О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

В. Ф. Лященко (Москва)

В данной заметке уточняются и развиваются результаты работы [1].

Если момент, создаваемый пружинной связью между гироскопами, удовлетворяет условию [2]

$$N(\varepsilon) = -\frac{4B'^2}{mlR}\cos\varepsilon\sin\varepsilon \tag{1}$$

то в тех же предположениях, что и в работе [1], интеграл энергии имеет вид (2)

$$V \equiv \frac{1}{2}Ap^2 + \frac{1}{2}Bq^2 + \frac{1}{2}Cr^2 + I\dot{\varepsilon}^2 - \frac{1}{2}\frac{4B'^2}{mlR}\sin^2\varepsilon - (F - mv\omega)\,l\psi_3 - mvl\Omega\vartheta_3 -$$

$$- \Omega\,[Ap\psi_1 + (Bq + H)\psi_2 + Cr\psi_3] - \omega\,[Ap\vartheta_1 + (Bq + H)\vartheta_2 + Cr\vartheta_3] = C_1 \left(\omega = \frac{v}{R}\right)$$

Здесь $I\dot{\varepsilon}^2$ — кинетическая энергия вращения гироскопов вместе с кожухами относительно осей кожухов. Последняя в работе [1] не учитывалась.

Положениям равновесия системы отвечают следующие значения координат

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \beta^*, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = \delta^* \tag{3}$$

причем β^* и δ^* удовлетворяют уравнениям

$$(C - B)[{}^1/_2\,(\Omega^2 - \omega^2)\sin 2\beta^* + \omega\,\Omega\cos 2\beta^*] - 2B'\cos(\varepsilon_0 + \delta^*)(\Omega\cos\beta^* - \omega\sin\beta^*) =$$
$$= -(F - mv\omega)\,l\sin\beta^* - mvl\Omega\cos\beta^*$$

$$-(\omega\cos\beta^* + \Omega\sin\beta^*)\,2B'\sin(\varepsilon_0 + \delta^*) = N(\varepsilon_0 + \delta^*) \tag{4}$$

Здесь ε_0 — значение угла разведения гироскопов ε, удовлетворяющее соотношению

$$\varepsilon_0 = \arccos\frac{mlv}{2B'} \tag{5}$$

Принимая движение, определяемое равенствами (3), в качестве невозмущенного, получим аналогично [1] достаточные условия устойчивости названного движения в виде

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \qquad c_{11}c_{33} - c_{13}^2 > 0, \qquad c_{22}c_{44} - c_{24}^2 > 0 \tag{6}$$

Здесь

$$c_{11} = {}^1/_2\omega\,\{-mlR\,\Omega\sin\beta^* - A\omega + [B(\omega\cos\beta^* + \Omega\sin\beta^*) +$$
$$+ 2B'\cos(\varepsilon_0 + \delta^*)]\cos\beta^* + C(\omega\sin\beta^* - \Omega\cos\beta^*)\sin\beta^*\}$$

$$c_{22} = {}^1/_2\,\{(C - B)\,[(\Omega\cos\beta^* - \omega\sin\beta^*)^2 - (\Omega\sin\beta^* + \omega\cos\beta^*)^2] + [(F - mv\omega)\,l +$$
$$+ \omega\,2B'\cos(\varepsilon_0 + \delta^*)]\cos\beta^* - \Omega\,[mvl - 2B'\cos(\varepsilon_0 + \delta^*)]\sin\beta^*\}$$

$$c_{33} = {}^1/_2\,[(C - A)(\Omega\cos\beta^* - \omega\sin\beta^*)^2 + (F - mv\omega)\,l\cos\beta^* - mvl\Omega\sin\beta^*] \tag{7}$$

$$c_{44} = {}^1/_2\,[-(4B'^2/mlR)\cos 2(\varepsilon_0 + \delta^*) + 2B'\cos(\varepsilon_0 + \delta^*)(\Omega\sin\beta^* + \omega\cos\beta^*)]$$

$$c_{13} = {}^1/_2\omega\,[(C - A)(\omega\sin\beta^* - \Omega\cos\beta^*) - mlR\,\Omega]$$

$$c_{24} = {}^1/_2\,2B'\sin(\varepsilon_0 + \delta^*)(\Omega\cos\beta^* - \omega\sin\beta^*)$$

Отметим, что уравнения (4) имеют решение $\beta^* = 0$, если $N(\varepsilon)$ удовлетворяет условию [3]

$$N(\varepsilon) = -\frac{4B'^2}{mlR(1 + \chi)}\cos\varepsilon\sin\varepsilon \qquad \left(\chi = \frac{(C - B)}{mlR}\right) \tag{8}$$

При этом значение δ^* определяется уравнением

$$2B'\cos(\varepsilon_0 + \delta^*) = mlv\,(1 + \chi) \tag{9}$$

Интеграл (2) сохраняет свой вид, только у коэффициента при $\sin^2\varepsilon$ в знаменателе появится дополнительный множитель $(1 + \chi)$.

В этом случае неравенства (6) принимают простой вид

$$mlv\left[1+\frac{(C-A)}{mlR}\right]>0,\qquad Fl\left[1+\chi\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right]>0 \qquad \left(\nu=\sqrt{\frac{g}{R}}\right) \tag{10}$$
$$F-mv\omega-mR\,\Omega^2>0,\qquad F-mR\,\Omega^2>0$$

Достаточные условия устойчивости (6) или (10) допускают вырождения, аналогичные указанным в работе [1].

Поступила 3 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В. Н., Лященко В. Ф. Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Лященко В. Ф. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

И. Д. Килль (Москва)

Методом Л. Чезари [1] исследуется вопрос о существовании периодического решения уравнения [2]

$$\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{2e\sin t}{1+e\cos t}\frac{dz}{dt}+\frac{\mu}{1+e\cos t}\sin z=\frac{4e\sin t}{1+e\cos t}\qquad (0\leqslant e<1) \tag{1}$$

Это уравнение не меняется при одновременной замене z на $-z$ и t на $-t$, поэтому его решения можно искать среди нечетных функций t. Уравнение (1) приводим к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{e\cos t}{1+e\cos t}x+\mu\sin\frac{x}{1+e\cos t}=4e\sin t\qquad \left(z=\frac{x}{1+e\cos t}\right) \tag{2}$$

Рассмотрим пространство S интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, 2\pi]$ нечетных периодических функций периода 2π с нормой

$$\nu(x)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2(t)\,dt\right]^{1/2} \tag{3}$$

Для $x\in S$ имеем

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kt,\qquad \nu(x)=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

Рассмотрим в пространстве S линейные операторы P и H такие, что

$$Px=b_1\sin t+b_2\sin 2t,\qquad Hx=-\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}b_k\sin kt \tag{5}$$

Если $Px\equiv 0$, то

$$x(t)\sim\sum_{k=3}^{\infty}b_k\sin kt,\qquad \nu(Hx)=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}k^{-4}b_k^2\right]^{1/2}\leqslant 3^{-2}\nu(x) \tag{6}$$

Рассмотрим теперь операторы Q и F

$$Qx=-\frac{e\cos t}{1+e\cos t}x-\mu\sin\frac{x}{1+e\cos t}+4e\sin t,\qquad Fx=H(Qx-PQx) \tag{7}$$

Пусть x^* — функция, для которой

$$Px^*=x^*=b_1\sin t+b_2\sin 2t\qquad (x^*\in S) \tag{8}$$

Тогда

$$\nu(x^*)=2^{-1/2}(b_1^2+b_2^2)^{1/2}\leqslant c\qquad (c=\mathrm{const}) \tag{9}$$

Рассмотрим подмножество S^*

$$S^*=[x,\ x\in S,\ Px=x^*,\ \nu(x)\leqslant d,\ \nu(x-x^*)\leqslant\delta]\qquad (d,\ \delta=\mathrm{const}) \tag{10}$$