В этом случае неравенства (6) принимают простой вид

$$mlv\left[1+\frac{(C-A)}{mlR}\right]>0, \qquad Fl\left[1+\chi\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right]>0 \qquad \left(\nu=\sqrt{\frac{g}{R}}\right) \tag{10}$$
$$F-mv\omega-mR\Omega^2>0, \qquad F-mR\Omega^2>0$$

Достаточные условия устойчивости (6) или (10) допускают вырождения, аналогичные указанным в работе [1].

Поступила 3 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф. Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Ляшенко В. Ф. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

И. Д. Килль (Москва)

Методом Л. Чезари [1] исследуется вопрос о существовании периодического решения уравнения [2]

$$\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{2e\sin t}{1+e\cos t}\frac{dz}{dt}+\frac{\mu}{1+e\cos t}\sin z=\frac{4e\sin t}{1+e\cos t} \qquad (0\leqslant e<1) \tag{1}$$

Это уравнение не меняется при одновременной замене z на $-z$ и t на $-t$, поэтому его решения можно искать среди нечетных функций t. Уравнение (1) приводим к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{e\cos t}{1+e\cos t}x+\mu\sin\frac{x}{1+e\cos t}=4e\sin t \qquad \left(z=\frac{x}{1+e\cos t}\right) \tag{2}$$

Рассмотрим пространство S интегрируемых с квадратом на отрезке $[0,2\pi]$ нечетных периодических функций периода 2π с нормой

$$\nu(x)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2(t)\,dt\right]^{1/2} \tag{3}$$

Для $x\in S$ имеем

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kt, \qquad \nu(x)=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

Рассмотрим в пространстве S линейные операторы P и H такие, что

$$Px=b_1\sin t+b_2\sin 2t, \qquad Hx=-\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}b_k\sin kt \tag{5}$$

Если $Px\equiv 0$, то

$$x(t)\sim\sum_{k=3}^{\infty}b_k\sin kt, \qquad \nu(Hx)=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}k^{-4}b_k^2\right]^{1/2}\leqslant 3^{-2}\nu(x) \tag{6}$$

Рассмотрим теперь операторы Q и F

$$Qx=-\frac{e\cos t}{1+e\cos t}x-\mu\sin\frac{x}{1+e\cos t}+4e\sin t, \qquad Fx=H(Qx-PQx) \tag{7}$$

Пусть x^* — функция, для которой

$$Px^*=x^*=b_1\sin t+b_2\sin 2t \qquad (x^*\in S) \tag{8}$$

Тогда

$$\nu(x^*)=2^{-1/2}(b_1^2+b_2^2)^{1/2}\leqslant c \qquad (c=\mathrm{const}) \tag{9}$$

Рассмотрим подмножество S^*

$$S^*=[x,\ x\in S,\ Px=x^*,\ \nu(x)\leqslant d,\ \nu(x-x^*)\leqslant\delta] \qquad (d,\delta=\mathrm{const}) \tag{10}$$

Для любых значений постоянных d и δ подмножество S^* не пусто, так как $x^* \in S^*$; пространство S — полное, а S^* — замкнуто, следовательно, S^* — полное пространство.

Следуя [1], введем оператор T

$$y = Tx = Px + Fx = Px + H(Qx - PQx) \cdot \tag{11}$$

Если $x \in S^*$, то

$$Py = PPx + PFx = x^*, \qquad y - Py = H(Qx - PQx) \tag{12}$$

Отсюда, используя (6), получаем

$$\nu(y - Py) \leqslant 3^{-2}\, \nu(Qx - PQx) \tag{13}$$

Используя очевидное неравенство

$$\nu(z - Pz) \leqslant \nu(z), \qquad z \in S$$

легко получаем

$$\nu(Qx - PQx) \leqslant \nu\left[\frac{e\cos t}{1 + e\cos t} Px - P\left(\frac{e\cos t}{1 + \cos t} Px\right)\right] +$$
$$+ \nu\left[\frac{e\cos t}{1 + e\cos t}(x - Px)\right] + \mu\nu\left[\sin\frac{x}{1 + e\cos t}\right] \leqslant \left[F(b_1, b_2, e) -\right.$$
$$\left. - \frac{\gamma_1^2(b_1, b_2, e) + \gamma_2^{\,2}(b_1, b_2, e)}{2}\right]^{1/2} + \frac{e\delta}{1 - e} + \mu \tag{14}$$

Здесь

$$F(b_1, b_2, e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^2(t)\, dt \qquad \left(\Phi\ \ (t) = \frac{e\cos t}{(1 + e\cos t)}\, x^*(t)\right)$$

γ_1 и γ_2 — коэффициенты при $\sin t$ и $\sin 2t$ в разложении Фурье функции $\Phi(t)$.

Пусть теперь коэффициенты b_1 и b_2 в равенстве (8) удовлетворяют соотношениям

$$|b_1| \leqslant \alpha_1, \qquad |b_2| \leqslant \alpha_2 \qquad (\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}) \tag{15}$$

Тогда можно положить

$$c = 2^{-1/2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} \tag{16}$$

Из (14) получаем

$$\nu(Qx - PQx) \leqslant \max\nolimits_D\left[F - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2}\right]^{1/2} + \frac{e\delta}{1 - e} + \mu \tag{17}$$

где D — замкнутый прямоугольник в плоскости b_1, b_2, определяемый (15).

Для того чтобы $y \in S^*$ достаточно, очевидно, выполнение соотношений

$$\nu(y - Py) \leqslant \delta, \qquad d = c + \delta \tag{18}$$

Первое из соотношений (18) будет заведомо выполнено, если

$$\frac{1}{3^2}\left\{\max\nolimits_D\left[F - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2}\right]^{1/2} + \frac{e\delta}{1 - e} + \mu\right\} \leqslant \delta \tag{19}$$

Если (19) справедливо при некотором значении $\delta = \delta_0$, то, полагая

$$d = c + \delta_0 \tag{20}$$

получаем

$$T(S^*) \in S^* \tag{21}$$

Покажем, что для определенной области значений параметров μ и e оператор T — сжатие в S^*. Полагая $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$, $x_1, x_2 \in S^*$, находим

$$y_1 - y_2 = H[(Qx_1 - Qx_2) - P(Qx_1 - Qx_2)]$$

$$\nu(y_1 - y_2) \leqslant 3^{-2}\nu\,[(Qx_1 - Qx_2) - P(Qx_1 - Qx_2)] \leqslant 3^{-2}\,\nu(Qx_1 - Qx_2)$$

$$\nu(y_1 - y_2) \leqslant \frac{1}{3^2}\,\nu\left[\frac{e\cos t}{1 + e\cos t}(x_1 - x_2) + \mu\left(\sin\frac{x_1}{1 + e\cos t} - \sin\frac{x_2}{1 + e\cos t}\right)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{3^2}\left[\frac{e}{1 - e}\,\nu(x_1 - x_2) + \frac{\mu}{1 - e}\,\nu(x_1 - x_2)\right] \leqslant \frac{1}{3^2}\,\frac{\mu + e}{1 - e}$$

Если

$$\frac{1}{3^2}\frac{\mu+e}{1-e}<1 \tag{22}$$

то T — сжатие в S^*.

Таким образом, если соотношения (19) — (22) выполняются, то оператор T согласно теореме Банаха [3] имеет единственную фиксированную точку $y \in S^*$. Можно показать [1], что y есть непрерывная функция x^*, а следовательно и коэффициентов b_1 и b_2. Имеем

$$y = Py + H\,(Qy - PQy) \tag{23}$$

Правая часть равенства (23) будет почти всюду дважды дифференцируемой функцией t в силу определения H, следовательно, этим свойством обладает и левая часть. Дифференцируя дважды (23), получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} = P\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + Qy - PQy = Qy + P\left[\frac{d^2y}{dt^2} - Qy\right] \tag{24}$$

Функция $y\,(t)$ будет периодическим решением (2), если $P\,[d^2y\,/\,dt^2 - Qy] \equiv 0$, или, что то же

$$U = -b_1 + \beta_1\,(b_1, b_2) - 4e = 0, \qquad V = -4b_2 + \beta_2\,(b_1, b_2) = 0 \tag{25}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e\cos t}{1+e\cos t}\,y\,(t)\sin nt\,dt + \frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{y\,(t)}{1+e\cos t}\sin nt\,dt \qquad (n = 1{,}2)$$

Равенства (25) можно рассматривать как уравнения для определения коэффициентов b_1 и b_2. Вопрос о существовании периодического решения (2) сводится, следовательно, к вопросу о существовании решения системы (25), удовлетворяющего неравенствам (15). Заменим уравнения (25) приближенными уравнениями

$$U_0 = -b_1 + \beta_{10}\,(b_1, b_2) - 4e = 0, \qquad V_0 = -4b_2 + \beta_{20}\,(b_1, b_2) = 0 \tag{26}$$

$$\beta_{n0} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e\cos t}{1+e\cos t}\,x^*\,(t)\sin nt\,dt + \frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{x^*\,(t)}{1+e\cos t}\sin nt\,dt \qquad (n = 1,\,2)$$

Отобразим область D плоскости b_1b_2 по формулам (26) на плоскость UV.

Пусть c_0 — граница полученной области Δ_0 в плоскости UV. Если начало координат плоскости UV принадлежит Δ_0, то система (26) имеет решение, удовлетворяющее (15). Если, кроме того, выполняется неравенство

$$\max\nolimits_D \sqrt{(U-U_0)^2 + (V-V_0)^2} < \min\,[c_0,\,0] \tag{27}$$

где $\min\,[c_0, 0]$ — минимальное расстояние от начала координат до границы c_0, то область Δ, получаемая в результате отображения D по формулам (25) также включает точку (0, 0), и потому (25) также имеет решение, удовлетворяющее (15).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании периодического решения (2) при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $e = 0.6$. Условие (22) при этих значениях параметров выполняется. Положим $\alpha_1 = 3.5$, $\alpha_2 = 0.5$, тогда неравенство (19) принимает вид

$$3^{-2}\,[0.415 + 1.5\delta + \mu] \leqslant \delta \tag{28}$$

и удовлетворяется при $\delta = 0.056 + 0.134\,\mu$. Из (20) для d получаем значение $d = 2.556 + 0.134\,\mu$. Оценим величину, стоящую в левой части (27)

$$|\,U - U_0\,| = |\,\beta_1 - \beta_{10}\,| = \left|\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e\cos t}{1+\cos t}\,(y - Py)\sin t\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} 2\sin\frac{y - Py}{2\,(1+e\cos t)}\cos\frac{y+Py}{2\,(1+e\cos t)}\sin t\,dt\,\right|$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для интегралов, получаем

$$|U - U_0| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}(y - Py^2)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^2\sin^2 t\cos^2 t}{(1+e\cos t)^2}\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}(y - Py)^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{(1+e\cos t)^2}\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\delta\left[\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^2\sin^2 t\cos^2 t}{(1+e\cos t)^2}\,dt\right)^{1/2} + \mu\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{(1+e\cos t)^2}\,dt\right)^{1/2}\right] \tag{29}$$

Аналогично имеем

$$|V - V_0| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\delta\left[\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^2\sin^2 2t\cos^2 t}{(1+e\cos t)^2}\,dt\right)^{1/2} + \mu\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{(1+e\cos t)^2}\,dt\right)^{1/2}\right] \tag{30}$$

Вычисляя в (29), (30) интегралы при значении $e = 0.6$, получим

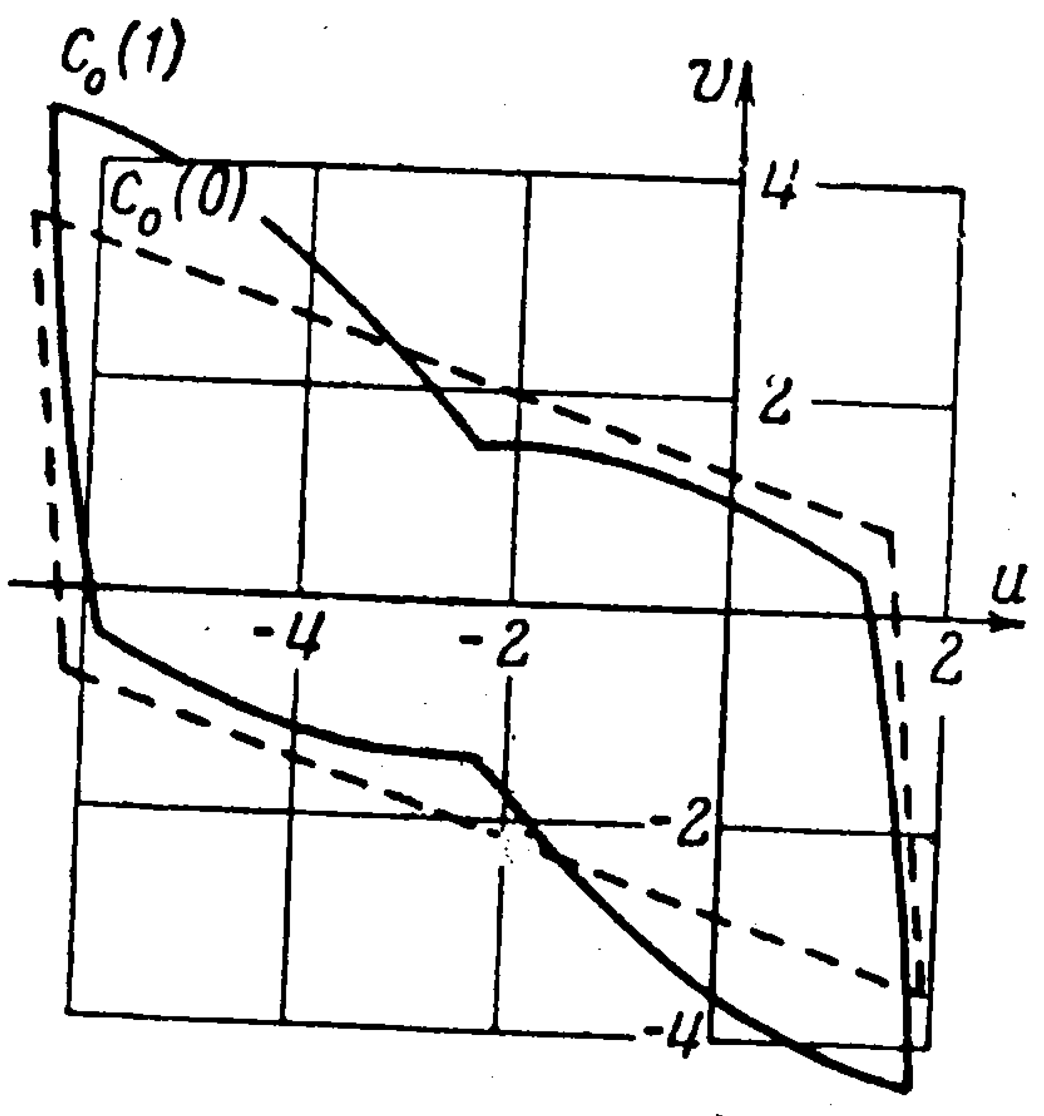
$$\max_D \sqrt{(U - U_0)^2 + (V - V_0)^2} \leqslant \delta\sqrt{6.473\,\mu^2 + 5.299\,\mu + 1.103} \tag{31}$$

При $\mu = 1$ из (31) получаем

$$\max_D \sqrt{(U - U_0)^2 + (V - V_0)^2} < 0.682 \tag{32}$$

Отображая прямоугольник $|b_1| \leqslant 3.5$, $|b_2| \leqslant 0.5$ плоскости $b_1 b_2$ на плоскость UV по формулам (26) при $\mu = 1$, получим область (фигура), ограниченную кривой c_0 (1), причем

$$\min\,[c_0(1), 0] > 0.780 \tag{33}$$



Из (32) и (33) следует, что неравенство (27) справедливо.

Если отобразить тот же прямоугольник на плоскость UV по формулам (26) при $\mu = 0$, получим область (фигура), ограниченную c_0 (0).

Из фигуры видно, что

$$\min\,[c_0(1), 0] < \min\,[c_0(0), 0] \tag{34}$$

Величины U_0, V_0 представляют собой линейные функции μ, поэтому при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\min\,[c_0(1), 0] \leqslant \min\,[c_0(\mu), 0] \tag{35}$$

С другой стороны, величина, стоящая в правой части (31), будет при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ возрастающей функцией μ, а потому неравенство (32) также справедливо при всех μ на отрезке [0,1]. Отсюда ясно, что (27) выполняется при $e = 0.6$ и $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. При этих значениях параметров система (27) имеет решение относительно b_1 b_2, удовлетворяющее (15), а потому уравнение (2) имеет периодическое решение.

Отображение границы прямоугольника на плоскость UV проводилось при помощи электронной вычислительной машины «Стрела».

Поступила 23 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Cesari L. Periodic Solutions of Differential Systems. Proceedings of the Symposium on Active Networks and Feedback Systems. New York, 1960; Brooklyn N. Y., 1961.
2. Белецкий В. В. О либрации спутника. Искусственные спутники Земли, 1959, вып. 3.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.