

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ВИБРОТРАНСПОРТИРОВКИ

В. А. Троицкий (Ленинград)

Приводятся результаты расчета оптимальных режимов вибротранспортировки для транспортеров с горизонтальным рабочим органом. Предполагается, что транспортирующая плоскость совершает колебания в направлении, составляющем с нею некоторый угол, или независимые колебания в горизонтальном и вертикальном направлениях. Исследованы режимы движения, не сопровождающиеся подбрасыванием транспортируемых частиц.

Простейшая задача такого типа изучалась в работе [1]. В ней считалось, что горизонтальная транспортирующая плоскость совершает колебания в горизонтальном направлении. Эта задача использовалась в качестве примера применения описанных в этой статье общих приемов исследования.

1. Постановка задачи. Здесь рассматриваются вибротранспортеры с горизонтальной транспортирующей плоскостью. Сначала предполагается, что эта плоскость совершает колебания заданного периода T_0 в направлении оси ξ , составляющей с нею угол β . Соответствующая расчетная схема изображена на фиг. 1. На ней показана также частица B , движение которой изучается в дальнейшем.

При определенных законах $\xi(t)$ движения плоскости A частица B перемещается по этой плоскости. Будут определяться те движения плоскости, которые сообщают максимум относительному перемещению частицы за период. Эти законы ищутся среди всех возможных движений плоскости заданного периода T_0 .

Уравнение движения частицы B без подбрасывания может быть представлено в виде [1,2]

$$m(\ddot{x} + \ddot{\xi} \cos \beta) = -fm(g + \ddot{\xi} \sin \beta) \operatorname{sign} \dot{x} \quad (1.1)$$

Здесь m — масса частицы, x — ее перемещение по плоскости, ξ — перемещение плоскости, f — коэффициент трения, g — ускорение силы тяжести.

Введем обозначения $\dot{x} = z$, $\dot{\xi} = u$. Тогда уравнение (1.1) переписется в форме

$$g^\pm = \dot{z}^\pm + u^\pm \cos \beta \pm f(g + u^\pm \sin \beta) = 0 \quad (1.2)$$

Верхний значок «плюс» и верхний знак перед последним слагаемым соответствуют случаю $\dot{x} = z > 0$. При $\dot{x} = z < 0$ следует брать нижние значки и знак.

На ускорение $\ddot{\xi} = u$ плоскости A в дальнейшем накладывается ограничения

$$|u^\pm| \leq U^* \quad (1.3)$$

Если оно отражает требование, чтобы частица не отрывалась от плоскости, то

$$U^* \sin \beta \leq g$$

При выполнении неравенства

$$U_1^* \leq u \leq U_2^* \quad \left(U_1^* = -\frac{fg}{\cos \beta + f \sin \beta}, \quad U_2^* = \frac{fg}{\cos \beta - f \sin \beta} \right) \quad (1.4)$$

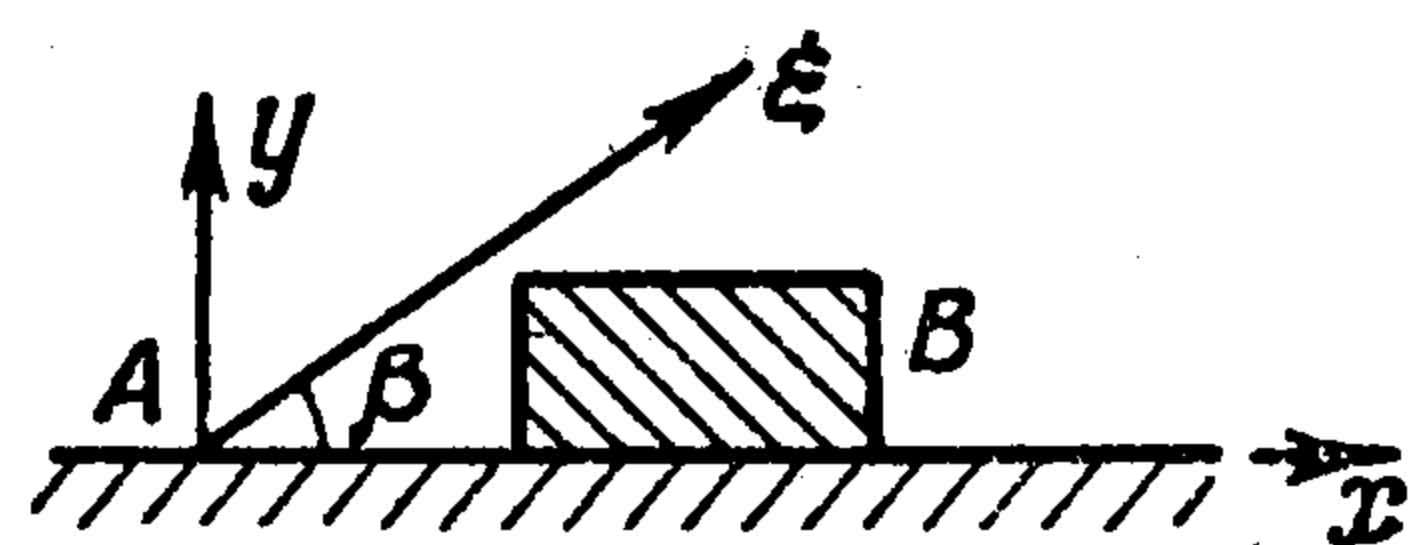
могут иметь место длительные остановки частицы на плоскости. При этом $z = 0$, и вместо уравнений (1.2) следует пользоваться соотношением

$$g^0 = \dot{z}^0 = 0 \quad (1.5)$$

Значком «нуль» отмечается остановка частицы.

В дальнейшем рассматриваются только установившиеся периодические движения частицы. Для них выполняются зависимости

$$\varphi_z = z(T) - z_0(t_0) = 0, \quad \varphi_T = T - t_0 - T_0 = 0 \quad (1.6)$$



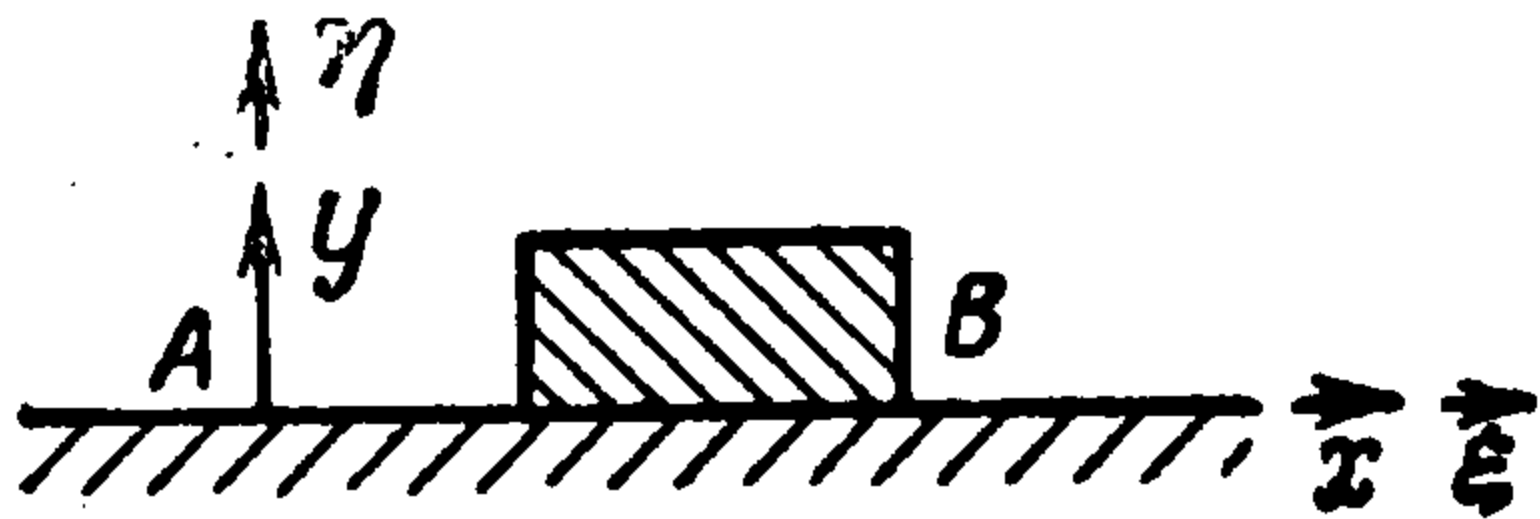
Фиг. 1

Условие периодичности функции $\xi(t)$ приводит к равенству

$$\Phi_{u^*} = \int_{t_0}^T u(t) dt = 0 \quad (1.7)$$

Задачу оптимизации процесса вибротранспортировки можно сформулировать следующим образом.

Среди непрерывных функций $z(t)$ и кусочно-непрерывных ускорений $u(t)$, удовлетворяющих в интервале заданной длины $t_0 \leq t \leq T$ уравнению (1.2) и неравенству (1.3) или уравнению (1.5) и неравенству (1.4), а на концах его — соотношениям (1.6) и (1.7), найти такие, которые сообщают минимальное значение функционалу



$$I = - \int_{t_0}^T z(t) dt \quad (1.8)$$

Фиг. 2

Здесь она будет называться первой задачей оптимизации режимов работы вибротранспортеров.

Второй задаче соответствует расчетная схема, показанная на фиг. 2. Транспортирующая плоскость A в ней совершает независимые колебания в горизонтальном (ξ) и вертикальном (η) направлениях. Среди всех периодических функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ заданного периода T_0 нужно выбрать такие, которые сообщают максимум перемещению частицы за период T_0 .

Уравнение движения частицы B без подбрасывания в этом случае можно представить в виде

$$g^\pm = \ddot{z}^\pm + u_\xi^\pm \pm f(g + u_\eta^\pm) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь $u_\xi = \ddot{\xi}$, $u_\eta = \ddot{\eta}$, а правило выбора значков и знака перед последним слагаемым совпадает с описанным выше. На ускорения $\ddot{\xi}$ и $\ddot{\eta}$ накладываются ограничения

$$|u_\xi^\pm| \leq U_\xi^*, \quad |u_\eta^\pm| \leq U_\eta^* \leq g \quad (1.10)$$

При выполнении неравенства

$$|u_\xi| \leq f(g + u_\eta) \quad (1.11)$$

опять могут иметь место длительные остановки частицы на плоскости. Для них справедливо уравнение (1.5).

Условие периодичности функции $z(t)$ имеет вид (1.6). Сохранит свою силу и второе равенство (1.6). Периодичность функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ отражается соотношениями

$$\Phi_\xi^* = \int_{t_0}^T u_\xi(t) dt = 0, \quad \Phi_\eta^* = \int_{t_0}^T u_\eta(t) dt = 0 \quad (1.12)$$

Вторая из изучаемых здесь задач оптимизации процесса вибротранспортировки сформулируется следующим образом.

Среди непрерывных функций $z(t)$ и кусочно-непрерывных ускорений $u_\xi(t)$ и $u_\eta(t)$, удовлетворяющих в интервале $t_0 \leq t \leq T$ заданной длины $T - t_0 = T_0$ уравнению (1.9) и неравенствам (1.10) или уравнению (1.5), неравенству (1.11) и первому неравенству (1.10), а на концах его — соотношениям (1.6) и (1.12), найти такие, которые сообщают функционалу (1.8) минимальное значение.

Неравенствами (1.3), (1.4) или (1.10), (1.11) определяются замкнутые области допустимых изменений параметров u и u_ξ , u_η . Переход к открытым областям осуществляется путем введения дополнительных параметров v и v_ξ , v_η и построения вспомогательных зависимостей

$$\Psi^\pm = (u^\pm)^2 + (v^\pm)^2 - (U^*)^2 = 0 \quad (1.13)$$

$$\Psi^0 = [(u^0 - U_1^*)(U_2^* - u^0) - (v^0)^2] = 0$$

для неравенств (1.3) и (1.4) или соотношений

$$\begin{aligned}\Psi_{\xi}^{\pm} &= (u_{\xi}^{\pm})^2 + (v_{\xi}^{\pm})^2 - (U_{\xi}^*)^2 = 0, & \Psi_{\eta}^{\pm} &= (u_{\eta}^{\pm})^2 + (v_{\eta}^{\pm})^2 - (U_{\eta}^*)^2 = 0 \\ \Psi_{\xi}^0 &= [u_{\xi}^0 + f(g \mp u_{\eta}^0)] [f(g \mp u_{\eta}^0) - u_{\xi}^0] - (v_{\xi}^0)^2 = 0 & (1.14) \\ \Psi_{\eta}^0 &= (u_{\eta}^0)^2 + (v_{\eta}^0)^2 - (U_{\eta}^*)^2 = 0\end{aligned}$$

для неравенств (1.10) и (1.11). Заменяя в описанных выше формулировках требование выполнения неравенств (1.3) и (1.4) или (1.10) и (1.11) этими уравнениями (1.13) или (1.14), приведем их к виду, рассмотрение которого проводилось в статье [1].

Отличие этих постановок состоит в том, что в изучаемых здесь задачах имеется два разрыва непрерывности правых частей уравнений движения. Соответствующие этому случаю уравнения и соотношения получаются из установленных в работе [1] надлежащей заменой значков. Для решаемых здесь конкретных задач оптимизации вибротранспортировки они приводятся ниже.

2. Построение оптимального режима. *Первая задача.* Следуя результатам работы [1], составляем функции H и φ

$$H^{\pm} = z^{\pm} + \lambda^{\pm} [\mp fg - u^{\pm} (\cos \beta \pm f \sin \beta)] + \rho u^{\pm} + \mu^{\pm} [(u^{\pm})^2 + (v^{\pm})^2 - (U^*)^2] \quad (2.1)$$

$$H^0 = \rho u^0 + \mu^0 [(u^0 - U_1^*) (U_2^* - u^0) - (v^0)^2] \quad (2.2)$$

$$\varphi = \rho_z [z(T) - z(t_0)] + \rho_T (T - t_0 - T_0) \quad (2.3)$$

При помощи их строим уравнения

$$\dot{\lambda}^{\pm} = -1, \quad \rho + 2\mu^{\pm} u^{\pm} - \lambda^{\pm} (\cos \beta \pm f \sin \beta) = 0, \quad 2\mu^{\pm} v^{\pm} = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{\lambda}^0 = 0, \quad \rho + \mu^0 (2u^0 - U_1^* - U_2^*) = 0, \quad 2\mu^0 v^0 = 0 \quad (2.5)$$

и конечные условия

$$\lambda(t_0) = \lambda(T) = \rho_z, \quad (H)_{t_0} = (H)_T = \rho_T \quad (2.6)$$

Условия Эрдманна — Вейерштрасса представляются равенствами

$$\begin{aligned}\lambda^-(t^*) - \lambda^+(t^*) &= 0, & (H^-)_{t^*} - (H^+)_{t^*} &= 0 \\ \lambda^{\pm}(t') - \lambda^{\mp}(t') + v_{\pm} &= 0, & (H^{\pm})_{t'} - (H^{\mp})_{t'} &= 0 \\ \lambda^{\pm}(t') - \lambda^0(t') + v_{\pm}' &= 0, & (H^{\pm})_{t'} - (H^0)_{t'} &= 0 \\ \lambda^0(t'') - \lambda^{\pm}(t'') + v_{\pm}'' &= 0, & (H^0)_{t''} - (H^{\pm})_{t''} &= 0\end{aligned} \quad (2.7)$$

Первая пара их выполняется в точке $t = t^*$ разрыва непрерывности параметров u и v . Остальные соответствуют моментам различных разрывов правых частей уравнений движения [1]. Кроме этих уравнений и соотношений для оптимальных режимов справедливы неравенства

$$\eta^{\pm} u^{\pm} \geq \eta^{\pm} U^{\pm}, \quad \eta^0 u^0 \geq \eta^0 U^0 \quad (2.8)$$

в которых u^{\pm} и u^0 отвечают оптимальному режиму, а U^{\pm} и U^0 — любые допустимые функции, и введены обозначения

$$\eta^{\pm} = \rho - \lambda^{\pm} (\cos \beta \pm f \sin \beta), \quad \eta^0 = \rho \quad (2.9)$$

Эти неравенства доставляются необходимым условием Вейерштрасса.

Отметим еще, что в задаче имеет место первый интеграл

$$H = \rho_T \quad (2.10)$$

составленный так, чтобы удовлетворялись условия (2.6) и (2.7).

Соотношения (2.4) и (2.6) показывают, что в оптимальных режимах может выполняться одна из следующих систем зависимостей:

$$1) \eta \neq 0, v = 0; 2) \eta = 0, v = 0; 3) \eta = 0, v = 0$$

Для первой из них при помощи неравенств (2.8) найдем

$$u^{\pm} = \begin{cases} U^* & (\eta^{\pm} > 0), \\ -U^* & (\eta^{\pm} < 0), \end{cases} \quad u^0 = \begin{cases} U_1^* & (\eta^0 = \rho < 0) \\ U_2^* & (\eta^0 = \rho > 0) \end{cases} \quad (2.11)$$

Условие периодичности (1.7) показывает, что в оптимальном режиме должно быть не меньше двух смен знака параметра $u(t)$ за период. Дальнейший анализ позволяет убедиться, что этому режиму соответствуют функции $\lambda(t)$, имеющие в интервале $t_0 \leq t \leq T$ разрывы непрерывности. Непосредственная проверка режимов движения без длительных остановок частицы на выполнение неравенств (2.8) дает возможность установить, что оптимальным режимам соответствуют движения с длительными остановками. Для режимов без остановок не выполняется первое неравенство (2.8).

При построении оптимального режима будем для определенности полагать, что $z(t_0) = 0$. Тогда при $t = t_0$ имеет место разрыв непрерывности правых частей уравнений движения и разрыв множителя $\lambda(t)$. В следующем за этой точкой подинтервале $t_0 < t < t_1'$ функции $\lambda(t)$ и $\eta(t)$ непрерывны и представляются соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda^+(t) &= \rho_z - (t - t_0), & \lambda^-(t) &= \rho_z + (T_0 + t_0 - t) \\ \eta^+ &= \rho - \rho_z (\cos \beta + f \sin \beta) + (\cos \beta + f \sin \beta) (t - t_0) \\ \eta^- &= \rho - \rho_z (\cos \beta - f \sin \beta) + (\cos \beta - f \sin \beta) (t - t_0 - T_0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

выписанными для обоих случаев $z > 0$ и $z < 0$.

При выполнении неравенства $\cos \beta - f \sin \beta > 0$ функция $\eta(t)$ возрастает вместе с t . Поэтому $\eta(t_0 + 0) < 0$ и $u(t_0 + 0) = -U^*$. Тогда $z(t_0 + 0) > 0$, и всем переменным задачи нужно приписать значок «плюс».

В некоторый момент времени $t = t_1^*$ функция $\eta^+(t)$ обратится в нуль и затем станет положительной. Поэтому $u^+(t_1^* + 0) > 0$. В подинтервале $t_1^* < t < t_1'$ скорость $z(t)$ останется положительной и при $t = t_1'$ становится равной нулю. Длины упоминавшихся здесь подинтервалов времени связаны зависимостью

$$\frac{t_1' - t_0}{t_1^* - t_0} = \frac{2U^* (\cos \beta + f \sin \beta)}{fg + U^* (\cos \beta + f \sin \beta)} \leq 2$$

Из нее следует неравенство

$$t_1' - t_1^* < t_1^* - t_0 \quad (2.13)$$

Предположение, что в подинтервале $t_1' < t < t_0 + T_0$ частица продолжает двигаться, приводит к режиму без остановок частицы. Среди них нет оптимальных. Поэтому считаем, что в этом подинтервале частица B неподвижна. Тогда соотношения (2.2) и (2.10) дают $\rho u^0 = \rho_T$, так что параметр u^0 не меняет знака. На основании зависимостей (2.11) имеем $u^0 = U_1^*$ или $u^0 = U_2^*$. Условие периодичности (1.7) принимает вид

$$-U^* (t_1^* - t_0) + U^* (t_1' - t_1^*) + u^0 (t_0 + T_0 - t_1') = 0$$

Отсюда при помощи неравенства (2.13) получим

$$\begin{aligned} u^0 (t_0 + T_0 - t_1') &= U^* (t_1^* - t_0) - U^* (t_1' - t_1^*) > 0 \\ u^0 &= U_2^* \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, оптимальный режим работы вибротранспортера характеризуется следующими значениями ускорения транспортирующей плоскости:

$$u(t) = \begin{cases} -U^* & (t_0 < t < t_1^*), \\ U^* & (t_1^* < t < t_1'), \\ U_2^* & (t_1' < t < t_0 + T_0), \end{cases} \quad \begin{aligned} t_1^* &= t_0 + \frac{U_2^* fg + U^* (\cos \beta + f \sin \beta)}{2U^* fg + U_2^* (\cos \beta + f \sin \beta)} T_0 \\ t_1' &= t_0 + \frac{U_2^* (\cos \beta + f \sin \beta)}{fg + U_2^* (\cos \beta + f \sin \beta)} T_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для перемещения частицы за период может быть построено следующее выражение

$$-I = \frac{T_0^2 (\cos \beta + f \sin \beta)}{16U^* \cos^2 \beta} [(U^*)^2 (\cos \beta + f \sin \beta) - (fg)^2]$$

На фиг. 3 показаны оптимальные функции $z(t)$ и $u(t)$ при значениях

$$\beta = 30^\circ, \quad U^* = 2fg, \quad f = 0.5$$

3. Построение оптимального режима. Вторая задача. Составляем функции H и φ

$$H^\pm = z^\pm + \lambda^\pm [-u_\xi^\pm \mp f(g + u_\eta^\pm)] + \rho_\xi u_\xi^\pm + \rho_\eta u_\eta^\pm + \mu_\xi^\pm [(u_\xi^\pm)^2 + (v_\xi^\pm)^2 - (U_\xi^*)^2] + \mu_\eta^\pm [(u_\eta^\pm)^2 + (v_\eta^\pm)^2 - (U_\eta^*)^2] \quad (3.1)$$

$$H^0 = \rho_\xi u_\xi^0 + \rho_\eta u_\eta^0 + \mu_\eta^0 [(u_\eta^0)^2 + (v_\eta^0)^2 - (U_\eta^*)^2] + \mu_\xi^0 \{ [u_\xi^0 + f(g + u_\eta^0)] [f(g + u_\eta^0) - u_\xi^0] - (v_\xi^0)^2 \} \quad (3.2)$$

$$\varphi = \rho_z [z(T) - z(t_0)] + \rho_T (T - t_0 - T_0) \quad (3.3)$$

При помощи их строим уравнения

$$\dot{\lambda}^\pm = -1, \quad -\lambda^\pm + \rho_\xi + 2\mu_\xi^\pm u_\xi^\pm = 0, \quad \mp \lambda^\pm f + \rho_\eta + 2\mu_\eta^\pm u_\eta^\pm = 0 \quad (3.4)$$

$$\mu_\xi^\pm v_\xi^\pm = 0, \quad \mu_\eta^\pm v_\eta^\pm = 0$$

$$\dot{\lambda}^0 = 0, \quad \rho_\xi - 2\mu_\xi^0 u_\xi^0 = 0, \quad \rho_\eta + 2f(g + u_\eta^0) + 2\mu_\eta^0 u_\eta^0 = 0 \quad (3.5)$$

$$\mu_\xi^0 v_\xi^0 = 0, \quad \mu_\eta^0 v_\eta^0 = 0$$

и конечные условия (2.6). Условия Эрдманна — Вейерштрасса имеют вид (2.7). В задаче имеется первый интеграл (2.10).

Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала I добавляет к перечисленным выше соотношениям следующие неравенства:

$$\eta_\xi^\pm u_\xi^\pm + \eta_\eta^\pm u_\eta^\pm \geq \eta_\xi^\pm U_\xi^\pm + \eta_\eta^\pm U_\eta^\pm \quad (3.6)$$

$$\eta_\xi^0 u_\xi^0 + \eta_\eta^0 u_\eta^0 \geq \eta_\xi^0 U_\xi^0 + \eta_\eta^0 U_\eta^0$$

В них обозначено

$$\eta_\xi^\pm = \rho_\xi - \lambda^\pm, \quad \eta_\xi^0 = \rho_\xi \quad (3.7)$$

$$\eta_\eta^\pm = \rho_\mu \pm f\lambda^\pm, \quad \eta_\eta^0 = \rho_\eta$$

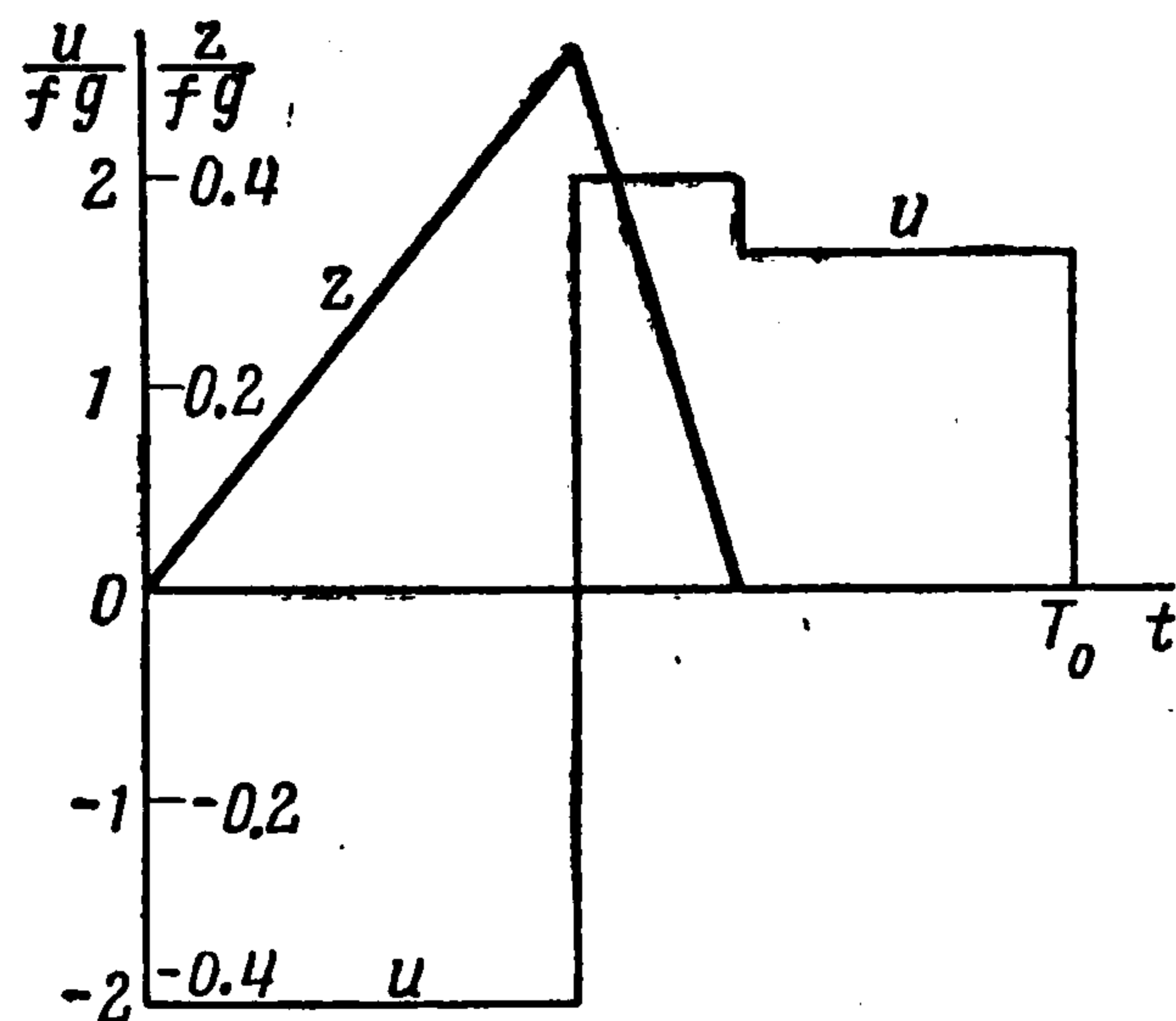
и под u_ξ и u_η понимаются оптимальные законы изменения ускорений, а под U_ξ и U_η — любые допустимые функции.

Функции $U_\xi = u_\xi$ и $U_\eta = u_\eta$ являются допустимыми. Положив $U_\eta^\pm = u_\eta^\pm$ в неравенстве (3.6), найдем $\eta_\xi^\pm u_\xi^\pm \geq \eta_\xi^\pm U_\xi^\pm$. Аналогичным способом строятся неравенства $\eta_\eta^\pm u_\eta^\pm \geq \eta_\eta^\pm U_\eta^\pm$, $\eta_\xi^0 u_\xi^0 \geq \eta_\xi^0 U_\xi^0$, $\eta_\eta^0 u_\eta^0 \geq \eta_\eta^0 U_\eta^0$. На основании их получим следующие результаты:

$$u_\xi^\pm = \begin{cases} U_\xi^* (\eta_\xi^\pm > 0), \\ -U_\xi^* (\eta_\xi^\pm < 0), \end{cases} \quad u_\eta^\pm = \begin{cases} U_\eta^* (\eta_\eta^\pm > 0) \\ -U_\eta^* (\eta_\eta^\pm < 0) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$u_\xi^0 = \begin{cases} f(g + u_\eta^0) (\eta_\xi^0 > 0), \\ -f(g + u_\eta^0) (\eta_\xi^0 < 0), \end{cases} \quad u_\eta^0 = \begin{cases} U_\eta^* (\eta_\eta^0 > 0) \\ -U_\eta^* (\eta_\eta^0 < 0) \end{cases}$$

Множитель $\lambda^\pm(t)$ при движении частицы имеет вид $\lambda = C - t$, где C — постоянная интегрирования. Тогда η_ξ^\pm и η_η^\pm могут обратиться в нуль в конечном числе точек



Фиг. 3

интервала $t_0 \leq t \leq T$. При остановке частицы при $\rho_\xi \neq 0$ и $\rho_\eta \neq 0$ величины η_ξ и η_η^0 также отличны от нуля. Следовательно, в этом случае u_ξ и u_η принимают только граничные значения, даваемые соотношениями (3.8).

Оптимальные режимы во второй задаче опять нужно искать среди режимов, которым отвечают движения частицы с длительными остановками. В таких режимах обязательно найдется принадлежащая интервалу $t_0 \leq t \leq T$ точка $t = t'$, в которой $z(t') = 0$ и $z(t' \pm 0) > 0$. В противном случае найденный выше режим ($u_\eta = 0$) не был бы оптимальным.

Выберем абсциссу $t = t_0$ левого конца интервала $t_0 \leq t \leq T$ так, чтобы выполнялись равенство $z(t_0) = 0$ и неравенство $z(t_0 \pm 0) > 0$. Рассмотрим подинтервал $t_0 \leq t \leq t_1^*$. Для него имеем $\lambda^+ = \rho_z - t$ и $\eta_\xi^+ = \rho_\xi - \rho_z \mp t$, $\eta_\eta^+ = \rho_\eta - f\rho_z \mp ft$, так что функции η_ξ и η_η будут возрастающими функциями времени.

Считаем, что $U_\xi^* > f(g \mp U_\eta^*)$. Тогда $\eta^+(t_0 \pm 0) < 0$, так что $u_\xi^+(t_0 \pm 0) = -U_\xi^* < 0$. В этом случае существуют постоянные ρ_ξ и ρ_z такие, что в некоторый момент времени $t = t_1^*$ выполняется равенство $\eta^+(t_1^*) = 0$, причем $\eta^+(t_1^* \pm 0) > 0$ и $u_\xi(t_1^* \pm 0) = U_\xi^* > 0$. Обратившись к уравнению (1.9), найдем $z(t_1^* \pm 0) < 0$. Относительная скорость частицы $z(t)$ убывает и при $t = t_1'$ обращается в нуль.

В подинтервале $t_0 < t < t_1'$ скорость $z(t)$ положительна. Поэтому в этом подинтервале функция η_η^\pm непрерывна. Следовательно, ускорение u_η^+ принимает одно из своих граничных значений $u_\eta^+ = \pm U_\eta^*$. Разрыв непрерывности u_η^+ может иметь место в точке $t = t_2^*$, в которой $\eta_\eta^+(t_2^*) = 0$. Если $t_1' - t_0 \geq 1/2 T_0$, то такая точка обязательно попадет внутрь подинтервала $t_0 < t < t_1'$, ибо в противном случае нарушится второе условие периодичности (1.12). Тогда $\eta_\eta^+(t_0 \pm 0) < 0$ и $u_\eta^+(t_0 \pm 0) = -U_\eta^* < 0$, причем $u_\eta^+(t) = -U_\eta^*$ в подинтервале $t_0 < t < t_2^*$.

Рассмотрим подинтервал $t_1' < t < T$. Считаем, что в нем частица неподвижна относительно транспортирующей плоскости. Тогда на основании соотношений (3.2) и $H = \rho_T$ будем иметь $\rho_\xi u_\xi^0 \mp \rho_\eta u_\eta^0 = \rho_T$, так что u_ξ^0 и u_η^0 непрерывны и имеют в этом подинтервале значения (3.8), определяемые знаками постоянных ρ_ξ и ρ_η .

Таким образом, разрывы непрерывности ускорения $u_\xi(t)$ могут иметь место в точках $t = t_0$, $t = t_1^*$ и $t = t_1'$; причем $u_\xi(t_0 \pm 0) = -U_\xi^*$. Аналогично этому вертикальное ускорение $u_\eta(t)$ может иметь разрывы непрерывности в точках $t = t_0$, $t = t_2^*$ и $t = t_1'$. В подинтервале $t_0 < t < t_2^*$ оно имеет значение $u_\eta = -U_\eta^*$.

Остановимся сначала на случае $t_2^* > t_1^*$. Проинтегрировав уравнение (1.9), получим

$$\begin{aligned} z^+(t) &= [U_\xi^* - f(g - U_\eta^*)](t - t_0) & (t_0 \leq t \leq t_1^*) \\ z^+(t) &= [-U_\xi^* - f(g - U_\eta^*)](t - t_0) + 2U_\xi^*(t_1^* - t_0) & (t_1^* \leq t \leq t_2^*) \\ z^+(t) &= -[U_\xi^* + f(g + U_\eta^*)](t - t_0) \mp 2fU_\eta^*(t_2^* - t_0) \mp 2U_\xi^*(t_1^* - t_0) & (t_2^* \leq t \leq t_1') \end{aligned}$$

Последнее из этих выражений при $t = t_1'$ дает

$$z^+(t_1') = -[U_\xi^* + f(g + U_\eta^*)](t_1' - t_0) + 2fU_\eta^*(t_2^* - t_0) + 2U_\xi^*(t_1^* - t_0) \quad (3.9)$$

Составляем условия периодичности. Предположим пока, что $t_1' - t_1^* > t_1^* - t_0$. Тогда первое условие (1.12) примет вид

$$-U_\xi^*(t_1^* - t_0) \mp U_\xi^*(t_1' - t_1^*) + f(g + u_\eta^0)(T - t_1') = 0$$

Аналогично считаем, что $t_2^* = t_0 + 1/2 T_0$. Тогда второе равенство (1.12) тождественно удовлетворится, причем составленное только что условие переписывается в форме

$$-U_\xi^*(t_1^* - t_0) \mp U_\xi^*(t_1' - t_1^*) + f(g + U_\eta^*)(T - t_1') = 0$$

Оно легко преобразуется к виду

$$-2U_\xi^*(t_1^* - t_0) + [U_\xi^* - f(g + U_\eta^*)](t_1' - t_0) + f(g + U_\eta^*)T_0 = 0 \quad (3.10)$$

Решением уравнений (3.9) и (3.10) при $t_2^* = t_0 + 1/2T_0$ будут выражения

$$t_1' = t_0 + \frac{T_0 g + 2U_\eta^*}{2g + U_\eta^*}, \quad t_1^* = t_0 + \frac{T_0}{4} \left[\frac{g + 2U_\eta^*}{g + U_\eta^*} + \frac{fg}{U_\xi^*} \right] \quad (3.11)$$

Нетрудно усмотреть, что при $U_\xi^* > f(g + U_\eta^*)$ для найденных величин выполняются неравенства

$$1/4T_0 < t_1^* - t_0 < 1/2T_0, \quad t_1' - t_0 > 1/2T_0 \quad (3.12)$$

показывающие, что построенный оптимальный режим существует.

Сохранив соотношение $t_2^* > t_1^*$ и предположив, что $t_1' = t_2^* - 1/2T_0$, придем к отрицательным значениям для $t_1^* - t_0$ и $t_2^* - t_0$. Такой режим не может иметь место. Отрицательные значения для $t_1^* - t_0$ и $t_2^* - t_0$ получаются в случае, когда $t_2^* < t_1^*$ и $t_1' - t_2^* = 1/2T_0$, так что этот режим также не существует. Наконец, при $t_2^* < t_1^*$ и $t_2^* - t_0 = 1/2T_0$ длины подинтервалов $t_1^* - t_0$ и $t_1' - t_0$ определяются формулами (3.11), которые, как показывают неравенства (3.12), противоречат исходным предположениям. Такой режим не может существовать.

Таким образом, в оптимальном режиме работы вибротранспортера при независимых колебаниях транспортирующей плоскости в вертикальном и горизонтальном направлениях ускорения u_ξ и u_η определяются зависимостями

$$u_\xi = \begin{cases} -U_\xi^* & (t_0 < t < t_1^*), \\ U_\xi^* & (t_1^* < t < t_1'), \\ f(g + U_\eta^*) & (t_1' < t < t_0 + T_0), \end{cases} \quad u_\eta = \begin{cases} -U_\eta^* & (t_0 < t < t_2^*) \\ U_\eta^* & (t_2^* < t < t_0 + T_0) \end{cases} \quad (3.13)$$

Входящие в них величины t_1^* и t_1' даются выражениями (3.11) и $t_2^* = t_0 + 1/2T_0$. Для перемещения частицы за период может быть получена формула

$$-I = \frac{T_0^2}{16U_\xi^*} \left\{ (U_\xi^*)^2 \left(1 + \frac{U_\xi^*}{g + U_\eta^*} \right)^2 - (fg)^2 + \frac{4fU_\xi^* (U_\eta^*)^2}{g + U_\eta^*} \right\} \quad (3.14)$$

Рассмотрим теперь три оптимальных режима работы вибротранспортера с горизонтальным рабочим органом. Будем считать, что ускорение U^* плоскости в первом из них горизонтально, во втором наклонено к плоскости под углом $\beta = 30^\circ$, в третьем имеются горизонтальное и вертикальное независимые ускорения $U_\xi^* = U^* \cos \beta$ и $U_\eta^* = U^* \sin \beta$. При расчете используем следующие значения: $U^* = 3.6fg$, $f = 0.5$. Тогда будем иметь $U_\xi^* = 3.12fg$, $U_\eta^* = 1.8fg$.

В первом режиме перемещение частицы за период равно $-I = 0.208 fgT_0^2$. Во втором оно имеет значение $-I = 0.418fgT_0^2$. И, наконец, в третьем дается равенством $-I = 0.550 fgT_0^2$.

Сопоставление этих величин дает возможность установить значительное увеличение перемещения при появлении вертикальной составляющей ускорения. Особенно заметно влияние этой составляющей сказывается при независимом изменении вертикального и горизонтального ускорений.

Отметим, что аналогичные задачи рассмотрены Н. Г. Копыловым [3]. Оптимальные параметры двугармонических режимов определялись в работе [4].

Поступила 18 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2, 233—246.
2. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Нелинейные задачи теории вибротранспорта и виброразделения. Международный союз по теоретической и прикладной механике. Симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев, 1961.
3. Копылов Н. Г. Теория качающихся конвейеров. Машгиз, 1936.
4. Аграновская Э. А., Блехман И. И. Выбор оптимальных параметров транспортирующих машин с помощью электронной моделирующей установки. Обогащение руд, 1962, № 5, 40—44.