицей C:

1 Частота $\theta = \theta_{n,j,h}$ (2.1) будет сильно устойчивой при

$$\pi_{hj}^{(-n)}\pi_{jh}^{(n)} < 0 \tag{3.9}$$

2. Частота $\theta = \theta_{n,j,h}$ (2.1) будет сильно неустойчивой при

$$\pi_{hj}^{(-n)}\pi_{jh}^{(n)} > 0 \qquad (3.10)$$

3. Частота $\theta = \theta^*_{n,j,h}$ (2.2) будет сильно устойчивой при выполнении (3.10).

4. Частота $\theta = \theta^*_{n,j,h}$ (2.2) будет сильно неустойчивой при выполнении (3.9).

Два последних утверждения теоремы следуют из того, что для сопряженной частоты $\theta^*_{n,j,h}$ выражения для g (3.3) меняет свой знак.

Систему (3.8) с положительно определенной матрицей C линейной заменой вида (1.5) можно привести к системе с диагональной матрицей C. Поэтому из теоремы 3.3 следует теорема.

Теорема 3.4. Если для системы уравнений (3.8) класса M с положительно определенной матрицей C одна из частот θ_0, θ_0^* (2.1), (2.2) является сильно устойчивой, то сопряженная ей частота будет сильно неустойчивой. Наоборот. Если одна из частот θ_0, θ_0^* будет сильно неустойчивой, то сопряженная ей частота будет сильно устойчивой (предполагаем выполненными предположения в начале пункта).

Пример 3.1. Для системы двух уравнений

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \omega_1^2 y_1 + \mu(\cos\theta t - 2\cos 2\theta t)\, y_2 = 0 \qquad (3.11)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + \omega_2^2 y_2 + \mu(-3\cos\theta t + 4\cos 2\theta t)\, y_1 = 0, \qquad \omega_1 > \omega_2$$

находим, сравнивая с (1.1), (1.2)

$$\pi_{12}^{(1)} = 0.5, \qquad \pi_{21}^{(1)} = -1.5, \qquad \pi_{12}^{(2)} = -1, \qquad \pi_{21}^{(2)} = 2 \qquad (3.12)$$

Из теоремы (3.3) следует, что частоты

$$\theta_1 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \theta_2 = 0.5(\omega_1 + \omega_2) \qquad (3.13)$$

будут сильно устойчивыми, а частоты

$$\theta_1^* = \omega_1 - \omega_2, \qquad \theta_2^* = 0.5(\omega_1 - \omega_2) \qquad (3.14)$$

будут единственными сильно неустойчивыми.

Для канонической системы дифференциальных уравнений (3.8), где $P(\tau) = P^*(\tau)$, имеем

$$\pi_{hj}^{(n)} = \pi_{jh}^{(n)}, \qquad g = \pi_{hj}^{(-n)}\pi_{jh}^{(n)} = |\pi_{jh}^{(n)}|^2 \geqslant 0 \qquad (3.15)$$

Поэтому справедлива теорема.

Теорема 3.5. Если в системе (3.8) класса M с диагональной положительно определенной матрицей C:

1. Матрица $P(\tau)$ — симметричная $P(\tau) = P^*(\tau)$, то частоты θ_0 (2.1) не могут быть сильно устойчивыми, а им сопряженные частоты θ_0^* (2.2) не могут быть сильно неустойчивыми.

2. Матрица $P(\tau)$ — кососимметрическая $P(\tau) = -P^*(\tau)$, то частоты θ_0 (2.1) не могут быть сильно неустойчивыми, а частоты θ_0^* (2.2) не могут быть сильно устойчивыми.

Утверждение 1 следует из теоремы М. Г. Крейна [2] (стр. 353), [4] (стр. 493).

Заметим, что если матрицы $P_1(\tau)$, $P_2(\tau)$ в (3.8) делают некоторую частоту θ_0 сильно неустойчивой, то суммарная возмущающая матрицы $P(\tau)$

$$P(\tau) = P_1(\tau) + P_2(\tau) \qquad (3.16)$$

может сделать эту частоту сильно устойчивой.

Предполагаем, что все системы уравнений (3.8) с матрицами $P_1(\tau)$, $P_2(\tau)$, $P(\tau)$ (3.16) будут класса M.

Пример 3. 2. Для системы двух дифференциальных уравнений (3.8) будет сильно неустойчивой частота $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$ для возмущающих матриц $P_2(\tau)$, $P_1(\tau)$

$$P_1(\theta t) = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\theta t \\ \cos\theta t & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2(\theta t) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta t \\ -2\cos\theta t & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.17)$$

Для системы (3.8) с суммарной возмущающей матрицей $P(\tau)$ (3.16) частота $\theta_* = \omega_1 + \omega_2$ будет сильно устойчивой.

Рассмотрим систему (1.1) класса M, если $P(\tau) \equiv 0$

$$d^2Y / dt^2 + \mu N(\theta t)\, dY / dt + CY = 0 \tag{3.18}$$

Из формулы (3.7), (3.3) следуют теоремы.

Теорема 3.6. Для системы уравнений (3.18) класса M с диагональной положительно определенной матрицей C:

1. Частота $\theta_{n,j,h}$ (2.1), $\theta_{n,j,h}^*$ (2.2) будут сильно устойчивыми при

$$\nu_{hj}^{(-n)} \nu_{jh}^{(n)} < 0 \tag{3.19}$$

2. Частоты $\theta_{n,j,h}$ (2.1) $\theta_{n,j,h}^*$ (2.2) будут сильно неустойчивыми при

$$\nu_{hj}^{(-n)} \nu_{jh}^{(n)} > 0 \tag{3.20}$$

Теорема 3.7. Для системы уравнений (3.18) класса M с произвольной положительно определенной матрицей C обе сопряженные частоты $\theta_{n,j,h}$, $\theta_{n,j,h}^*$ или одновременно сильно устойчивы, или одновременно сильно неустойчивы, или одновременно не являются ни сильно устойчивыми, ни сильно неустойчивыми.

Теорема 3.8. Пусть в системе (3.18) класса M матрица C является положительно определенной диагональной матрицей.

1. Если матрица $N(\tau)$ симметрическая $N^* = N$, то все частоты $\theta_{n,j,h}$ (2.1) и $\theta_{n,j,h}^*$ (2.2) не могут быть сильно устойчивыми.

2. Если матрица $N(\tau)$ кососимметрическая $N^* = -N$, то все частоты $\theta_{n,j,h}$ (2.1) и $\theta_{n,j,h}^*$ (2.2) не могут быть сильно неустойчивыми.

Доказательство теоремы следует из того, что для симметрической матрицы $N(\tau)$ выполнено (3.20), для кососимметрической матрицы выполнено (3.19), включая знак равенства в случае $\nu_{jh}^{(n)} \nu_{hj}^{(-n)} = 0$.

Пример 3.3. Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & d^2y_1 / dt^2 + \mu (2 \sin\theta t - 4 \sin 2\theta t)\, dy_2 / dt + \omega_1^2 y_1 = 0 \\ & d^2y_2 / dt^2 + \mu (6 \sin\theta t + 8 \sin 2\theta t)\, dy_1 / dt + \omega_2^2 y_2 = 0 \end{aligned} \qquad (\omega_1 > \omega_2) \tag{3.21}$$

сравнивая с (1.2), находим

$$\nu_{12}^{(1)} = -i, \qquad \nu_{12}^{(2)} = 2i, \qquad \nu_{21}^{(1)} = -3i, \qquad \nu_{21}^{(2)} = -4i \tag{3.22}$$

Частоты

$$\theta_1 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \theta_1^* = \omega_1 - \omega_2 \tag{3.23}$$

будут сильно устойчивыми, а частоты

$$\theta_2 = 0.5\,(\omega_1 + \omega_2), \qquad \theta_2^* = 0.5\,(\omega_1 - \omega_2) \tag{3.24}$$

будут сильно неустойчивыми.

В общем случае системы (1.1) нет столь просто выраженной зависимости устойчивости для взаимно сопряженных частот. Отметим, что возмущения — матрицы $N(\tau)$, $P(\tau)$, в отдельности не вызывающие ни сильной устойчивости, ни сильной неустойчивости, при совместном действии могут привести и к тому и к другому. Очевидно, что величина g (3.3) является инвариантом при преобразованиях вида (1.5).

4. Рассмотрим устойчивость уравнений класса M с трением. Неравенство с вещественными a, b, c

$$\operatorname{Im} \sqrt{a + ib} > c > 0 \tag{4.1}$$

можно преобразовать к виду

$$b^2 > 4c^2 (c^2 + a) \tag{4.2}$$

Решения системы уравнений (1.1) могут быть неустойчивы при $\nu_{jj}^{(0)} > 0$, $\nu_{hh}^{(0)} > 0$, если

$$\operatorname{Im} \left[\left(\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} + i\,(\nu_{jj}^{(0)} - \nu_{hh}^{(0)}) - 2\lambda n \right)^2 - 4g \right]^{1/2} > (\nu_{jj}^{(0)} + \nu_{hh}^{(0)}) > 0 \tag{4.3}$$

Соответствующее неравенству (4.3) неравенство вида (4.2), разрешенное относительно λ, имеет вид

$$\lambda_- < \lambda < \lambda_+ \tag{4.4}$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2n}\left[\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} \pm \left(\frac{(\nu_{jj}^{(0)} + \nu_{hh}^{(0)})^2}{\nu_{jj}^{(0)}\nu_{hh}^{(0)}} g - (\nu_{jj}^{(0)} + \nu_{hh}^{(0)})^2\right)^{1/2}\right] \tag{4.5}$$

где g определяется формулой (3.3). Величина подкоренного выражения в (4.5) при сколь угодно малых величинах $\nu_{jj}^{(0)} > 0$, $\nu_{hh}^{(0)} > 0$ может быть сколь угодно велика. Расширение области неустойчивости может иметь место лишь при $\nu_{jj}^{(0)} \neq \nu_{hh}^{(0)}$, $j \neq h$, т. е. в случае комбинационного резонанса. Само расширение происходит за счет изменения отношения между $\nu_{jj}^{(0)}$ и $\nu_{hh}^{(0)}$.

Это интересное явление было замечено впервые в [1], где на примере простой, по сравнению с классом M, системы уравнений были указаны основные особенности явления.

Если $g < 0$, т. е. решения системы (1.1) без трения сильно устойчивы, то они останутся сильно устойчивыми (4.5) и при введении трения. Пусть $g > 0$, т. е. частота θ_0 является сильно неустойчивой. Из (3.4) найдем разложение при малых $\nu_{jj}^{(0)}$, $\nu_{hh}^{(0)}$ величин $\operatorname{Im} z_{1,2}$

$$\operatorname{Im} z_{1,2} = {}^1\!/_4\, [\nu_{jj}^{(0)} + \nu_{hh}^{(0)} \pm \alpha\, (\alpha^2 - 4g)^{-1/2} (\nu_{jj}^{(0)} - \nu_{hh}^{(0)})] + O\,(|\nu_{jj}^{(0)}|^2 + |\nu_{hh}^{(0)}|^2) \tag{4.6}$$

где

$$\alpha = \frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} - 2\,\lambda n \tag{4.7}$$

В области устойчивости система (1.1) без трения, т. е. при $\alpha^2 - 4g > 0$ при $g > 0$ всегда можно подобрать числа $\nu_{jj}^{(0)}$, $\nu_{hh}^{(0)}$, чтобы коэффициент при мнимой части одного из корней $z_{1,2}$ был отрицательным. Решения при этом становятся неустойчивыми.

Сравнивая формулы (1.6), (3.7), приходим к теореме.

Теорема 4.1. Если в системе (1.1) класса M с положительно определенной диагональной матрицей C к некоторой частоте $\theta_0 = \theta_{n,j,h}$ (2.1) примыкает широкая область неустойчивости

$$\theta_0 + \mu\lambda_1 + O\,(\mu^2) < \theta < \theta_0 + \mu\lambda_1 + O\,(\mu^2), \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const}, \qquad \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \tag{4.8}$$

то при введении трения $\nu_{jj}^{(0)} > 0$, $\nu_{hh}^{(0)} > 0$ границы $\theta_{1,2}$ области неустойчивости на плоскости параметров μ, θ принимают вид

$$\theta_{1,2} = \theta_0 + \mu\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) \pm \mu\,(\nu_{jj}^{(0)} + \nu_{hh}^{(0)}) \left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{4\nu_{jj}^{(0)}\cdot\nu_{hh}^{(0)}} - \frac{1}{4n^2}\right)^{1/2} + O\,(\mu^2) \tag{4.9}$$

Теорема 4.2. Если в системе уравнений (1.1) класса M с положительно определенной матрицей C:

1. Некоторая частота θ_0 сильно устойчива, то введение достаточно малого трения оставляет ее сильно устойчивой.

2. Некоторая комбинационная частота сильно неустойчива, то введение трения всегда может привести к расширению области неустойчивости при достаточно малых значениях $\mu > 0$.

Теорема 4.2. показывает особую опасность комбинационных резонансов, так как в реальных системах всегда присутствует малое трение.

Сравнительно недавно комбинационному резонансу не придавалось достаточного внимания, например в [7].

5. Рассмотрим аналитичность границ области неустойчивости. Пусть границы области неустойчивости на плоскости μ, θ для системы (1.1) класса M отыскиваются методом малого параметра. Встает вопрос о возможности построения границ области неустойчивости $\theta_1(\mu)$, $\theta_2(\mu)$, где $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta^\circ$ в виде рядов по целым степеням μ. Если в уравнении (3.2) учесть члены высшего порядка малости, то в формуле (3.7) в под-

коренное выражение войдет дополнительно функция $O(\mu)$. Эта функция для уравнений класса M будет вещественна при $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \lambda = 0$. Если $g > 0$, то, приравняв подкоренное выражение в (3.7) нулю, всегда можно разрешить полученное уравнение относительно λ. Получим два вещественных аналитических при $\mu = 0$ выражения для λ, т. е. для $(\theta_{1,2}(\mu) - \theta^\circ)\mu^{-1}$. Имеем теорему.

Теорема 5.1. Если в системе уравнений (1.1) класса M для некоторой резонансной частоты θ_0 или θ_0^* (2.1), (2.2) (в предположении выполнения условий пункта 3) выражение для g (3.3) положительно, то к этой сильно неустойчивой частоте будет примыкать область неустойчивости с границами $\theta_1(\mu)$, $\theta_2(\mu)$. Здесь $\theta_1(\mu)$, $\theta_2(\mu)$ — аналитические функции μ в достаточно малой окрестности точки $\mu = 0$.

Замечание 5.1. Условие $g > 0$ является в некотором смысле и необходимым, как показывает следующий пример. При дополнительных ограничениях на систему (1.1) класса M (например, каноничность уравнений) условие $g > 0$ будет лишь достаточным для аналитичности $\theta_1(\mu)$, $\theta_2(\mu)$ в точке $\mu = 0$.

Пример 5.1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$d^2y_1/dt^2 + \omega_1^2 y_1 + 2\alpha_1 y_2 \cos\theta t = 0, \qquad d^2y_2/dt^2 + \omega_2^2 y_2 + 2\alpha_2 y_1 \cos\theta t = 0 \tag{5.1}$$
$$\omega_1 > \omega_2, \qquad \theta_0 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \alpha_1 \approx 0, \qquad \alpha_2 \approx 0$$

Выражения (2.12) с точностью до $O(\alpha_1^2\alpha_2^2)$ имеют вид

$$a_{11} = p^2 + \omega_1^2 - \alpha_1\alpha_2 [(p + \theta i)^2 + \omega_2^2]^{-1} + O(\alpha_1^2\alpha_2^2), \qquad a_{12} = \alpha_1 \tag{5.2}$$
$$a_{22} = (p - \theta i)^2 + \omega_2^2 - \alpha_1\alpha_2 [(p - 2\theta i)^2 + \omega_2^2)]^{-1} + O(\alpha_1^2\alpha_2^2), \qquad a_{21} = \alpha_2$$

Полагая $p = i\omega_1 + iz$, $\theta = \theta_0 + \lambda$, получим из (2.13)

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega_1\omega_2}} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{4\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)} + O(\alpha^{3/2}\alpha^{3/2}) \tag{5.3}$$

Если $\alpha_1 = \mu a_1$, $\alpha_2 = \mu^2 a_2$, $a_1 a_2 > 0$, то уравнения границ (5.3) принимают при $\mu > 0$ вид

$$\lambda = \pm \frac{\mu^{3/2}\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} + \frac{\mu^3 a_1 a_2}{4\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)} + O(\mu^{7/2}) \tag{5.4}$$

В этом случае $g = 0$, выражения $\theta_1(\mu)$, $\theta_2(\mu)$ для границ в точке $\mu = 0$ имеют алгебраическую особую точку.

В заключение отметим, что некоторые вводные вопросы рассматривались аналогично [8], аналитичность границы для кононической системы исследовалась в [9].

Поступила 19 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt G. und Weidenhammer F. Instabilitäten gedämpfter rheolinearer Swingungen. Math. Nachrichten, 1961, 23, H. 4—5.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехтеоретиздат, 1958.
3. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
4. Крейн М. Г. Основные положения теории λ зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сб. «Памяти А. А. Андронова». Изд. АН СССР, 1955.
5. Канторович А. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
6. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Определение характеристических показателей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
7. Кочин Н. Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ, 1934, т. 2, вып. 1.
8. Якубович В. А. Замечания к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
9. Якубович В. А. О динамической устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, т. 121, № 4, 602—605, 1958.