4. Rathy R. K. Hydromagnetic Couette's flow with suction and injection. Z. angew. Math. und Mech., 1963, v. 43, 7/8, 370—374.
5. Ramamoorthy P. A generalized porous-wall Couett-etype flow with uniform suction or blowing and uniform transverse magnetic field. J. Aero/Space Sci., 1962, v. 29, 1, 111—112.
6. Suryaprakasarao U. Laminar flow in channels with porous walls in the presence of a transverse magnetic field. Appl. Scient. Res., 1962, B9, 4/5, 374—382.
7. Регирер С. А. Об одном точном решении уравнений магнитной гидродинамики. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
8. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
9. Pai S. J. Laminar flow of an electrically conducting incompressible fluid in a circular pipe. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, 9, 1205—1207.

ОБ ОДНОМ ДВИЖЕНИИ УРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСКОПА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский (Москва)

1. Как известно [1, 2], уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с его центром тяжести, в ньютоновском поле сил

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=3\frac{g}{R}(C-B)\,\gamma'\gamma'', \quad \frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma'' \quad \begin{pmatrix} ABC \\ pqr \\ \gamma\gamma'\gamma'' \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

должны допускать частное решение

$$\gamma=A'\alpha^{-1/2}p, \qquad \gamma'=B'\alpha^{-1/2}q, \qquad \gamma''=C'\alpha^{-1/2}r \qquad (\alpha=3g\,/\,R) \tag{1.2}$$

где A', B', C'— некоторые постоянные. Переходя в (1.1) к безразмерным переменным

$$p_1=\alpha^{-1/2}p, \qquad q_1=\alpha^{-1/2}q, \qquad r_1=\alpha^{-1/2}r, \qquad t_1=\alpha^{1/2}t \tag{1.3}$$

получим, после замены (1.2), уравнения (1.4)

$$A\frac{dp_1}{dt_1}+(C-B)(1-B'C')\,q_1r_1=0, \qquad A'\frac{dp_1}{dt_1}+(C'-B')\,q_1r_1=0 \qquad \begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \\ p_1q_1r_1 \end{pmatrix}$$

из которых будем иметь соотношения для определения A', B', C'

$$\frac{C-B}{A}u+v-w=\frac{C-B}{A}, \qquad A'=\sqrt{\frac{u}{vw}}\operatorname{sgn}u \qquad \begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \\ uvw \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Так как линейная система (1.5) имеет равный нулю определитель и совместна, то ее решение

$$u=1-a+wa, \qquad v=1-b+wb \qquad (a=A\,/C,\ b=B\,/\,C,\ a+b\neq 1) \tag{1.6}$$

зависит от одной произвольной постоянной w.

Рассмотрим случай

$$u>0, \qquad v>0, \qquad w>0; \qquad A'>B'>C' \tag{1.7}$$

который, как это следует из (1.5), будет иметь место при условиях $u>v>w$, выполняющихся, в частности, когда

$$w<1, \qquad C>B>A \tag{1.8}$$

Тогда вторую группу уравнений (1.4) можно рассматривать как классические уравнения движения твердого тела с моментами инерции A', B', C' вокруг неподвижной точки в случае Эйлера. Эти уравнения обладают первыми интегралами

$$A'p_1^2+B'q_1^2+C'r_1^2=D^{-1}, \qquad A'^2p_1^2+B'^2q_1^2+C'^2r_1^2=1 \tag{1.9}$$

в которых D — произвольная постоянная, а другая произвольная постоянная равна единице (в принятых обозначениях Гринхилла $\mu^2D^2=1$) в силу существования тривиального интеграла

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$$

системы (1.1)

Предполагая, что $B' > D$, представим выражения [3] для p_1, q_1, r_1 в виде

$$p_1 = -\sqrt{\frac{D-C'}{DA'(A'-C')}}\operatorname{cn}\tau, \quad q_1 = \sqrt{\frac{D-C'}{DB'(B'-C')}}\operatorname{sn}\tau, \quad r_1 = \sqrt{\frac{A'-D}{DC'(A'-C')}}\operatorname{dn}\tau$$

$$\tau = n(t_1 - t_0), \qquad n^2 = \frac{(A'-D)(B'-C')}{DA'B'C'}, \qquad k^2 = \frac{(A'-B')(D-C')}{(B'-C')(A'-D)} \qquad (1.10)$$

Эти формулы совместно с (1.2), (1.3), и дают решение задачи.

2. Предположим теперь, что r_{10} — большая величина и в начальный момент времени выполняются неравенства

$$0 < \gamma_0'' < 1 \qquad (f(t_0) = f_0) \qquad (2.1)$$

Кроме того, полагая $\gamma_0' = 0$, из формул (1.10) будем иметь, что $t_0 = 0$.

Введем малый параметр

$$\lambda = \gamma_0'' / r_{10} \qquad (2.2)$$

Величины A', B', C', D, u, v, w, n, k представим в виде рядов по степеням λ

$$u = 1 - a + \lambda^2(\ldots), \quad v = 1 - b + \lambda^2(\ldots), w = \lambda^2(1-a)(1-b) + \lambda^4(\ldots) \qquad (2.3)$$

$$A' = [\lambda(1-b)]^{-1} + \lambda(\ldots), \quad B' = [\lambda(1-a)]^{-1} + \lambda(\ldots), \quad c' = \lambda, \quad D = \lambda\gamma_0''^{-2} + \lambda^3(\ldots)$$

$$n = \frac{\gamma_0''}{\lambda} + \lambda(\ldots), \qquad k^2 = \lambda^2\frac{(1-\gamma_0''^2)(b-a)}{\gamma_0''^2} + \lambda^4(\ldots)$$

Рассмотрим движение твердого тела при помощи углов Эйлера

$$\cos\theta = \gamma'', \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta \qquad \left(\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0'}\right) \qquad (2.4)$$

Переписывая первую формулу (2.4) на основании (1.2), (1.3), (1.9) и (1.10) в виде $\cos\theta = \gamma_0''\operatorname{dn}\tau$ и учитывая первые два члена разложения $\operatorname{dn}\tau$ в ряд по степеням малого параметра k^2, получим при помощи (2.3)

$$\cos\theta = \gamma_0''\left[1 - \lambda^2\frac{(1-\gamma_0''^2)(b-a)}{4\gamma_0''^2}(1-\cos 2r_0t) + \ldots\right] \qquad (2.5)$$

На основании (1.2), (1.3), (1.9), (1.10), (2.3) перепишем второе уравнение (2.4) в виде

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \delta\left(1 + \frac{\beta}{1+\nu\operatorname{sn}^2\tau}\right), \qquad \beta = \frac{\lambda D^{-1} - 1}{1-\gamma_0''^2} = -1 + \lambda^2(1-b) + \ldots$$

$$\nu = k^2 m, \qquad m = \frac{\gamma_0''^2}{1-\gamma_0''^2}, \qquad \delta = \frac{1}{\lambda n} = \gamma_0''^{-1} + \lambda(\ldots) \qquad (2.6)$$

Интегрируя (2.6), будем иметь [4]

$$\psi - \psi_0 = \delta\left[J_1\tau + J_2\ln\frac{\theta(\tau-\xi)}{\theta(\tau+\xi)}\right], \qquad \operatorname{sn}^2\xi = -m$$

$$J_1 = 1 + \beta\left[1 + \frac{\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi}\frac{\theta'(\xi)}{\theta(\xi)}\right], \qquad J_2 = \frac{\beta\operatorname{sn}\xi}{2\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi} \qquad (2.7)$$

Положим

$$\theta(\tau+\xi) = \rho e^{i\chi}, \qquad \theta(\tau-\xi) = \rho e^{-i\chi} \qquad \left(\ln\frac{\theta(\tau-\xi)}{\theta(\tau+\xi)} = -2i\chi\right) \qquad (2.8)$$

Ограничиваясь первыми членами разложения по степеням λ в (2.7), имеем

$$\frac{\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi}\frac{\theta'(\xi)}{\theta(\xi)} = -\frac{1}{2}k^2m + \ldots, \quad \chi = \frac{k^2}{4}\sqrt{m(m+1)}\sin 2\tau + \ldots$$

$$J_1 = \frac{1}{2}\lambda^2(2-a-b) + \ldots, \qquad J_2 = \frac{i}{2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{1/2} \qquad (2.9)$$

На основании (2.3),(2.8), (2.9) выражение (2.7) для угла прецессии примет вид

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{2}\alpha^{1/2}\lambda(2-a-b)\,t - \lambda^2\frac{b-a}{4\gamma_0''^2}\sin 2r_0t + \ldots \qquad (2.10)$$

Из последних двух формул (2.4) при помощи (1.10), (2.5), (2.10) будем иметь следующее выражение для угла собственного вращения

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = \left\{r_0 - \frac{\alpha}{4r_0}[b - a + \gamma_0''^2(4-a-3b)]\right\}t + \ldots \qquad (2.11)$$

К трем произвольным постоянным $\psi_0, \cos\theta_0 = \gamma_0''$, r_0 (r_0 — велико), которые входят в формулы (2.5), (2.10), (2.11), при помощи замены t на $t + h$ (система (1.1) автономна) можно добавить [5] четвертую произвольную постоянную φ_0, связанную с h на основании (2.11) следующей зависимостью

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + r_0 h + \ldots \tag{2.12}$$

Отметим, что полученные формулы (2.5), (2.10), (2.11) для углов θ, ψ, φ существенно отличаются от соответствующих формул в случае Эйлера. Действительно, если в случае Эйлера ввести малый параметр $\lambda = \gamma_0'' / r_0$, то D не будет зависеть от λ. Поэтому величина k^2 также не будет зависеть от λ и функции Якоби $\operatorname{sn}\tau$, $\operatorname{cn}\tau$, $\operatorname{dn}\tau$ нельзя разложить по степеням λ.

3. Рассмотрим теперь движение твердого тела, используя формулы (2.5), (2.10), и (2.11); при этом формулы (2.5) и (2.10) преобразуем к виду

$$\theta - \theta_{10} = - s\sin\theta_0 \cos 2r_0\,(t + h) + \ldots, \qquad \theta_{10} = \theta_0 + s\sin\theta_0 + \ldots$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{2}\alpha^{1/2}\lambda(2 - a - b)\,t - s\sin 2r_0\,(t + h) + \ldots, \quad (s = \lambda^2 (b - a)/4\cos\theta_0) \tag{3.1}$$

Возьмем на единичной сфере с центром в неподвижной точке сферический прямоугольник, образованный параллелями, отстоящими от средней параллели θ_{10} на угол $\pm s\sin\theta_0$ и меридианами, отстоящими от среднего меридиана ψ_0 на угол $\pm s$. Тогда траекторией (θ_1, ψ_1) оси z на единичной сфере, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\dot\psi_1 = {}^1/_2\alpha^{1/2}\lambda(2-a-b)$ вокруг неподвижной оси z_1, будет эллипс

$$\frac{(\theta - \theta_{10})^2}{(s\sin\theta_0)^2} + \frac{(\psi_1 - \psi_0)^2}{s^2} = 1 \tag{3.2}$$

который касается середины сторон указанного сферического прямоугольника. Описывая этот эллипс, ось z тела совершает в первом приближении периодическое движение с периодом $T = \pi / r_0$, при этом в моменты времени

$$t_1^* = \frac{\pi(n_1 + {}^3/_2) - 2\varphi_0}{2r_0}, \qquad t_2^* = \frac{\pi(n_1 + 1) - 2\varphi_0}{2r_0} \qquad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3.3}$$

ось z будет проходить через точки пересечения средней параллели с крайними меридианами (t_1^*) и через точки пересечения среднего меридиана с крайними параллелями (t_2^*).

Собственное вращение тела, как это следует из формулы (2.11), будет мало отличаться от равномерного вращения с большой угловой скоростью r_0.

Рассмотрим теперь случаи $\gamma_0'' = 1$ и $\gamma_0'' = 0$. В случае, когда $\gamma_0'' = 1 (\gamma_0 = \gamma_0' = 0)$, из формул (1.2) вытекает, что $p_0 = q_0 = 0$ ($A' \neq 0, B' \neq 0$). Тогда из интегралов (1.9) следует, что $p = q = 0$ ($\gamma = 0, \gamma' = 0$) во все время движения и тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью r_0 вокруг неподвижной оси z_1.

Условие же $\gamma_0'' = 0$ приводит или к случаю $r_0 = 0$ (если $C' \neq 0$), который нас не интересует, или (если $C' = 0$) к случаю $p = q = \gamma'' = 0$, который разобран при более общих предположениях в работе [1].

Поступила 5 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2.
2. Stekloff V. A. Remarque sur un probléme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le probléme de M. de Brun. Comptes rendus, 1902, v. CXXXV, p. 526—528.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Физматгиз, т. II, 1960.
4. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ, 1936.
5. Архангельский Ю. А. О движении приведенного в быстрое вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.