ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

А. П. Проскуряков (Москва)

Случай, когда уравнение частот имеет простые положительные корни, рассмотрев в работах [1,2]. Для системы с двумя степенями свободы изложен также и случай кратных корней [3]. В данной работе рассмотрены случаи, когда среди корней уравнения частот имеются кратные или нулевые корни.

1. Случай кратных положительных корней уравнения частот. Рассмотрим колебательную систему с n степенями свободы, уравнения движения которой имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}x_k^{\cdot\cdot} + c_{ik}x_k) = \mu F_i\,(x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, \mu)$$
$$a_{ik} = a_{ki}, \qquad c_{ik} = c_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем введено обозначение $dx/dt = x^{\cdot}$.

Функции F_i предполагаются аналитическими от своих аргументов в некоторой области их изменения, а параметр μ — малым. Порождающая система ($\mu = 0$) является линейной консервативной системой с постоянными коэффициентами, кинетическая и потенциальная энергии которой выражаются определенно положительными квадратичными формами. При этом условии все корни уравнения частот

$$\Delta\,(\omega^2) = |\,c_{ik} - \omega^2 a_{ik}\,| = 0 \tag{1.2}$$

положительные. Пусть среди этих корней имеется один кратный корень кратности l, например, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \ldots = \omega_l^2$, а остальные $n - l$ корней простые.

Частные решения порождающей системы при любых (простых или кратных) положительных корнях уравнения частот ω_r^2 имеют, как известно, вид

$$x_{k0}^{(r)}\,(t) = A_{kr} \cos \omega_r t + B_{kr}\, \omega_r^{-1} \sin \omega_r t \tag{1.3}$$

Коэффициенты A_{kr} (или B_{kr}) определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \omega_r^2 a_{ik})\, A_{kr} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

При l-кратном корне $\omega^2 = \omega_1^2$ не только определитель $\Delta\,(\omega^2)$, но и все его производные по ω^2 до $l - 1$-й производной включительно равны нулю. Так как определитель $\Delta\,(\omega^2)$ — симметрический, то в этом случае все его миноры до порядка $n - l + 1$ включительно также равны нулю. Поэтому для корня ω_1^2 только $n - l$ уравнений системы (1.4) будут независимыми, остальные l уравнений будут следствием этих $n - l$ уравнений. Таким образом, для этого корня l величин A_{kr} (аналогично B_{kr}) остаются произвольными.

Расположим уравнения в системе (1.4) так, чтобы для кратного корня ω_1^2 первые l уравнений были следствием остальных $n - l$ уравнений. Тогда решение порождающей системы будет иметь следующую структуру

$$x_{k0}\,(t) = \sum_{r=1}^{l} q_k^{(r)} x_0^{(r)}\,(t) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} x_0^{(r)}\,(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Для $k = 1, \ldots, l$ имеем

$$q_k^{(r)} = 1 \qquad (r = k), \qquad q_k^{(r)} = 0 \qquad (r \neq k) \tag{1.6}$$

Остальные коэффициенты $q_k^{(r)}$ для $k = l + 1, \ldots, n$, можно найти, решая систему последних $n - l$ уравнений (1.4) для $i = l + 1, \ldots, n$ относительно $A_{l+1,1}, \ldots, A_{n1}$ при $\omega = \omega_1$. Эти величины будут линейными функциями $A_{11}, \ldots, A_{l1}$ с коэффициентами, равными $q_k^{(r)}$

$$A_{k1} = q_k^{(1)} A_{11} + \ldots + q_k^{(l)} A_{l1} \qquad (k = l + 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Величины $p_k^{(r)}$ определяются, как обычно, формулами

$$p_k^{(r)} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)} \qquad (k = 1, \ldots, n; \quad r = l+1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Функции $x_0^{(r)}(t)$, входящие в формулу (1.5), имеют вид

$$x_0^{(r)}(t) = A_r \cos \omega_r t + B_r \omega_r^{-1} \sin \omega_r t \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

Предположим, что частота ω_1 соизмерима с частотами $\omega_{l+1}, \ldots, \omega_h$ и несоизмерима ни с одной из других частот. Очевидно, что частотам $\omega_1, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_h$ отвечает некоторое периодическое решение порождающей системы с периодом T_0. Построим периодическое решение системы (1.1), которое при $\mu = 0$ переходило бы в упомянутое периодическое решение порождающей системы. При этом искомое периодическое решение будет иметь период $T = T_0 + \alpha$, где α — функция от μ, уничтожающаяся при $\mu = 0$.

По методу малого параметра начальные условия для системы (1.1) получаются из начальных условий порождающей системы путем добавления к ним линейных комбинаций некоторых функций $\beta_r(\mu)$ и $\gamma_r(\mu)$, которые обращаются в нуль при $\mu = 0$. Можно показать, аналогично тому, как это сделано в работе [1] для случая простых корней уравнения частот, что эти функции $\beta_r(\mu)$ и $\gamma_r(\mu)$ можно ввести так, чтобы они всюду входили в виде сумм $A_r + \beta_r$ и $B_r + \gamma_r$. Следовательно, начальные условия для системы (1.1) могут быть взяты в следующем виде [2]

$$\begin{aligned} x_k(0) &= \sum_{r=1}^{l} q_k^{(r)}(A_r + \beta_r) + \sum_{r=l+1}^{h} p_k^{(r)}(A_r + \beta_r) + \sum_{r=h+1}^{n} p_k^{(r)}\varphi_{r-h} \\ x_k^{\cdot}(0) &= \sum_{r=2}^{l} q_k^{(r)}(B_r + \gamma_r) + \sum_{r=l+1}^{h} p_k^{(r)}(B_r + \gamma_r) + \sum_{r=h+1}^{n} p_k^{(r)}\psi_{r-h} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Так как система (1.1) автономна, то одна из пар величин $B_r + \gamma_r$, входящих в начальные условия (1.10), может быть принята равной нулю. В данном случае принято, что $B_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$. Величины φ_{r-h} и ψ_{r-h} будут аналитическими функциями $A_p + \beta_p$, $B_q + \gamma_q$ и μ

$$\begin{aligned} \varphi_{r-h} &= \varphi_{r-h}(A_p + \beta_p, B_q + \gamma_q, \mu) \\ \psi_{r-h} &= \psi_{r-h}(A_p + \beta_p, B_q + \gamma_q, \mu) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, h \\ q = 2, \ldots, h \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

причем

$$\varphi_{r-h}(A_p + \beta_p, B_q + \gamma_q, 0) = 0, \qquad \psi_{r-h}(A_p + \beta_p, B_q + \gamma_q, 0) = 0$$

Решение системы (1.1) может быть представлено в виде [2]

$$\begin{aligned} x_k(t, A_r + \beta_r, B_r + \gamma_r, \mu) = {} & q_k^{(1)}(A_1 + \beta_1)\cos\omega_1 t + \\ & + \sum_{r=2}^{l} q_k^{(r)}\left[(A_r + \beta_r)\cos\omega_1 t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right] + \\ & + \sum_{r=l+1}^{h} p_k^{(r)}\left[(A_r + \beta_r)\cos\omega_r t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t\right] + \\ & + \sum_{r=h+1}^{n} p_k^{(r)}\left(\varphi_{r-h}\cos\omega_r t + \frac{\psi_{r-h}}{\omega_r}\sin\omega_r t\right) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\left[C_{km}(t) + \sum_{r=1}^{h}\frac{\partial C_{km}}{\partial A_r}\beta_r + \sum_{r=2}^{h}\frac{\partial C_{km}}{\partial B_r}\gamma_r + \cdots\right]\mu^m \end{aligned} \tag{1.12}$$

Функции $C_{km}(t)$ удовлетворяют системе уравнений [1]

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{C}_{km} + c_{ik}C_{km}) = H_{im}(t), \qquad H_{im}(t) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\right)_{\beta_r=\gamma_r=\mu=0} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.13}$$

при нулевых начальных условиях: $C_{km}(0) = \dot{C_{km}}(0) = 0$. Решая эту систему уравнений операторным методом, получим

$$C_{km}(t) = \frac{1}{\Delta^*(D^2)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}^*(D^2)\, H_{im}(t) \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.14}$$

При этом имеем очевидные соотношения

$$\Delta^*(D^2) = \Delta(-\omega^2), \qquad \Delta_{ik}^*(D^2) = \Delta_{ik}(-\omega^2)$$

Далее имеем

$$\Delta^*(D^2) = \Delta_0 (D^2 + \omega_1^2)^l \prod_{r=l+1}^{n} (D^2 + \omega_r^2) = (D^2 + \omega_1^2)^l \Delta^{\circ *}(D^2)$$

$$\Delta_0 = |\, a_{ik}\,|$$

В силу свойств симметрического определителя

$$\Delta_{ik}^*(D^2) = (D^2 + \omega_1^2)^{l-1} \Delta_{ik}^{\circ *}(D^2)$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta_{ik}^*(D^2)}{\Delta^*(D^2)} = \frac{\Delta_{ik}^{\circ *}(D^2)}{(D^2 + \omega_1^2)\Delta^{\circ *}(D^2)} = \frac{1}{\Delta_0}\left[\frac{L_{ik}^{(1)}}{D^2 + \omega_1^2} + \sum_{r=l+1}^{n} \frac{L_{ik}^{(r)}}{D^2 + \omega_r^2}\right] \tag{1.15}$$

Легко видеть, что для $r = l + 1, \ldots, n$

$$L_{ik}^{(r)} = \Delta_{ik}(\omega_r^2) \left[\prod_{s \neq r}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2)\right]^{-1} = K_{ik}^{(r)}$$

Здесь $K_{ik}^{(r)}$ — коэффициенты, полученные ранее для некратных корней уравнения частот [1]. Для кратного корня ω_1^2 находим

$$L_{ik}^{(1)} = \overset{\circ}{\Delta}_{ik}(\omega_1^2) \left[\prod_{s=l+1}^{n} (\omega_s^2 - \omega_1^2)\right]^{-1}$$

Таким образом, получаем

$$C_{km}(t) = C_{km}^{(1)}(t) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} C_m^{(r)}(t) \tag{1.16}$$

Функции $C_m^{(r)}(t)$ при $r = l + 1, \ldots, n$ определяются формулами (14) и (15) работы [1]. Рассмотрим функцию $C_{km}^{(1)}(t)$, которая соответствует кратному корню ω_1^2

$$C_{km}^{(1)}(t) = \left[\Delta_0 \omega_1 \prod_{s=l+1}^{n} (\omega_s^2 - \omega_1^2)\right]^{-1} \int_0^t R_{km}^{(1)}(\tau) \sin \omega_1 (t - \tau)\, d\tau$$

$$R_{km}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{\Delta}_{ik}(\omega_1^2)\, H_{im}(t)$$

Из условия

$$\frac{A_{k1}}{A_{11}} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_1^2)}{\Delta_{i1}(\omega_1^2)} = \frac{\overset{\circ}{\Delta}_{ik}(\omega_1^2)}{\overset{\circ}{\Delta}_{i1}(\omega_1^2)} \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

имеем

$$\frac{A_{k1}}{\overset{\circ}{\Delta}_{ik}(\omega_1^2)} = \ldots = \frac{A_{11}}{\overset{\circ}{\Delta}_{i1}(\omega_1^2)}$$

Отсюда, учитывая формулы (1.6) и (1.7), получаем

$$\overset{\circ}{\Delta}_{ik}(\omega_1^2) = q_k^{(1)} \overset{\circ}{\Delta}_{i1}(\omega_1^2) + \ldots + q_k^{(l)} \overset{\circ}{\Delta}_{il}(\omega_1^2)$$

Таким образом, находим

$$C_{km}^{(1)}(t) = \sum_{r=1}^{l} q_k^{(r)} C_m^{(r)}(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1,17}$$

где

$$C_m^{(r)}(t) = [\Delta_0\omega_1 \prod_{s=l+1}^{n} (\omega_s^2 - \omega_1^2)]^{-1} \int_0^t R_m^{(r)}(\tau) \sin\omega_1 (t-\tau)\, d\tau$$

$$R_m^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{\Delta}_{ir}(\omega_1^2) H_{im}(t) \qquad (r = 1, \ldots, l) \tag{1.18}$$

Следовательно, окончательно имеем

$$C_{km}(t) = \sum_{r=1}^{l} q_k^{(r)} C_m^{(r)}(t) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} C_m^{(r)}(t) \tag{1.19}$$

Коэффициенты $q_k^{(r)}$ для $k = 1, \ldots, l$ определяются по формулам (1.6), а для $k = l + 1, \ldots, n$ согласно соображениям, изложенным на стр. 1128.

Итак, решение системы (1.1) в случае одного кратного корня уравнения частот может быть представлено в виде, аналогичном виду решения линейной порождающей системы

$$x_k(t) = \sum_{r=1}^{l} q_k^{(r)} x^{(r)}(t) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.20}$$

Так как частота ω_1 соизмерима только с частотами $\omega_{l+1}, \ldots, \omega_h$, то функции $x^{(r)}(t)$ имеют вид

$$x^{(r)}(t) = (A_r + \beta_r) \cos\omega_r t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r} \sin\omega_r t + X^{(r)}(t)$$

$$B_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 0 \qquad (r = 1, \ldots, h) \tag{1.21}$$

$$x^{(r)}(t) = \varphi_{r-h} \cos\omega_r t + \frac{\psi_{r-h}}{\omega_r} \sin\omega_r t + X^{(r)}(t) \qquad (r = h + 1, \ldots, n)$$

где

$$X^{(r)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial A_j} \beta_j + \sum_{j=2}^{h} \frac{\partial C_m^{(r}}{\partial B_j} \gamma_j + \ldots \right] \mu^m \tag{1.22}$$
$$(r = 1, \ldots, n)$$

На основании работы [2] поставленная задача о построении периодического решения с периодом $T_0 + \alpha$ системы уравнений (1.1) при формулированных выше дополнительных условиях сводится к последовательному решению двух задач: а) к построению периодического решения для системы с h степенями свободы и б) к вычислению дополнительных поправок к этому решению. Способ вычисления этих поправочных членов на примере системы с двумя степенями свободы указан в работе [2].

До сих пор предполагалось наличие одного кратного корня уравнения частот. Обобщить этот случай на случай нескольких кратных корней не представляет какого-либо труда.

2. Случай нулевых корней уравнения частот. Предположим, что уравнение частот (1.2), помимо положительных корней, имеет нулевой корень простой или кратный. Частное решение, отвечающее этому корню, может быть получено из выражения (1.3), если в нем частоту ω_r устремить к нулю. Тогда

$$x_{k0}^{(r)} = A_{kr} + B_{kr} t \tag{2.1}$$

Структура решения порождающей системы от наличия нулевых корней не изменяется. Очевидно, что структура решения системы (1.1) также не изменится.

Метод построения периодических решений системы (1.1) останется прежним, однако, расчетные формулы в рассматриваемом случае будут несколько отличаться. В частности, при вычислении коэффициентов $C_{km}(t)$ в разложении величины $\Delta_{ik}^*(D^2) / \Delta^*(D^2)$ на простейшие дроби появится слагаемое нового вида. Если, например, имеется один нулевой корень $\omega_n = 0$, то

$$\frac{\Delta_{ik}^*(D^2)}{\Delta^*(D^2)} = \frac{1}{\Delta_0} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{K_{ik}^{(r)}}{D^2 + \omega_r^2} + \frac{K_{ik}^{(n)}}{D^2} \right]$$

где

$$K_{ik}^{(n)} = \Delta_{ik}(0)\,[\prod_{s=1}^{n-1}\omega_s^2]^{-1}$$

При этом последнее слагаемое, входящее в состав функции $C_{km}(t)$, будет иметь вид

$$C_{km}(t) = \ldots + \Delta_{ik}(0)\,[\Delta_0 \prod_{s=1}^{n-1}\omega_s^2]^{-1}\int_0^t R_{km}^{(n)}(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

Характерные особенности построения периодического решения при наличии нулевого корня у уравнения частот покажем на примере системы с двумя степенями свободы. Имеем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{\cdot\cdot} + a_{12}x_2^{\cdot\cdot} + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= \mu F_1(x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}, \mu) \\ a_{21}x_1^{\cdot\cdot} + a_{22}x_2^{\cdot\cdot} + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 &= \mu F_2(x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}, \mu) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Пусть уравнение частот порождающей системы имеет корни: ω_1^2 и 0. В дальнейшем значок «1» у первого корня опустим.

Общее решение порождающей системы имеет вид

$$x_{10}(t) = A_0\cos\omega t + \frac{B_0}{\omega}\sin\omega t + E_0 + G_0 t$$

$$x_{20}(t) = p_1\left(A_0\cos\omega t + \frac{B_0}{\omega}\sin\omega t\right) + p_2(E_0 + G_0 t)$$

где

$$p_1 = p_2^{(1)} = -\frac{c_{11}-\omega^2 a_{11}}{c_{12}-\omega^2 a_{12}} = -\frac{c_{21}-\omega^2 a_{21}}{c_{22}-\omega^2 a_{22}}, \quad p_2 = p_2^{(2)} = -\frac{c_{11}}{c_{12}} = -\frac{c_{21}}{c_{22}} \tag{2.4}$$

Периодическое решение порождающей системы не будет содержать члена $G_0 t$. Кроме того, учитывая автономность системы, можно положить $B_0 = 0$. Таким образом, в окончательном виде получим

$$x_{10}(t) = A_0\cos\omega t + E_0, \qquad x_{20}(t) = p_1 A_0\cos\omega t + p_2 E_0 \tag{2.5}$$

Для исходной системы (2.3) можно принять следующие начальные условия

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A_0 + \beta_1 + E_0 + \beta_2, \qquad x_1^{\cdot}(0) = \varphi(A_0 + \beta_1, E_0 + \beta_2, \mu) \\ x_2(0) &= p_1(A_0 + \beta_1) + p_2(E_0 + \beta_2), \quad x_2^{\cdot}(0) = p_2\varphi(A_0 + \beta_1, E_0 + \beta_2, \mu) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Представим решение системы (2.3) в виде

$$x_1(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t), \qquad x_2(t) = p_1 x^{(1)}(t) + p_2 x^{(2)}(t) \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= (A_0 + \beta_1)\cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{(1)}(t) + \frac{\partial C_n^{(1)}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{(1)}}{\partial E_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n \\ x^{(2)}(t) &= E_0 + \beta_2 + \varphi t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{(2)}(t) + \frac{\partial C_n^{(2)}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{(2)}}{\partial E_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n \end{aligned} \tag{2.8}$$

Функции $C_n^{(1)}(t)$ и $C_n^{(2)}(t)$ определяются формулами

$$C_n^{(1)}(t) = -\frac{1}{\Delta_0\omega^3}\int_0^t R_n^{(1)}(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau, \qquad C_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\Delta_0\omega^2}\int_0^t R_n^{(2)}(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau \tag{2.9}$$

Формулы для величин $R_n^{(1)}(t)$ и $R_n^{(2)}(t)$ даны в работе [3].

Имеем следующие условия периодичности для функций $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ и их первых производных

$$\begin{aligned} x^{(1)}(T_0 + \alpha) &= A_0 + \beta_1, \qquad & x^{\cdot(1)}(T_0 + \alpha) &= 0 \\ x^{(2)}(T_0 + \alpha) &= E_0 + \beta_2, \qquad & x^{\cdot(2)}(T_0 + \alpha) &= \varphi \end{aligned} \tag{2.10}$$

При этом через T_0 обозначен период порождающего решения $T_0 = 2\pi/\omega$, а через $T_0 + \alpha$ — период решения системы (2.3). Величина α может быть представлена в виде

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \left[N_n(T_0) + \frac{\partial N_n}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial N_n}{\partial E_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 N_n}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots \right]\mu^n \qquad (2.11)$$

Из условия $x^{\cdot(1)}(T_0 + \alpha) = 0$ находятся коэффициенты $N_n(T_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} N_1(T_0) &= \frac{1}{\omega^2 A_0} C_1^{\cdot(1)}(T_0) \\ N_2(T_0) &= \frac{1}{\omega^2 A_0}\left[C_2^{\cdot(1)}(T_0) + N_1 C_1^{\cdot\cdot(1)}(T_0)\right] \\ N_3(T_0) &= \frac{1}{\omega^2 A_0}\left[C_3^{\cdot(1)}(T_0) + N_2 C_1^{\cdot\cdot(1)}(T_0) + N_1 C_2^{\cdot\cdot(1)}(T_0) + \frac{1}{2}N_1^2 C_1^{\cdot\cdot\cdot(1)}(T_0)\right] \end{aligned} \qquad (2.12)$$

. . . .

Теперь подставим величину α в условия: $x^{(1)}(T_0 + \alpha) = A_0 + \beta_1$ и $x^{\cdot(2)}(T_0 + \alpha) = \varphi$. Эти условия примут вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[M_{jn}(T_0) + \frac{\partial M_{jn}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial M_{jn}}{\partial E_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_{jn}}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots \right]\mu^n = 0 \quad (j = 1, 2) \qquad (2.13)$$

Для первого из них получим

$$\begin{aligned} M_{11}(T_0) &= C_1^{(1)}(T_0) \\ M_{12}(T_0) &= C_2^{(1)}(T_0) + \frac{1}{2}\omega^2 A_0 N_1^2 \\ M_{13}(T_0) &= C_3^{(1)}(T_0) + \omega^2 A_0 N_1 N_2 - \frac{1}{2}N_1^2 C_1^{\cdot\cdot(1)}(T_0) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

. . . .

Для второго из этих условий найдем

$$\begin{aligned} M_{21}(T_0) &= C_1^{\cdot(2)}(T_0) \\ M_{22}(T_0) &= C_2^{\cdot(2)}(T_0) + N_1 C_1^{\cdot\cdot(2)}(T_0) \\ M_{23}(T) &= C_3^{\cdot(2)}(T_0) + N_2 C_1^{\cdot\cdot(2)}(T_0) + N_1 C_2^{\cdot\cdot(2)}(T_0) + \frac{1}{2}N_1^2 C_1^{\cdot\cdot\cdot(2)}(T_0) \end{aligned} \qquad (2.15)$$

. . . .

Система уравнений

$$M_{11}(T_0) = C_1^{(1)}(T_0) = 0, \qquad M_{21}(T_0) = C_1^{\cdot(2)}(T_0) = 0 \qquad (2.16)$$

определяет величины A_0 и E_0. Вид решений системы (2.3) зависит от кратности корней уравнений (2.16). Если якобиан

$$\frac{D(M_{11}, M_{21})}{D(A_0, E_0)} \neq 0$$

то параметры β_1 и β_2 могут быть представлены рядами по целым степеням μ

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu^n, \qquad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \mu^n \qquad (2.17)$$

Следовательно, решение системы (2.3) также будет представлено рядами по целым степеням μ. Если же указанный якобиан равен нулю, то дальнейшее исследование проводится аналогично тому, как это было сделано для неавтономной системы с одной степенью свободы [4].

Для определения величины φ представим ее в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n(T_0) + \frac{\partial P_n}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial P_n}{\partial E_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots \right]\mu^n \qquad (2.18)$$

Подставим величины α и φ в оставшееся неиспользованным условие периодичности: $x^{(2)}(T_0 + \alpha) = E_0 + \beta_2$. Приравнивая нулю коэффициенты при μ^n, получим

$$
\begin{gathered}
T_0 P_1 (T_0) + C_1^{(2)} (T_0) = 0 \\
T_0 P_2 (T_0) + N_1 P_1 (T_0) + C_2^{(2)} (T_0) = 0 \qquad (2.19) \\
T_0 P_3 (T_0) + N_1 P_2 (T_0) + N_2 P_1 (T_0) + C_3^{(2)} (T_0) - {}^1/_2 N_1^2 C_1^{\cdot\cdot(2)} (T_0) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

Из этих уравнений последовательно определяются величины $P_1(T_0)$, $P_2(T_0)$,... Дальнейший ход решения очевиден. В частности, построение периодического решения с периодом, не зависящим от параметра μ, выполняется при помощи обычного преобразования времени.

Поступила 1 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
2. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
3. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
4. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.

ОБ ОПАСНОСТИ КОМБИНАЦИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

К. Г. Валеев (Ленинград)

Выведены уравнения для отыскания характеристических показателей в случае простого резонанса линейной, квазистационарной системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Для определенного класса уравнений исследуется устойчивость на сопряженных резонансных частотах. Рассмотрено влияние трения на устойчивость решений. Вслед за работой [1] для более широкого класса систем показано, что введение трения, или увеличение введенного трения, может сделать неустойчивым устойчивое решение. Это явление имеет место лишь при комбинационных резонансах, оно отсутствует в случае простого резонанса.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \mu N(\theta t) \frac{dY}{dt} + (C + \mu P(\theta t)) Y = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь Y — m-мерный вектор $\mu \geqslant 0, \theta \geqslant 0$ — вещественные параметры, C — диагональная матрица, $\omega_s^2 > 0$

$$G = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \omega_m^2 \end{pmatrix}, \qquad N(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k e^{ik\tau}$$

$$N(\tau + 2\pi) \equiv N(\tau), \qquad N_k = \| \nu_{js}^{(k)} \|_1^m, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} | kN_k | < \infty \qquad (1.2)$$

$$P(\tau + 2\pi) \equiv P(\tau), \qquad P(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{ik\tau}, \qquad P_k = \| \pi_{js}^{(k)} \|_1^m, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} | P_k | < \infty$$

Коэффициенты (1.1) вещественны при вещественных значениях τ.