О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОДНОГО КЛАССА

Т. Ф. Иванов (Гурьев)

В работах [1, 2] изложен метод определения периодических движений нелинейных систем, описываемых уранениями (1.1) частного вида. Ниже этим методом удается доказать теоремы о существовании периодических решений уравнений (1.1) при более общих условиях, чем в теореме А. В. Драгилева [3] о существовании, по крайней мере, одного предельного цикла. Доказанные теоремы позволили обосновать постановку и решение промежуточной и смешанной задач для исследования нелинейных систем, описываемых уравнениями вида (1.1), и показать, что полученные результаты можно использовать и для решения прямой задачи, т. е. для определения всех периодических решений уравнения (1.1), по крайней мере, при условии, что функции $p(x)$, $q(x)$ непрерывны.

1. Среди автономных систем с одной степенью свободы видное место занимают системы, описываемые уравнениями вида

$$x^{\cdot\cdot} + p(x)\, x^{\cdot} + xq(x) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ — вещественные функции от x. Введем функции $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, связанные с функциями $p(x)$, $q(x)$ системой уравнений

$$\frac{1}{2}(1 - \Phi\Psi^2)\frac{d\Phi}{dx} + xq(x) = 0, \qquad \frac{3}{2}\Psi\frac{d\Phi}{dx} + \Phi\frac{d\Psi}{dx} + p(x) = 0 \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. Пусть одно из частных решений системы уравнений (1.2) выражено через две вещественные функции $\Phi = \varphi(x)$, $\Psi = \psi(x)$, удовлетворяющие, в некотором промежутке $[a \leqslant x \leqslant b]$, $a \neq b$, условиям

$$\varphi = 0, \quad d\varphi / dx \neq 0 \quad \text{при} \quad x = a_1, b \tag{1.3}$$

φ непрерывна на $[a, b]$; $\qquad 0 < \varphi$ внутри (a, b)

$$\sqrt{\varphi}\,|\psi| < 1 \quad \text{на } [a, b] \tag{1.4}$$

Тогда указанным двум функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ соответствует частное периодическое решение $x(t + t_0)$ уравнения (1.1) с экстремальными значениями при $x = a$, $x = b$ и с отличным от нуля конечным периодом

$$T = 2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi}\,(1 - \varphi\psi^2)} \tag{1.5}$$

Доказательство. Уравнение (1.1) имеет первый интервал

$$x^{\cdot} = \pm\sqrt{\Phi}(1 \pm \sqrt{\Phi}\Psi) = \pm\sqrt{\Phi} + \Phi\Psi \tag{1.6}$$

где Φ, Ψ — общие решения системы уравнений (1.2). В самом деле, дефференцируя (1.6) по независимой переменной t после преобразования, получим уравнение (1.1).

Согласно (1.6), по крайней мере при условии, что две функции φ, ψ, определенных из (1.2), удовлетворяют условиям (1.3) и (1.4), фазовая траектория соответствующего решения $x(t + t_0)$ уравнения (1.1) образует в промежутке $[a, b]$ на фазовой плоскости $x\dot{x}$ несамопересекающуюся замкнутую кривую, нигде не касающуюся оси x и пересекающую ее только в двух крайних точках a, b, так что решение $x(t + t_0)$ есть периодическая функция с экстремальными значениями a, b с ограниченным и отличным от нуля периодом T. В самом деле, из (1.6) имеем

$$\begin{aligned} t + t_0 &= \int_a^{x \leqslant b} \frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}\,(1 + \sqrt{\varphi}\psi)} \qquad \text{при } \frac{dx}{dt} \geqslant 0 \\ t + t_0 &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi}\,(1 + \sqrt{\varphi}\psi)} - \int_b^{x \geqslant a} \frac{d\mu}{\sqrt{\varphi}\,(1 - \sqrt{\varphi}\psi)} \qquad \text{при } \frac{dx}{dt} < 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Период колебания определяется из равенства

$$T=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi}\,(1+\sqrt{\varphi\psi})}+\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi}\,(1-\sqrt{\varphi\psi})}=2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi}\,(1-\varphi\psi^2)}$$

Теорема доказана. Заметим, что найдутся бесконечные множества вещественных функций $p(x)$, $q(x)$ таких, что условия теоремы 1.1 выполняются, а условия теоремы А. В. Драгилева [3] не выполняются.

Пример. Пусть $u(x)$, $v(x)$ — целые многочлены по степеням x, удовлетворяющие в некотором промежутке $[a, b]$ условиям

$$u^2<1, \qquad \varepsilon^2 v^2 (1+u^2)\,[A^2-(x-c)^2]^{1-\gamma-2\lambda}<1 \tag{1.8}$$

где ε, γ, λ — положительные постоянные

$$\varepsilon>0, \qquad 0\leqslant\gamma<0.5, \qquad 0<\lambda\leqslant {}^1/_2\,(1-\gamma) \tag{1.9}$$

$$A={}^1/_2\,(b-a), \qquad c={}^1/_2\,(b-a), \qquad A^2-(x-c)^2=(b-x)(x-a)$$

Множества функций $p(x)$ и $q(x)$ определяем из равенств

$$p(x)=\varepsilon^2(1+u)\{(3-3\gamma-2\lambda)(1+u)\ (x-c)\,v-[3u'v-v'(1+u)]\,(b-x)\times$$
$$\times(x-a)\}\,[A^2-(x-c)^2]^{-\gamma-\lambda}$$

$$xq(x)=\varepsilon^2\,[(x-c)(1-\gamma)(1+u)-u'(b-x)(x-a)]\,\{1-\varepsilon^2v^2(1+u)^2\times$$
$$\times[A^2-(x-c)^2]^{1-\gamma-2\lambda}\}\,[A^2-(x-c)]^{-\gamma} \tag{1.10}$$

Здесь штрих обозначает производную по x.

При $\gamma>0$ условия теоремы А. В. Драгилева не выполняются на концах промежутка $[a, b]$, однако уравнения вида (1.1) при этом имеют периодические решения с экстремальными значениями $x=a, b$ и конечными периодами, так как при использовании (1.10) определенные из (1.2) частные решения

$$\Phi=\varepsilon^2(1+u)^2\,[A^2-(x-c)^2]^{1-\gamma}, \qquad \Psi=v\,[A^2-(x-c)^2]^{-\lambda} \tag{1.11}$$

согласно (1.8) и (1.9), удовлетворяют в промежутке $[a, b]$ условиям теоремы 1.1.

Уравнения фазовых траекторий таких решений на фазовой плоскости $xx^{\cdot}$ имеют вид

$$x^{\cdot}=+\varepsilon(1+u)\,\{1\pm\varepsilon v(1+u)\,[A^2-(x-c)^2]^{{}^1/_2(1-\gamma-2\lambda)}\}\,[A^2-(x-c)^2]^{{}^1/_2(1-\gamma)} \tag{1.12}$$

Периоды колебаний определяются с любой точностью из равенств

$$T=\frac{2}{\varepsilon}\int_{-A}^{A} g(x-c)\,\frac{d(x-c)}{\sqrt{A^2-(x-c)^2}} \tag{1.13}$$

так, как, согласно (1.9), функции $g(x-c)$ разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды по степеням $(x-c)$. Здесь

$$g(x-c)=\frac{[A^2-(x-c)^2]^{{}^1/_2\gamma}}{(1+u)\,\{1-\varepsilon^2v^2(1+u)^2\,[A^2-(x+c)^2]^{1-\gamma-2\lambda}\}}$$

В качестве критерия существования, по крайней мере одного периодического решения уравнения (1.1) с заданными $p(x)$, $q(x)$, теорема А. В. Драгилева несравнима с теоремой 1.1, так как выполнение условий теоремы А. В. Драгилева проверить значительно легче, чем выполнение условий теоремы 1.1.

Однако теорема 1.1 при исследовании нелинейных автономных систем, описываемых уравнениями вида (1.1), позволяет даже при более общих условиях обосновать решение промежуточной задачи, когда задано уравнение фазовой траектории вида (1.6), а из него при помощи системы уравнений (1.2) определяются функции $p(x)$, $xq(x)$ и уравнение (1.1). В этом случае при выполнении условий (1.3), (1.4) одно частное периодическое решение полученного уравнения вида (1.1) очевидно легко определимо из равенств (1.5) и (1.7). Следует отметить, что, помимо указанного частного периодического решения, уравнение (1.1) может иметь и другие периодические решения, которые уже следует определять при помощи решения прямой задачи.

2. В реальных автоколебательных системах, описываемых уравнениями вида (1.1), функции $p(x)$ и $q(x)$ обычно удовлетворяют условиям

$$p(x), \quad xq(x) \quad \text{непрерывны}, \qquad q(x) > 0, \quad p(x) \neq 0 \tag{2.1}$$

В дальнейшем полагаем, что эти условия выполнены. Для исследования подобных систем введем вспомогательные функции $F(x)$, $H(x)$, связанные с первыми производными $x^\cdot$ равенствами

$$\sqrt{F(x)} = x^\cdot \quad \text{при } x^\cdot \geqslant 0, \qquad \sqrt{H(x)} = -x^\cdot \quad \text{при } x^\cdot \leqslant 0 \tag{2.2}$$

Отсюда имеем

$$x^{\cdot\cdot} = dF/dx \quad \text{при } x^\cdot \geqslant 0, \qquad x^{\cdot\cdot} = dH/dx \quad \text{при } x^\cdot < 0 \tag{2.3}$$

Используя (2.2) и (2.3) вместо уравнения (1.1) получим два уравнения

$$dF/dx = -2xq(x) - 2\sqrt{F(x)}\, p(x), \quad dH/dx = 2xq(x) + 2\sqrt{H(x)}\, p(x) \tag{2.4}$$

Все вещественные решения уравнений (2.4) положительны; согласно (2.1), правые части этих уравнений непрерывны и при $F(x)$, $H(x) > 0$ удовлетворяют условию Липшица. Поэтому, согласно (2.2) и (2.3), при выполнении (2.1) каждому периодическому решению $x(t+t_0)$ с экстремальными значениями $x = a, b$ соответствует одна пара определенных из (2.4) функций $f(x)$, $h(x)$, причем эти функции удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{ll} f(x), \quad h(x), \quad df/dx, \quad dh/dx & \text{непрерывны на } [a, b] \\ f(x)>0, \quad h(x) > 0 & \text{в } (a, b) \\ f(x)=0, \quad h(x) = 0, \quad df/dx \neq 0, \quad dh/dx \neq 0 & \text{при } x = a, b \end{array} \tag{2.5}$$

Согласно (1.5) и (2.2) функции $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ определяются из (1.2) так

$$\sqrt{\Phi(x)} = \frac{1}{2}[\sqrt{F(x)} + \sqrt{H(x)}], \qquad \Psi(x) = \frac{\sqrt{F(x)} - \sqrt{H(x)}}{2[\sqrt{F(x)} + \sqrt{H(x)}]^2} \tag{2.6}$$

Отсюда и из (2.5) легко видеть, что справедливы следующие теоремы:

Теорема 2. 1. При выполнении (2.1) каждому периодическому решению $x(t+t_0)$ уравнения (1.1) с экстремальными значениями $x = a, b$ соответствует одна пара определенных из (1.2) функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, причем эти функции непрерывны на $[a, b]$, имеют непрерывные первые производные по x и удовлетворяют условиям (1.3), (1.4).

Теорема (2.2). Любой паре определенных из (1.2) непрерывных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ с непрерывными первыми производными, удовлетворяющих в некотором промежутке $[a, b]$ условиям (1.3), (1.4), соответствует непрерывное периодическое решение уравнения (1.1) с непрерывными первой и второй производными по t и экстремальными значениями $x = a$, b.

Согласно теореме 2.2 при выполнении (2.1) функции φ, ψ из (1.2) и их первые производные по x, соответствующие периодическим решениям уравнения (1.1), допускают равномерное приближение целыми многочленами $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ по степеням x:

$$\varphi(x) \approx \varphi^\circ(x), \qquad \psi(x) \approx \psi^\circ(x)$$

Можно показать [1], что, согласно (1.3) и (1.4), многочлены, φ° и ψ° непременно удовлетворяют равенствам вида (1.11), в которых постоянные γ, λ равны нулю, а многочлены $u(x)$, $v(x)$ при выборе достаточно большой постоянной ε удовлетворяют условиям (1.9) в промежутке $[a, b]$. При этом равенства (1.10) принимают вид

$$\begin{aligned} p(x) &= \varepsilon^2(1+u)\{3(x-c)(1+u)v - [3uv' - v'(1+u)](b-x)(x-a)\} \\ xq(x) &= \varepsilon^2[(x-c)(1+u) - u'(b-x)(x-a)]\{1 - \varepsilon^2 v^2(1+u)^2[A^2-(x-c)^2]\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Уравнения фазовых траекторий периодических решений приводятся к виду

$$x^\cdot = \pm\varepsilon(1+u)\{1 \pm \varepsilon v(1+u)[A^2-(x-c)^2]^{1/2}\}[A^2-(x-c)^2]^{-1/2} \tag{2.8}$$

Периоды колебаний определяются из равенства вида (1.13), где функции $g(x-c)$ равны

$$g(x-c) = (1+u)^{-1}\{1 - \varepsilon^2 v^2(1+u)^2[A^2-(x-c)^2]\}^{-1}$$

Выше, в п. 1, была обоснована промежуточная постановка задачи для общего случая, когда функции $p(x)$, $xq(x)$ могли и не быть непрерывными.

Очевидно, что при постановке промежуточной задачи и требования непрерывности функций $p(x)$, $xq(x)$, функции $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ целесообразно задавать в виде выражений (1.11) при $\gamma = \lambda = 0$. В этом случае и определение функций $p(x)$, $q(x)$ из равенств вида (1.2), и определение периодического решения по заданному уравнению замкнутого цикла осуществляются сравнительно просто.

Промежуточная постановка задачи такого вида применима, например, при проектировании одноконтурных генераторов электромагнитных колебаний от квазилинейных до релаксационных, если эти системы описываются уравнениями, приводимыми к виду (1.1), в которых функции $p(x)$, и $xq(x)$ в подавляющем большинстве случаев удовлетворяют условиям (2.1).

В некоторых случаях при исследовании систем, описываемых уравнением вида (1.1), целесообразны постановка и решение смешанной задачи, когда заданы функции $p(x)$ и функции $\Phi(x)$ из (1.2). Частный случай такой задачи рассмотрен в [2].

В смешанной задаче, после решения системы (1.2) относительно $\Psi(x)$ получим

$$\Psi = \Phi^{-3/2}\int p(x)\sqrt{\Phi}\,dx, \qquad 2kq(x) + \left\{1-\left[\frac{1}{\Phi}\int p(x)\sqrt{\Phi}\,dx\right]^2\right\}\Phi' = 0 \tag{2.9}$$

Из второго уравнения легко определяется $xq(x)$.

Пример. Пусть

$$\begin{aligned} &p(x) = \alpha(1-x^2), \qquad \Phi = a^2(A^2-x^2)\left(1+\frac{2^2x^2}{48}-\frac{\alpha^2}{96}x^4\right) \\ &a^2 = \left(1-\frac{\alpha^2A^2}{24}\right)^{-1}, \qquad A^2 = 4\left(1+\frac{\alpha^2}{96}+\frac{7\alpha^4}{8\cdot 24\cdot 96}+\ldots\right)\approx 4\left(1+\frac{\alpha^2}{96}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Уравнение замкнутого цикла имеет вид

$$x = \pm a\sqrt{A^2-x^2}\left(1+\frac{\alpha^2x^2}{48}-\frac{\alpha^2x^4}{96}\right)\left[1\pm\frac{\alpha x}{4}\sqrt{A^2-x^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{96}+\frac{\alpha^2x^2}{3\cdot 96}-\frac{\alpha^2x^4}{2\cdot 96}\right)\right. \tag{2.11}$$

Решая уравнение вида (2.9), получим

$$q(x) = a^2[1-D(x)]$$

где $D(x)$ — четная аналитическая функция от x, при этом

$$D(0) = 0, \qquad |D(x)| < 0.02\,\alpha^4 \quad \text{при } \alpha < 1$$

По аналогии с примером, приведенным в работе [2], можно показать, что по крайней мере при $\alpha < 0.5$ полученное из (2.10) уравнение вида

$$x'' + a^2[1-D(x)]\,x = \alpha(1-x^2)\,x'$$

описывает, например, автогенератор с трансформаторной обратной связью при мягком режиме возбуждения с погрешностью того же порядка, что и уравнение Вандерполя.

В заключение отметим, что систему уравнений (1.2) или уравнение (2.9) можно использовать для определения всех функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т. е. для решения прямой задачи, по крайней мере, в случаях, когда заданные функции $p(x)$, $xq(x)$ удовлетворяют условиям (2.1). При этом, согласно теореме 2.1 можно утверждать, что ни одно периодическое решение уравнения (1.1) не буде утеряно.

Поступила 4 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Т. Ф. Определение периодических движений консервативных систем с одной степенью свободы. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, 2.
2. Иванов Т. Ф. О периодических движениях некоторых автономных систем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.