О ПОЛЯРНЫХ ОРБИТАХ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

В. Г. Дегтярев (Ленинград)

Для аппроксимации потенциала притяжения Земли в работе [1] предлагается следующий потенциал

$$U = \frac{fM}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2}} + \frac{1-i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}}\right\} \qquad (1)$$

Здесь, x, y, z — декартовы координаты спутника, z — полярная ось, xy — экваториальная плоскость, f — коэффициент притяжения Земли, M — масса Земли, постоянные c и σ выражаются через величины коэффициентов при гармониках потенциала Земли. Потенциал (1) с точностью до трех членов разложения его в ряд по полиномам Лежандра совпадает с потенциалом Земли и является наилучшим из известных аппроксимирующих потенциалов Земли в смысле точности приближения и простоты исследования движения спутника.

В работе [2] полярные орбиты спутников рассматривались в предположении, что выражением для его аппроксимирующего потенциала будет (1) при $\sigma = 0$.

Ниже для потенциала принимается выражение (1). Следуя [1], сделаем замену переменных x, y, z, t на λ, μ, w, τ посредством соотношений

$$x = c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos w, \qquad y = c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin w, \qquad z = c\sigma + c\lambda\mu,$$
$$dt = (\lambda^2+\mu^2)\,d\tau$$

В результате получим следующие уравнения движения

$$\int_{\mu_0}^{\mu}\left[-\frac{2h}{c^2}\mu^4 + \frac{2fM\sigma}{c^3}\mu^3 + 2\left(c_2+\frac{h}{c^2}\right)\mu^2 - \frac{2fM\sigma}{c^3}\mu - (2c_2+c_1^2)\right]^{-1/2} d\mu = \tau + c_3 \qquad (2)$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}\left[\frac{2h}{c^2}\lambda^4 + \frac{2fM}{c^3}\lambda^3 + 2\left(c_2+\frac{h}{c^2}\right)\lambda^2 + \frac{2fM}{c^3}\lambda + (2c_2+c_1^2)\right]^{-1/2} d\lambda = \tau + c_4 \qquad (3)$$

$$w = c_1\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{(\lambda^2+\mu^2)\,d\tau}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} + c_5 \qquad (4)$$

где $h, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ — постоянные интегрирования, а λ_0, μ_0, τ_0 — некоторые начальные данные для λ, μ, τ.

Под полярными орбитами будем понимать орбиты, лежащие в меридиональных плоскостях Земли. Для таких орбит должно быть $w = w_0$, т. е. из (4) следует, что $c_1 = 0$, а c_5 выберем нулем, тогда $y = 0$. В этом случае положение спутника определяется координатами

$$x = c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}, \qquad z = c\sigma + c\lambda\mu \qquad (5)$$

Отсюда

$$\frac{x^2}{c^2(1+\lambda^2)} + \frac{(z-c\sigma)^2}{c^2\lambda^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{c^2(1-\mu^2)} - \frac{(z-c\sigma)^2}{c^2\mu^2} = 1$$

Таким образом, при $\lambda = \mathrm{const}$ имеем семейство эллипсов, центр которых отстоит от центра Земли на малую величину $c\sigma$ вдоль оси z, а при $\mu = \mathrm{const}$ семейство гипербол. Отсюда видно, что $|\mu| \leqslant 1$, а для реальных спутников Земли $c^2\lambda^2 > R^2$, где $R = 6370$ *км* — радиус Земли, это неравенство дает

$$|\lambda| > 30 \qquad (6)$$

Для полярных орбит уравнения (2) и (3) для λ и μ могут быть переписаны следующим образом:

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = \frac{2h}{c^2}(1-\mu^2)\,\psi(\mu) \qquad \left(\psi(\mu) = \mu^2 - \frac{fM\sigma}{hc}\mu - \frac{c_2c^2}{h}\right) \qquad (7)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = \frac{2h}{c^2}(1+\lambda^2)\,\varphi(\lambda) \qquad \left(\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{fM}{hc}\lambda + \frac{c_2c^2}{h}\right) \qquad (8)$$

Изучим возможные области движения. При этом будем рассматривать только орбиты спутников, т. е. орбиты, находящиеся в ограниченной части пространства и не приводящие к столкновению с Землей.

Из вида уравнений (7) и (8) можно заключить, что возможны только такие движения, для которых правые части уравнений (7) и (8) неотрицательны. Начнем с исследования уравнения для λ. Возможны три случая.

1^0. Корни многочлена $\varphi(\lambda)$ действительны и различны:

$$\alpha_1 = -\frac{fM}{2hc} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - \frac{c_2c^2}{h}}, \qquad \alpha_2 = -\frac{fM}{2hc} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - \frac{c_2c^2}{h}}$$

При $h > 0$ должно быть $\lambda > \alpha_1$, либо $\lambda < \alpha_2$, в обоих случаях из геометрического смысла λ явствует, что при $h > 0$ в данном случае движение происходит в неограниченном пространстве (неограниченные орбиты). При $h < 0$ имеем $\alpha_2 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1$.

2^0. В случае равных корней $\alpha_1 = \alpha_2 = -fM / 2hc$ из (8) видно, что движение возможно только при постоянном $\lambda = -fM / 2hc$, если $h < 0$, если же $h > 0$, то движение возможно либо при том же постоянном λ, либо при любом λ, в последнем случае опять получаем неограниченные орбиты.

3^0. Пусть корни $\varphi(\lambda)$ — комплексные, тогда при $h > 0$ движение возможно при любых λ (неограниченные орбиты), а при $h < 0$ движение невозможно.

В случае $h = 0$ уравнение для λ принимает вид

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = 2(1+\lambda^2)\left(\frac{fM}{c^3}\lambda + c_2\right)$$

Движение возможно при $h = 0$, если $\lambda > -c_2c^3 / fM$ (неограниченные орбиты). Итак, уже из анализа уравнений для λ следует, что при $h \geqslant 0$ орбиты в ограниченном пространстве могут появиться лишь в случае 2^0. Ниже будет показано, что при $h \geqslant 0$ все орбиты неограничены. Переходим к анализу уравнений для μ.

1^{00}. Корни многочлена $\psi(\mu)$

$$\beta_1 = \frac{fM\sigma}{2hc} + \sqrt{\left(\frac{fM\sigma}{2hc}\right)^2 + \frac{c_2c^2}{h}}, \qquad \beta_2 = \frac{fM\sigma}{2hc} - \sqrt{\left(\frac{fM\sigma}{2hc}\right)^2 + \frac{c_2c^2}{h}}$$

действительны и различны; при $h > 0$ имеем $\mu < \beta_2$ или $\mu > \beta_1$, но тогда $\beta_2 < 0$, т. е. $-1 \leqslant \mu < \beta_2 < 0 < 1$, а из $\beta_2 < \beta_1$ следует $-1 < \beta_2 < \beta_1 < \mu \leqslant 1$, т. е. должно быть

$$|\beta_1| \leqslant 1, \qquad |\beta_2| \leqslant 1 \tag{9}$$

Так как $h > 0$ только в случае 2^0 изменения λ ($\lambda = -fM / 2hc$), то из (9) следует

$$|\lambda| = \left|\frac{fM}{2hc}\right| \leqslant \frac{1}{|\sigma + \sqrt{1+\sigma^2}|} < 30, \qquad |\lambda| = \left|\frac{fM}{2hc}\right| \leqslant \frac{1}{|\sigma - \sqrt{1+\sigma^2}|} < 30$$

Эти неравенства противоречат (6), т. е. при $h > 0$ в случае 1^0 изменения μ движение невозможно. При $h < 0$ может быть два варианта

$$\text{(а)} \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1 \qquad (|\beta_1| \geqslant 1, |\beta_2| \geqslant 1)$$

$$\text{(б)} \quad \beta_2 \leqslant \mu \leqslant \beta_1 \qquad (|\beta_1| < 1, |\beta_2| < 1)$$

2^{00}. Корни многочлена $\psi(\mu)$ одинаковы $\beta_1 = \beta_2 = fM / 2hc$, т. е.

$$\left(\frac{fM\sigma}{2hc}\right)^2 + \frac{c_2c^2}{h} = 0 \tag{10}$$

Отметим, что этот случай не совместим со случаем 2^0 для λ, в котором

$$\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - \frac{c_2c^2}{h} = 0 \tag{11}$$

Таким образом, при $h < 0$ остается случай

$$\text{(в)} \quad \mu = \frac{fM\sigma}{2hc} \leqslant 1$$

Невозможна также комбинация случая 2^0 со случаем (б), так как условие $|\beta_2| < 1$ и (11) дает

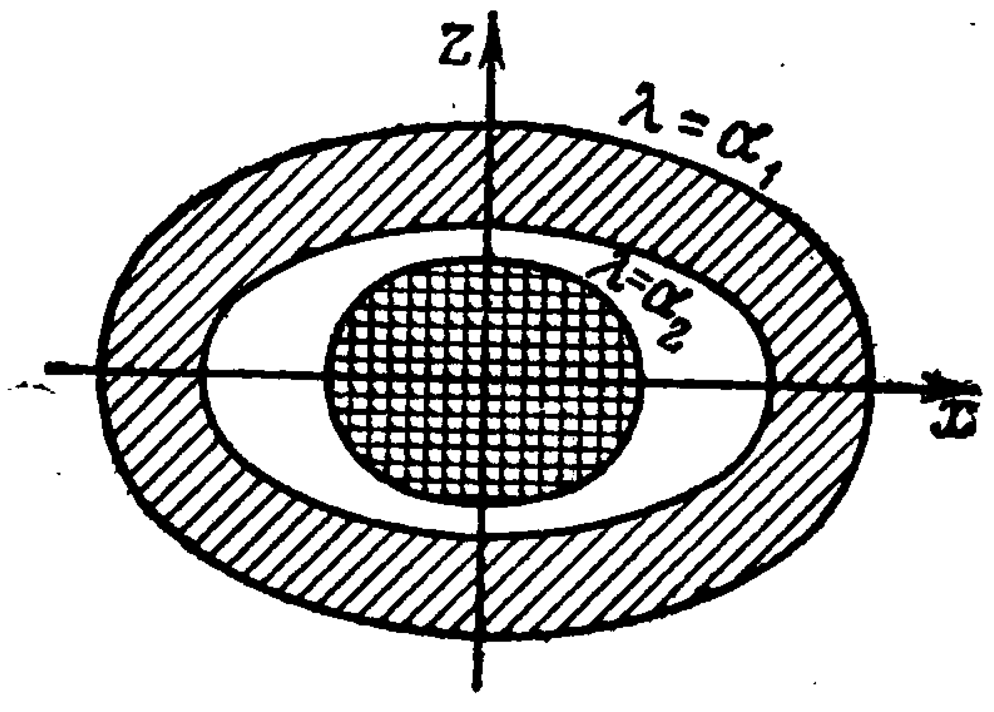
$$|\lambda| = \left|\frac{fM}{2hc}\right| < \frac{1}{|\sigma + \sqrt{1+\sigma^2}|} < 30$$

что противоречит (6). Исходя из этого анализа, получаем следующие области возможного движения:

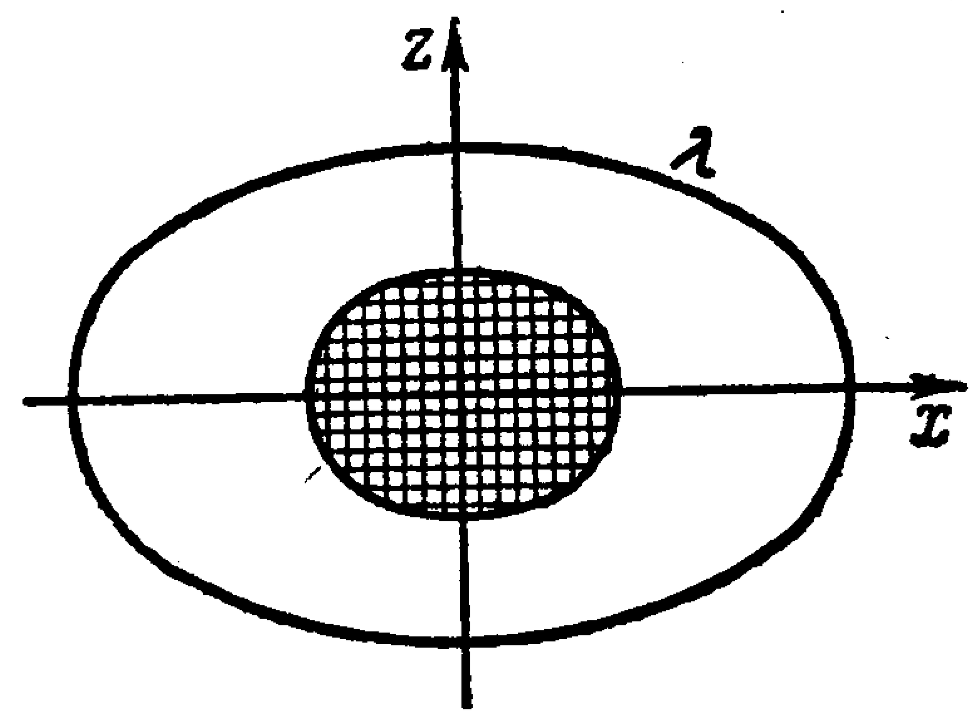
(1а) $\alpha_2 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1,$ (1б) $\alpha_2 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1, \qquad \beta_2 \leqslant \mu \leqslant \beta_1$

(2а) $\lambda = -\dfrac{fM}{2hc}, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1,$ (1в) $\alpha_2 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1, \qquad \mu = \dfrac{fM\sigma}{2hc} \leqslant 1$

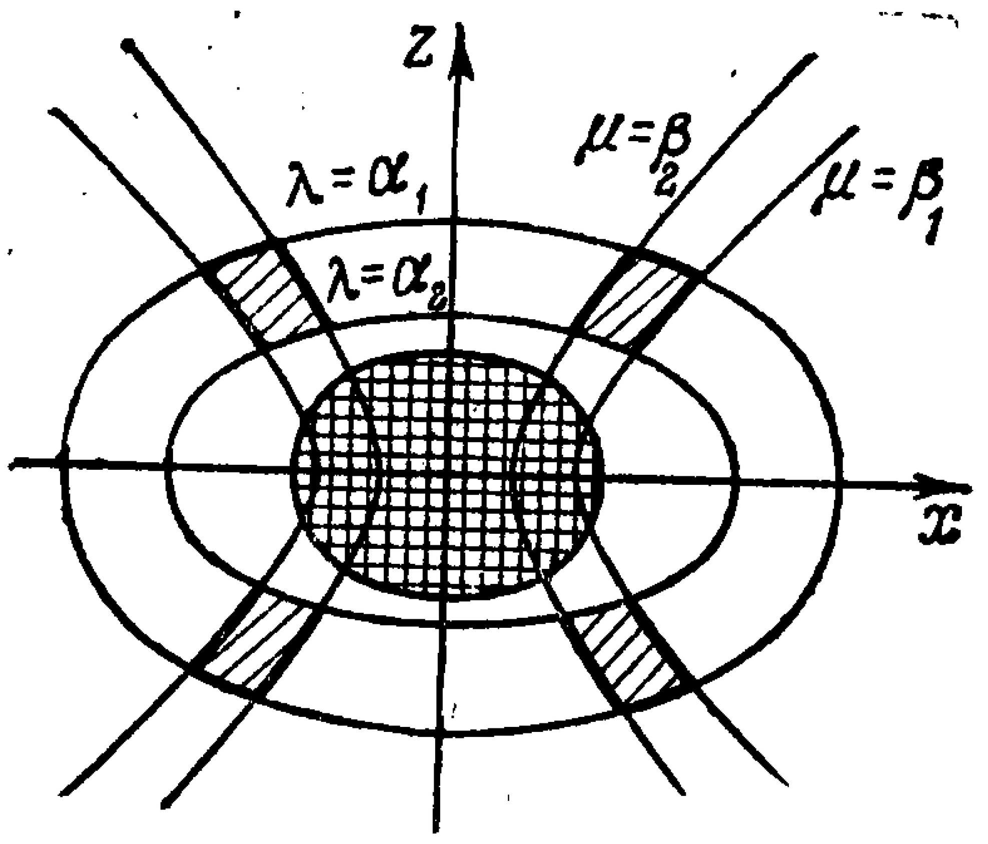
На фигурах центры эллипсов и гипербол сдвинуты к югу на малую величину $c\sigma$.



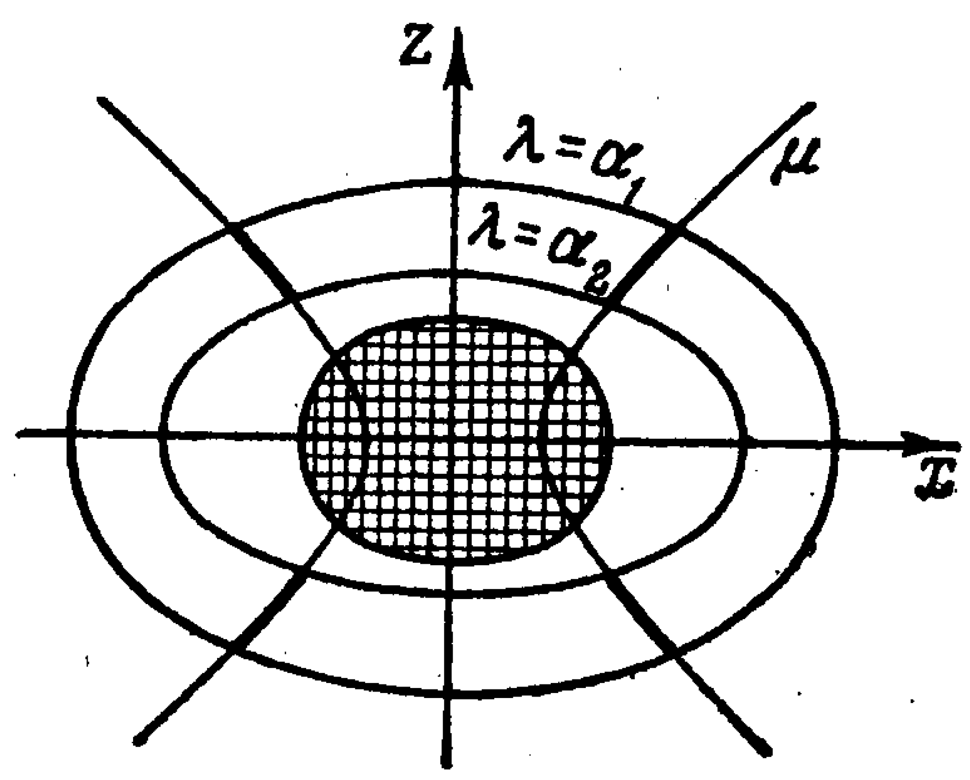
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Покажем, что в случаях 1б и 1в траектории таковы, что неизбежно произойдет встреча с Землей.

По теореме Виетта $|c_2c^2 / h| = |\beta_1| \, |\beta_2| < 1$, так как $h < 0$, то $c_2c^2 / h > 0$ при $c_2 < 0$ и $c_2c^2 / h < 0$ при $c_2 > 0$. Имеем

$$|\alpha_2| = \left| -\frac{fM}{2hc} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - \frac{c_2c^2}{h}} \right|$$

$$c_2 < 0, \qquad |\alpha_2| < \left| -\frac{fM}{2hc} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - 1} \right|$$

так как

$$\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - 1 > \left[\left|\frac{fM}{2hc}\right| - 1\right] = \left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 - 2\left|\frac{fM}{2hc}\right| + 1$$

по крайней мере для $|fM / 2hc| > 1$ (для $|fM / 2hc| < 1$ неравенство $|\alpha_2| < 1$ очевидно). Но тогда

$$|\alpha_2| < \left| -\frac{fM}{2hc} + \frac{fM}{2hc} + 1 \right| = 1$$

$$c_2 > 0, \qquad |\alpha_2| < \left| -\frac{fM}{2hc} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 + 1} \right|$$

$$\left(\frac{fM}{2hc}\right)^2 + 1 < \left(\left|\frac{fM}{2hc}\right| + 1\right)^2, \qquad |\alpha_2| < 1$$

Итак, $|\alpha_2| < 30$, т. е. один из эллипсов проходит внутри Земли, значит неизбежно столкновение с Землей (баллистические орбиты).

В случае 1*в* имеем последовательно

$$\mu = \frac{fM\sigma}{2hc} \leqslant 1, \qquad \left|\frac{fM}{2hc}\right| \leqslant \frac{1}{|\sigma|}, \qquad |\alpha_2| < \frac{|1 - \sqrt{1-\sigma^2}|}{|\sigma|} < 30$$

т. е. орбита будет опять баллистической.

Итак, из спутниковых полярных орбит возможны лишь полярные эллиптические орбиты (2а) и траектории в эллиптической полосе (1а), в случаях же (1б) и (1в) орбиты будут баллистическими.

Эллиптические орбиты. Для эллиптических орбит $\lambda = -fM / 2hc$. Пользуясь таблицами [3], можно получить следующее выражение для μ:

$$\mu = \frac{1 - \beta_1 + 2\beta_1 \operatorname{cn}[\omega(\tau - \tau_0), k] + (1 + \beta_1) \operatorname{dn}[\omega(\tau - \tau_0), k]}{\beta_1 - 1 + 2\operatorname{cn}[\omega(\tau - \tau_0), k] + (1 + \beta_1) \operatorname{dn}[\omega(\tau - \tau_0), k]} = S(\tau)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{-2h(1+\beta_1)(1-\beta_2)}}{c}, \qquad k^2 = \frac{2(\beta_1 - \beta_2)}{(1+\beta_1)(1-\beta_2)}$$

Тогда координаты x и z будут определяться из выражений

$$x = a\sqrt{1 - S^2(\tau)}, \qquad a = c\sqrt{1 + \left(\frac{fM}{2hc}\right)^2}, \qquad z = c\sigma + bS(\tau), \qquad b = -fM / 2hc$$

Здесь a и b большие и малые полуоси эллипса. Связь со временем находим из уравнения

$$t - t_0 = \lambda^2(\tau - \tau_0) + \frac{c}{\sqrt{-2h}} \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - 1)(\mu - \beta_1)(\mu - \beta_2)}} \tag{12}$$

Движение по эллиптической орбите является периодическим по τ с периодом $4K/\omega$, где K есть полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k. Период движения по t определяется из (12).

Устойчивость этих орбит по отношению к полуосям и эксцентриситету эллипса доказана в работе [4].

Движение в эллиптической полосе. Здесь $\alpha_2 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_1$, $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$. Величина μ вычисляется так же, как и в случае эллиптических орбит. Для λ получим следующие выражения [2,3]:

$$\lambda = \frac{A + B\operatorname{cn}[\omega_1(\tau - \tau_0), k_1]}{C + D\operatorname{cn}[\omega_1(\tau - \tau_0), k_1]}$$

$$A = \alpha_2\sqrt{1 + \alpha_1^2} + \alpha_1\sqrt{1 + \alpha_2^2}, \qquad C = \sqrt{1 + \alpha_1^2} + \sqrt{1 + \alpha_2^2}$$

$$B = \alpha_2\sqrt{1 + \alpha_1^2} - \alpha_1\sqrt{1 + \alpha_2^2}, \qquad D = \sqrt{1 + \alpha_1^2} - \sqrt{1 + \alpha_2^2}$$

$$\omega_1 = \left[\frac{4h^2}{c^4}(1 + \alpha_1^2)(1 + \alpha_2^2)\right]^{1/4}, \qquad k_1^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1 + \alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(1 + \alpha_1^2)(1 + \alpha_2^2)}}\right]$$

Величины x и z вычисляются из формул (5).

Автор благодарит В. В. Румянцева и Е. П. Аксенова за замечания и критику.

Поступила 11 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли. Астроном. ж., 1963, № 2.
3. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. О полярных орбитах искусственных спутников Земли. Вестник МГУ, сер. физ. астр., 1962, № 5.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
4. Дегтярев В. Г. Об устойчивости движения в обобщенной задаче двух неподвижных центров. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.