ОБ ОДНОМ ТИПЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В. А. Космодемьянский (Москва)

В работе рассматривается один класс задач вариационного исчисления и дается приложение развитой теории к расчету ступенчатых ракет.

В отличие от большого числа исследований [1–3] функции управления $u_j(t)$ предполагаются известными разрывными функциями времени.

Ставится задача типа задачи Больца — Майера в вариационном исчислении и выводятся необходимые условия (условия стационарности) для определения точек разрыва t_i функций управления $u_j(t)$ с тем, чтобы достичь экстремума некоторых функционалов.

1. Процесс, происходящий в некоторой динамической системе, описывается n обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$g_s = \dot{x}_s - f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0, \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

и системой конечных зависимостей

$$\psi_k = \psi_k(u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r < m) \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1), (1.2) $x_s(t)$ — координаты, определяющие положение динамической системы, а $u_j(t)$ — разрывные функции управления, $m - r$, из которых (пусть $u_1, \ldots, u_{m-r}$) заданы в виде явных зависимостей от времени.

В начальный момент времени $t = t_0$ положение системы определено значениями координат

$$x_s(t_0) = x_s^\circ \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

и значениями функций управления

$$u_j(t_0) = u_j^\circ \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

Координаты системы в момент $t = T$ связаны равенствами

$$\Phi_l = \Phi_l[x_s(T), T] = 0, \quad (l = 1, \ldots, p < n) \tag{1.5}$$

Следует определить моменты времени t_i, выбор которых доставит экстремум некоторому функционалу

$$J = J[x_s(T), T] \tag{1.6}$$

при выполнении равенств (1.1) — (1.5).

2. Образуем, как обычно [1, 3], вспомогательный функционал

$$I = J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l + \int_{t_0}^{T} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k \right\} dt \tag{2.1}$$

В выражении (2.1) $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$, ρ_l — неопределенные множители Лагранжа. Так как правая часть функционала I слагаемыми равными 0 отличается от J, условия экстремума функционалов I и J совпадают.

При вычислении вариации от правой части уравнения (2.1) предположим, что в рассматриваемом интервале времени (t_0, T) существуют две точки t_1, t_2, в которых функции управления $u_j(t)$ терпят разрыв

$$t_0 < t_1 < t_2 < T$$

Значение функций, введенных выше и рассматриваемых в интервале (t_0, t_1) обозначим индексом 1 (например, $x_s^{(1)}(t)$, $u_j^{(1)}(t)$), в интервале (t_1, t_2) — индексом 2 (например, $x_s^{(2)}(t)$, $u_j^{(2)}(t)$), в интервале (t_2, T) — индексом 3.

Тогда вариация от выражения (2.1) может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta I = \Delta J + \Delta \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l + \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(1)} g_s^{(1)} + \sum_{n=1}^{r} \mu_k^{(1)} \psi_k^{(1)} \right\} dt +$$

$$+ \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(2)} g_s^{(2)} + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^{(2)} \psi_k^{(2)} \right\} dt + \delta \int_{t_2}^{T} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(3)} g_s^{(3)} + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^{(3)} \psi_k^{(3)} \right\} dt \tag{2.2}$$

Наличие разрывов в функциях управления заставляет рассматривать изменение точек разрыва t_i ($i=1, 2$) при вычислении соответствующей вариации функционала ΔI.

Если конечное время не фиксировано (T свободно), то между «вариацией конца» $\Delta x_s^{(3)}(T)$ и «вариацией на конце» $\delta x_s^{(3)}(T)$ существует зависимость

$$\Delta x_s^{(3)}(T) = \delta x_s^{(3)}(T) + \dot{x}_s^{(3)}(T)\,\delta T \tag{2.3}$$

Вариация ΔJ может быть представлена в виде

$$\Delta J = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s^{(3)}(T)}\,\delta x_s^{(3)}(T) + \left[\frac{\partial J}{\partial T} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s^{(3)}(T)}\,\dot{x}_s^{(3)}(T)\right]\delta T \tag{2.4}$$

Для вариации от $\rho_1\Phi_1 + \ldots + \rho_p\Phi_p$ получится аналогичное равенство.

Поскольку начальные данные, определяющие положение динамической системы, известны ((1.3) — (1.4)) и функции управления также определены на отрезке (t_0, t_1) по постановке задачи, зависимости $x_s^{(1)}(t)$ от времени могут быть определены из решений соответствующей системы уравнений, и, следовательно, вариация от первого интеграла в выражении (2.2) равна 0. По этой же причине

$$\delta x_s^{(1)}(t_1) = 0 \tag{2.5}$$

т. е. «вариация конца» левой траектории может получать приращение вдоль этой траектории и, следовательно, равенство, подобное равенству (2.3), имеет вид

$$\Delta x_s^{(1)}(t_1) = \dot{x}_s^{(1)}(t_1)\,\delta t_1 \tag{2.6}$$

Значения «вариации на конце» $\delta x_s^{(2)}(t_1)$ и «вариации конца» $\Delta x_s^{(2)}(t_1)$ промежуточной траектории связаны равенством

$$\Delta x_s^{(2)}(t_1) = \delta x_s^{(2)}(t_1) + \dot{x}_s^{(2)}(t_1)\,\delta t_1 \tag{2.7}$$

Вследствие непрерывности траектории $x_s(t)$ в точках разрыва управления $u_j(t)$ имеем

$$\Delta x_s^{(1)}(t_1) = \Delta x_s^{(2)}(t_1) = \Delta x_s(t_1) \tag{2.8}$$

Из равенства (2.6) — (2.8) следует

$$\delta x_s^{(2)}(t_1) = [\dot{x}_s^{(1)}(t_1) - \dot{x}_s^{(2)}(t_1)]\,\delta t_1 \tag{2.9}$$

Для вариации правой кривой $x_s^{(3)}(t)$ в точке t_2 находим

$$\delta x_s^{(3)}(t_2) = \delta x_s^{(2)}(t_2) + [\dot{x}_s^{(2)}(t_2) - \dot{x}_s^{(3)}(t_2)]\,\delta t_2 \tag{2.10}$$

Принимая во внимание равенства (2.3) — (2.10), вариацию от функционала ΔI можно преобразовать к следующему виду

$$\Delta I = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s^{(3)}(T)}\,\delta x_s^{(3)}(T) + \left[\frac{\partial J}{\partial T} + \sum \frac{\partial J}{\partial x_s^{(3)}(T)}\,\dot{x}_s^{(3)}(T)\right]\delta T +$$

$$+ \Delta \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l - \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(2)}(t_1)\,(\dot{x}_s^{(1)}(t_1) - \dot{x}_s^{(2)}(t_1))\right]\delta t_1 + \Sigma \lambda_s^{(3)}(T)\,\delta x_s^{(3)}(T) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s^{(2)}(t_2) - \lambda_s^{(3)}(t_2)]\,\delta x_s^{(2)}(t_2) - \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(3)}(t_2)\,(\dot{x}_s^{(2)}(t_2) - \dot{x}_s^{(3)}(t_2))\right]\delta t_2 +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{\sum_{s=1}^{n} \delta\lambda_s^{(2)}[\dot{x}_s^{(2)} - f_s(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_m^{(2)}, t)] +\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\delta\mu_k^{(2)}\psi_k(u_1^{(2)},\ldots,u_m^{(2)},t)\Big\}dt-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\delta x_s^{(2)}\Big[\dot\lambda_s^{(2)}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s^{(2)}}\lambda_\alpha^{(2)}\Big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\delta u_k^{(2)}\Big[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(2)}\frac{\partial f_s}{\partial u_k^{(2)}}-\sum_{\beta=1}^{r}\mu_\beta^{(2)}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial u_k^{(2)}}\Big]\Big\}dt+$$

$$+\int_{t_2}^{T}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\delta\lambda_s^{(3)}[\dot x_s^{(3)}-f_s(x_1^{(3)},\ldots,x_n^{(3)},u_1^{(3)},\ldots,u_m^{(3)},t)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\delta\mu_k^{(3)}\psi_k(u_1^{(3)},\ldots,u_m^{(3)},t)\Big\}dt-\int_{t_2}^{T}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\delta x_s^{(3)}\Big[\dot\lambda_s^{(3)}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s^{(3)}}\lambda_\alpha^{(3)}\Big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\delta u_k^{(3)}\Big[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(3)}\frac{\partial f_s}{\partial u_k^{(3)}}-\sum_{\beta=1}^{r}\mu_\beta^{(3)}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial u_k^{(3)}}\Big]\Big\}dt \qquad (2.11)$$

При выводе формулы (2.11) учтены равенства

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(2)}\delta\dot x_s^{(2)}dt=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(2)}(t_2)\,\delta x_s^{(2)}(t_2)-\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(2)}(t_1)\,\delta x_s^{(2)}(t_1)-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{n}\dot\lambda_s^{(2)}\delta x_s^{(2)}dt \qquad (2.12)$$

$$\int_{t_2}^{T}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(3)}\delta\dot x_s^{(3)}dt=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(3)}(T)\,\delta x_s^{(3)}(T)-\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(3)}(t_2)\,\delta x_s(t_2)-\int_{t_2}^{T}\sum_{s=1}^{n}\dot\lambda_s^{(3)}\delta x_s^{(3)}dt$$

Вид зависимости $u_j(t_i, T, t)$, определяемый в каждой конкретной задаче ее условиями, на ход доказательства не влияет. Поэтому, для определенности, положим $u_j^{(2)}(t, t_1)$, $u_j^{(3)}(t, t_1, t_2)$. Тогда вариации функций управления $u_j(t)$ будут иметь вид:

$$\delta u_j^{(2)}=\frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial t_1}\delta t_1,\qquad \delta u_j^{(3)}=\frac{\partial u_j^{(3)}}{\partial t_1}\delta t_1+\frac{\partial u_j^{(3)}}{\partial t_2}\delta t_2 \qquad (2.13)$$

Вариации

$$\delta x_s^{(2)}(t),\ \delta x_s^{(3)}(t),\ \delta x_s^{(2)}(t_2),\ \delta\lambda_s^{(2)}(t),\ \delta\lambda_s^{(3)}(t),\ \delta\mu_k^{(2)}(t),\ \delta\mu_k^{(3)}(t)$$

$$(k=1,\ldots,r),\quad \delta t_1,\ \delta t_2,\ \delta T,\ n-p$$

вариаций $\delta x_s(T)$ независимы.

Определяя $2r$ множителей $\mu_k^{(2)}(t)$, $\mu_k^{(3)}(t)$ так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при вариациях $\delta u_\nu^{(2)}$, $\delta u_\nu^{(3)}$ $(\nu=m-r+1,\ldots,m)$, и p множителей ρ_l так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при зависимых вариациях $\delta x_s^{(3)}(T)$, коэффициенты при оставшихся независимых вариациях приравняем нулю. В результате получим уравнения, которым удовлетворяют координаты системы и функции управления

$$\dot x_s^i=f_s^i(x^i,u^i,t)\qquad \psi_k^i(u^i,t)=0,\qquad (s=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,r;\ i=2,3) \quad (2.14)$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\lambda_s^i(t)$

$$\dot\lambda_s^i+\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha^i\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s^i}=0\qquad (s=1,\ldots,n;\ i=2,3) \qquad (2.15)$$

Краевые условия для функций $\lambda_s^{(3)}(T)$

$$\lambda_s^{(3)}(T)+\frac{\partial}{\partial x_s^{(3)}(T)}\Big[J+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\Phi_l\Big]=0 \qquad (2.16)$$

Краевое условие вида

$$\frac{d}{dT}\left[J+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\Phi_l\right]=0 \qquad (2.17)$$

Условия непрерывности функций $\lambda_s(t)$

$$\lambda_s^{(2)}(t_2)=\lambda_s^{(3)}(t_2) \qquad (s=1,\ldots,n) \qquad (2.18)$$

Уравнения для определения множителей $\mu_k^{(2)}(t)$, $\mu_k^{(3)}(t)$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha^{\,i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial u_k^{\,i}}-\sum_{k=1}^{r}\mu_k^{\,i}\frac{\partial\psi_k}{\partial u_k^{\,i}}=0 \qquad (k=1,\ldots,r;\ i=2,3) \qquad (2.19)$$

Условия в точках t_1, t_2 разрыва управлений $u_j(t)$

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{i+1}(t_i)\,[\dot x_s^{\,i}(t_i)-\dot x_s^{\,i1}(t_i)]+\int_{t_i}^{T}\left\{\sum_{k=1}^{m-r}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial u_k}-\sum_{\beta=1}^{r}\mu_\beta\frac{\partial\psi_\beta}{\partial u_k}\right]\frac{\partial u_k}{\partial t_i}\right\}\partial t=0 \qquad (2.20)$$

Итак, получены:

$2n$ дифференциальных уравнений первого порядка для определения функций

$$x_s^{(2)}(t),\ x_s^{(3)}(t)\ (s=1,\ldots,n)$$

$2n$ дифференциальных уравнений первого порядка для определения множителей

$$\lambda_s^{(2)}(t),\ \lambda_s^{(3)}(t)\ (s=1,\ldots,n)$$

$2r$ соотношений, определяющих

$$\mu_k^{(2)}(t),\ \mu_k^{(3)}(t)\ (k=1,\ldots,r)$$

Неизвестными величинами будут пока $4n$ произвольных констант, полученных от решения соответствующих дифференциальных уравнений первого порядка, величины t_1, t_2, T, а также p множителей ρ_l $(l=1,\ldots,p)$ — всего $4n+p+3$ величин.

Для определения этих неизвестных величин будем иметь n краевых условий (2.16), n условий (2.18) непрерывности множителей $\lambda_s(t)$ в точке разрыва управления t_2 два условия (2.20), n условий непрерывности координат в точке t_1 $x_s^{(1)}(t_1)=x_s^{(2)}(t)$ и n условий непрерывности координат в точке t_2 $x_s^{(2)}(t_2)=x_s^{(3)}(t_2)$ и p соотношений 1.5 — всего $4n+p+3$.

Таким образом, поставленная задача разыскания экстремума функционала J может быть решена.

Заметим, что, следуя работам [1, 3], можно ввести лагранжеву функцию L, определяемую равенством

$$L=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s g_s+\sum_{k=1}^{r}\mu_k\psi_k$$

Систему дифференциальных уравнений (2.15), которая определяет множители λ_s^i (t) $(s=1,\ldots,n;\ i=2,3)$, можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot x_s^{\,i}}\right]-\frac{\partial L}{\partial x_s^{\,i}}=0 \qquad (s=1,\ldots,n)$$

а условия (2.18) непрерывности функций $\lambda_s(t)$ как

$$\left[\frac{\partial L}{\partial\dot x_s^{(2)}}\right]_{t_2-0}=\left[\frac{\partial L}{\partial\dot x_s^{(3)}}\right]_{t_2+0}$$

Введем в рассмотрение функцию H, равную

$$H=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s f_s-\sum_{k=1}^{r}\mu_k\psi_k=H_\lambda+H_\mu$$

где

$$H=\lambda_\lambda\sum_{s=1}^{n}\lambda\ f_s,\qquad H_\mu=-\sum_{k=1}^{r}\mu_k\psi_k$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{\partial H}{\partial u_k}$$

условия (2.20) можно записать в следующем виде:

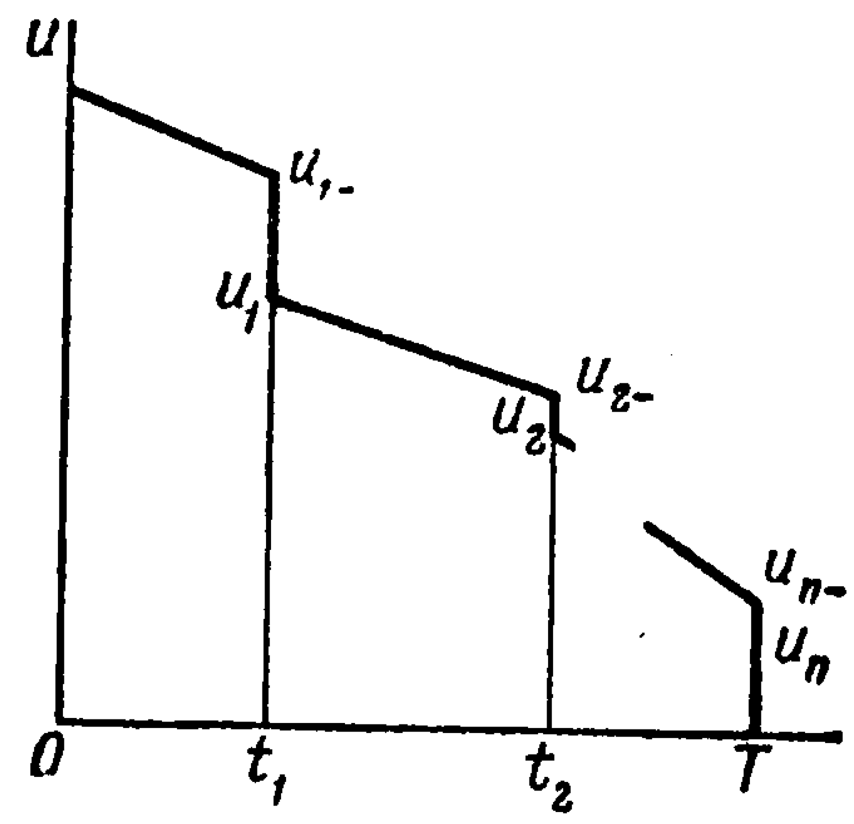
$$[H_\lambda]_{t_i-0} - [H_\lambda]_{t_i+0} + \int_{t_i}^{T} \left[\sum_{k=1}^{m-r} \frac{\partial H}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial t_i}\right] dt = 0 \; (i = 1, 2)$$

Далее, используя равенство,

$$\sum_{k=1}^{m-r} \frac{\partial H}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial t_i} = \frac{\partial H}{\partial t_i}$$

представим окончательно (2.20) в виде

$$[H_\lambda]_{t_i-0} - [H_\lambda]_{t_i+0} + \int_{t_i}^{T} \frac{\partial H}{\partial t_i} dt = 0 \qquad (i = 1, 2)$$



3. Рассмотрим в качестве примера применение изложенной выше теории к расчету двухступенчатой ракеты, движущейся вертикально в неоднородном поле силы тяготения и в пространстве, где не учитывается действие аэродинамических сил.

Уравнения движения центра масс составной ракеты имеют вид

$$\dot{v} = -g - V^r \frac{\dot{m}}{m}, \qquad \dot{h} = v, \qquad g = g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \tag{3.1}$$

где m — масса составной ракеты, изменяющаяся по линейному закону, v — скорость центра масс составной ракеты, h — высота ракеты над поверхностью Земли, V^r — относительная скорость отбрасываемых частиц, g — ускорение силы тяготения, R — радиус Земли, g_0 — ускорение силы тяготения на поверхности Земли ($h = 0$).

Введем безразмерную массу ступенчатой ракеты

$$u = \frac{m}{m_0} \tag{3.2}$$

где m_0 — стартовый вес составной ракеты.

Если рассмотреть вспомогательную плоскость $\{u, t\}$, то участки кривой $u = u(t)$, соответствующие рабочему режиму двигателей, изобразятся наклонными прямыми, а участки отделения ступеней — вертикальными отрезками (фиг. 1).

Двигатели последовательных субракет работают без пауз.

Обозначим отношение «массы сухого веса» i-той ($i = 1,2$) ступени к массе ее топлива через k_i. Кроме того, обозначим

$$u_{i-} = u(t_i - 0), \qquad u_i = u(t_i + 0) \tag{3.3}$$

Аналитически функция $u(t)$ определяется $2n$ равенствами ($n = 2$)

$$u_{i-} = u_{i-1} - \beta_i (t_i - t_{i-1}), \qquad u_i = u_{i-}(1 + k_i) - k_i u_{i-1} \tag{3.4}$$

где β_i — секундный расход двигателя i-й ступени.

Отметим, что $t_0 = 0$, $t_2 = T$, $u_2 = m_p/m_0$ (m_p — масса полезного груза).

Для дальнейшего необходимо вычислить частные производные

$$\frac{\partial u_j}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial u_{j-}}{\partial t_i} \qquad (j = 1, 2;\ i = 1)$$

Для двухступенчатой ракеты подсчеты дают

$$\frac{\partial u_{1-}}{\partial t_1} = -\beta_1, \qquad \frac{\partial u_{2-}}{\partial t_1} = -\beta_2 k_2, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t_1} = -\beta_1 (1 + k_1) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_1} = \beta_2 (1 + k_2) - \beta_1 (1 + k_1) = 0 \tag{3.6}$$

Требуется найти такой момент времени t_1 перехода от первой ступени составной ракеты, при котором значение скорости $v(T)$ в конце активного участка достигало наибольшего значения, при фиксированном времени полета ракеты на активном участке.

Дифференциальные уравнения (2.15) для определения неопределенных множителей $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ в данном случае имеют вид

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_2, \qquad \dot{\lambda}_2 = -\nu^2\lambda_1 \tag{3.7}$$

где

$$\nu^2 = 2g_0/R \tag{3.8}$$

Краевые условия (2.16) будут (h — свободно)

$$\lambda_1(T) = -1, \qquad \lambda_2(T) = 0 \tag{3.9}$$

Значения $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, найденные из уравнений (3.7) с учетом (3.9), имеют вид

$$\lambda_1 = \operatorname{ch}\nu\,(T-t), \qquad \lambda_2 = \nu\,\operatorname{sh}\nu\,(T-t) \tag{3.10}$$

Условие (2.20) можно представить

$$\lambda_1(t_1)\left[\frac{\beta_1 V_1{}^r}{u_{1-}} - \frac{\beta_2 V_2{}^r}{u_1}\right] + \beta_2 k_2 V_2{}^r \int_{t_1}^{T} \frac{\lambda_1(t)}{u^2}\,dt = 0 \tag{3.11}$$

или, взяв последний интеграл по частям, (3.11) преобразуем к виду

$$\lambda_1(t_1)\left[\frac{\beta_1 V_1{}^r}{u_{1-}} - \frac{\beta_2 V_2{}^r(1+k_2)}{u_1}\right] + \frac{\beta_2^2 k_2 V_2{}^r}{u_{2-}} + \nu\beta_2{}^2 k_2 V_2{}^r \int_{t_1}^{T} \frac{\lambda_2(t)}{u}\,dt = 0 \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) при заданных величинах β_i, $V_i{}^r$ определяет искомый момент t_1.

Если ракета однородна $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $V_1{}^r = V_2{}^r = V^r$, $k_1 = k_2 = k$, тогда условие (3.12) примет вид

$$\lambda_1(t_1)\left[\frac{1}{u_{1-}} - \frac{1+k}{u_1}\right] + \frac{k}{u_{2-}} + k\nu \int_{t_1}^{T} \lambda_2(t)\frac{dt}{u^2} = 0 \tag{3.13}$$

Следует отметить, что вычисление оптимального момента t_1 можно провести, не зная закона движения центра масс ракеты.

В качестве числового примера рассмотрим определение момента t_1 для двухступенчатой однородной ракеты со следующими характеристиками:

$$m_0 = 1000 \text{ кг}\cdot\text{сек}^2/\text{м}, \qquad m_p = 50 \text{ кг}\cdot\text{сек}^2/\text{м}, \qquad k = 0.1, \qquad g_0 = 10 \text{ м/сек}$$

$$V^r = 3000 \text{ м/сек}, \qquad \beta = 1/200 \text{ сек}^{-1}, \qquad T = 190 \text{ сек}$$

Оптимальный момент времени t_1 отбрасывания первой ступени в предположении, что ракета движется в однородном поле силы тяготения, равен t_1 — 156.2 сек.

В случае движения ракеты в неоднородном поле силы тяготения величина t_1, найденная из уравнения (3.13), равна $t = 154$ сек.

Максимальная скорость составной ракеты в конце активного участка при движении в однородном поле силы тяготения равна 5528 *м/сек*, а в неоднородном — 5623 *м/сек*.

Поступила 27 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1950.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
3. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4, 668—679.